El CSIC en la Escuela

El lenguaje que normalmente empleamos para comunicarnos no es capaz de describir adecuadamente todos los procesos que tienen lugar en la naturaleza. Afortunadamente las matemáticas no están sujetas a esta limitación y se han revelado perfectamente adecuadas para describir el mundo desde el punto de vista de la ciencia.
Inspirado en Werner Heisenberg (*Sobre la física cuántica*, 1930)

Sobre los Tamaños y Distancias del Sol y la Luna.

Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Área de Cultura Científica del CSIC

Grupo de Extensión Científica del IMAFF

Fundación BBVA

Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna (2007)
López Sancho; JM; Refolio Refolio; MC; Rubio Bernal; Juan & Moreno Gómez; Esteban.
El CSIC en la Escuela [http://www.csicenlaescuela.csic.es/]

Introducción:

Los seres humanos, a diferencia de los demás seres vivos que habitan en nuestro planeta, nacemos sin los conocimientos necesarios para desenvolvernos. Por ello dependemos absolutamente de lo que aprendamos, es decir, de las ideas que, habiendo sido elaboradas por las personas que nos han precedido en la historia, nos sean transmitidas. Y si se nos permitiese juzgar la importancia de estas personas pondríamos en uno de los primeros lugares a **Aristarco de Samos**, parte de cuya obra vamos a exponer en este trabajo.

Aristarco vivió en el periodo comprendido entre el 310 y el 230 a.C., y era veintitrés años mayor que **Arquímedes de Siracusa** (287-212 a.C.), otro de los grandes sucesores de **Euclides**. Aristarco es el autor de una de las ideas más brillantes y audaces de la historia del pensamiento, consistente en extender la validez de las matemáticas (ciencia generada exclusivamente en nuestro planeta y comprobada con objetos terrestres) a la totalidad del universo, empleando sus principios y teoremas para estudiar las propiedades de los cuerpos celestes. Esta idea, tan simple en apariencia, fue decisiva para el desarrollo de la ciencia, la más apasionante aventura de nuestra especie.

De las obras que escribió Aristarco solo ha llegado a nuestro tiempo la que él tituló "*Sobre los Tamaños y Distancias del Sol y la Luna"*, donde expone la forma de determinar estas magnitudes mediante la geometría contenida en *Los Elementos* de **Euclides**. Como veremos, empleó un método que permite hallar los tamaños relativos de la Luna y el Sol respecto al radio de la Tierra, determinación que llevó a cabo hacia el año 270 a.C.

Unos setenta años después, cuando **Eratóstenes** calcula el radio de la Tierra, el método de Aristarco proporcionará la primera estimación del tamaño de nuestro sistema solar, repetido más tarde por **Hiparco** y **Ptolomeo**.

Por esa razón en nuestro viaje retrospectivo desde el comienzo del siglo veintiuno hasta el año 270 a.C. realizaremos una parada técnica en el año 200 a.C., de manera que podamos disponer de la medida del radio de la Tierra obtenida por Eratóstenes, que resultó ser de unos 6.366 kilómetros.

EL MODELO:

En las páginas que siguen vamos a acompañar a Aristarco, seguir su línea de pensamiento y sus cálculos, como si hubiésemos asistido a sus disertaciones. Nos permitiremos pequeñas licencias, simplificando sus métodos y corrigiendo los datos que él empleó cuando lo consideremos necesario.

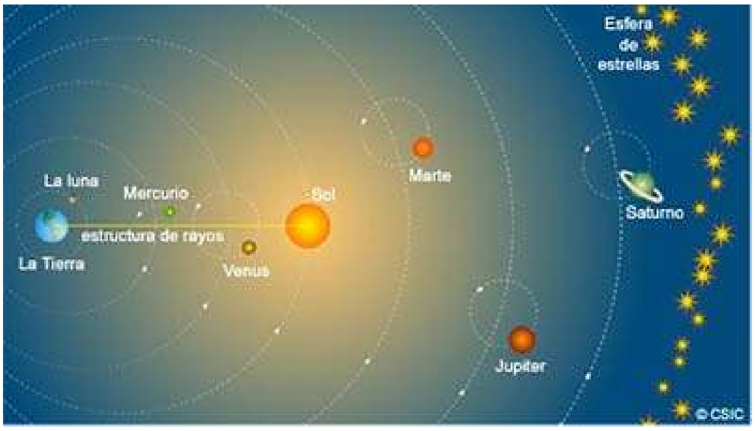
Se sabía que los eclipses de Luna se producen porque la Tierra se interpone entre el Sol y la Luna. De esta manera la sombra de la Tierra proyectada sobre la superficie de la Luna va avanzando hasta que la cubre completamente.

Si hubiésemos asistido a las clases de Aristarco, en primer lugar nos habría explicado el modelo de sistema solar del que partía, ya que es fundamental para emplear la formulación geométrica apropiada. Para estos cálculos utilizó un **modelo geocéntrico**, en el que la Tierra se encuentra en reposo y la Luna gira en torno a ella con un periodo de 29,5 días. El Sol gira también en torno a la Tierra inmóvil y completa una vuelta en un periodo de un año.

Además Aristarco realizó las siguientes hipótesis que simplifican el modelo, todas basadas en el preconcepto griego de que la esfera y el círculo era formas geométricas perfectas y como tales debían ser la base de la construcción geométrica del universo:

1.- *La Tierra, la Luna y el Sol tienen forma esférica*.
2.- *Las órbitas de la Luna y del Sol son perfectamente circulares*.
3.- *El radio de la órbita del Sol es mucho mayor que el de la Luna, por lo cual podemos considerar que sus rayos de luz se mantienen paralelos entre la Luna y la Tierra.*

Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna (2007)
López Sancho; JM; Refolio Refolio; MC; Rubio Bernal; Juan & Moreno Gómez; Esteban.
El CSIC en la Escuela [http://www.csicenlaescuela.csic.es/]

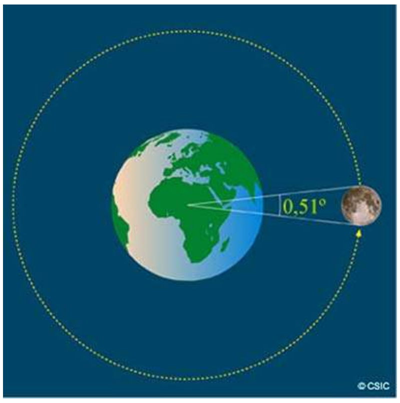


En realidad el modelo de universo en la época de Aristarco situaba al Sol entre Venus y Marte, como indica la figura, por lo que Aristarco pensaría que era una hipótesis para llevar a cabo una primera aproximación.

Modelo de Universo en la época de Aristarco, el Sol se situaba entre Venus y Marte

LAS OBSERVACIONES:

La primera determinación de Aristarco fue la de la velocidad con que se mueve la Luna por el fondo de las estrellas fijas. Para ello midió el ángulo con que se ve la Luna desde la Tierra empleando un transportador de ángulos, y llegó a la conclusión de que dicho ángulo era del orden de 0.5 grados. (A veces se encuentran citas en las que se atribuye a Aristarco la asignación de 2 grados para el tamaño angular de la Luna, lo que es incorrecto. Esta cifra la emplea para ilustrar su método, refiriéndose al caso hipotético en que el tamaño aparente de la Luna era un quinceavo de una región del Zodiaco, es decir de 2 grados).



Una vez determinado el tamaño angular de la Luna observó el tiempo que tardaba la misma en *atravesar* una estrella fija, para obtener su velocidad angular.

Este tiempo resultó ser de una hora, lo que da una velocidad angular de 0,5º por hora.

El valor de la velocidad angular de la Luna en su movimiento a lo largo de su órbita se podía obtener igualmente a partir de la duración de la revolución de nuestro satélite en torno a la Tierra.

Se sabía desde los tiempos de los babilonios que un mes lunar sinódico, es decir, el tiempo que transcurre entre dos situaciones de Luna llena, es de 29,53 días. De este dato se deduce que la Luna recorre los 360 grados de su órbita en 29,53 días:

24 horas · 29,53 dias = 708,72 horas,

por lo que su velocidad angular es de:

360 grados / 708,72 horas = 0.51 grados por hora

Como vemos, la discrepancia de 0,01 grado por hora en la velocidad angular de la Luna nos está indicando que alguna de las hipótesis no es correcta; o los rayos del Sol no llegan perfectamente paralelos a la Tierra o la determinación de la velocidad angular de la Luna tiene errores. Pero la diferencia entre ambas determinaciones no es demasiado grande, por lo que **Aristarco** aceptó el valor de 0,51 grados como correcta.

En el siguiente paso **Aristarco** utilizó las observaciones realizadas durante un eclipse lunar de máxima duración, en el que el centro de nuestro satélite (en la fase de Luna llena), pasa exactamente por el centro de la sombra de la Tierra.

Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna (2007)
López Sancho; JM; Refolio Refolio; MC; Rubio Bernal; Juan & Moreno Gómez; Esteban.
El CSIC en la Escuela [http://www.csicenlaescuela.csic.es/]

Con su modelo simplificado es fácil comparar el diámetro de la Luna con el de la Tierra, ya que:

1.-La sombra de la Tierra tiene el mismo tamaño que la Tierra misma (se ha supuesto que el Sol está a distancia infinita).

2.- La Luna se mueva por el firmamento a una velocidad angular conocida, (0,51 grados por hora) que hemos medido respecto al fondo de las estrellas fijas.

Aristarco observa que la Luna tarda en atravesar el borde de la sombra de la Tierra una hora, de acuerdo con el dato de su velocidad angular, y unas tres horas en aparecer por el borde opuesto, lo que indica que su diámetro (y por lo tanto el radio) es un tercio del diámetro de la Tierra o lo que es lo mismo, el diámetro de la Tierra es tres veces mayor que el de la luna. En este punto **Aristarco** realiza una aproximación geométrica, la de suponer que la cuerda de un arco tiene la misma longitud que el arco.

Esta aproximación es adicional al modelo, ya que sólo afecta a la exactitud del resultado y no a la imagen que nos formamos de la realidad.

Diámetro (Luna) = Diámetro (Tierra) / 3

Si utilizásemos el diámetro real de la tierra, 12.756 esta relación daría:

12.756 kilómetros / 3 = 4.252 kilómetros tiene el diámetro de la luna.

4.252 kilómetros / 2 = 2.126 kilómetros da el radio de la luna

Valor que de para el radio de la Luna 2.126 kilómetro. En realidad se cometería un error de casi un veinte por ciento ya que el radio de la Luna mide unos 1722 kilómetros, pero para ser una primera aproximación y sin más aparatos que una plomada y un transportador de ángulos, resulta realmente un éxito.

Aproximadamente dos siglos más tarde, hacia el año 150 a.C., **Hiparco de Nicea** (190-120 a.C.) empleó un método distinto para determinar la relación de tamaños entre Luna y Tierra. Siguiendo el método de **Aristarco**, dibujó la silueta de la Luna y de la sombra de la Tierra en varias fases del eclipse.

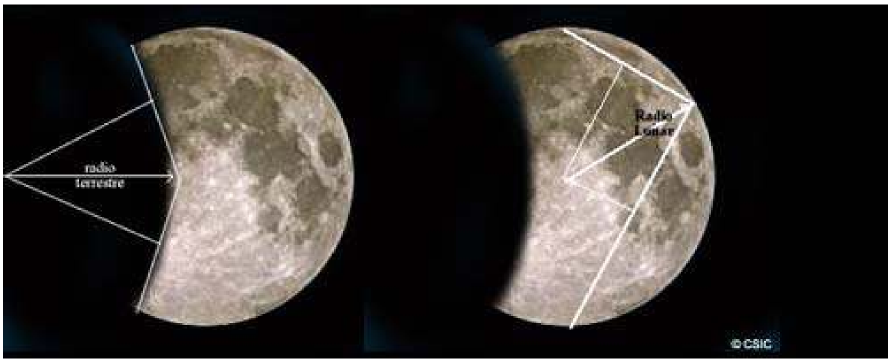
Suponiendo, como hemos dicho, que el Sol se encuentra muy alejado de la Tierra y de la Luna, la sombra proyectada de la Tierra sobre la Luna tiene exactamente el mismo tamaño que la Tierra, de la misma manera que las sombras chinescas que se proyecta empleando la luz del Sol mantienen exactamente el tamaño de las manos.
Una vez pasado el eclipse, **Hiparco** completó los círculos que correspondían a las sombras y midió la relación entre los radios de dichos círculos y el correspondiente radio de la sombra de la Tierra. Llegó a la conclusión de que el radio de la Tierra es 3,7 veces mayor que el de la Luna (en lugar de las 3 veces a que llegó **Aristarco**), es decir que la relación entre ambos radios es:

Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna (2007)
López Sancho; JM; Refolio Refolio; MC; Rubio Bernal; Juan & Moreno Gómez; Esteban.
El CSIC en la Escuela [http://www.csicenlaescuela.csic.es/]

Radio Tierra / Radio Luna = 3.7

Tomando el valor del radio de la Tierra de **Eratóstenes**, (276-194 a. C.) de 6.366 kilómetros, se obtiene para el de la Luna 1.719 kilómetros, muy cercano del radio medio real, 1.722 kilómetros.

El procedimiento utilizado por **Hiparco** era muy sencillo. Si dibujamos cuidadosamente, en un material transparente, las siluetas de la Luna y la sombra de la Tierra, obtendremos una figura semejante a la de la representación adjunta, en la que se pueden trazar los radios de ambos círculos. A tal fin basta señalar tres puntos en la silueta de la sombra de nuestro planeta, trazar los dos segmentos rectilíneos que determinan y las mediatrices correspondiente; el punto en que se encuentran es el centro de la silueta de la Tierra.



CÁLCULO DE LA DISTANCIA DE LA TIERRA A LA LUNA

Una vez conocido el tamaño real de la Luna es fácil calcular la distancia a la que se encuentra de la Tierra, a partir de su tamaño angular, es decir, del ángulo con que se ven los bordes más separados de la circunferencia lunar (0,51º). Como en los cálculos anteriores, vamos a suponer que los ángulos con los que trabajamos son suficientemente pequeños para poder sustituir la longitud de la cuerda por la longitud del arco. La forma de calcularla es la siguiente:

- El diámetro de la Luna, 3438 kilómetros según la determinación a la que llegó **Hiparco**, es aproximadamente la cuerda correspondiente a un ángulo central de 0.51 grados. Como la longitud de la circunferencia total $2 \pi R$, corresponde a un ángulo de 360 grados, tendremos la siguiente relación que no es más que una regla de tres:

3438 kilómetros$/0{,}51º = 2 \pi R/360$ De esta expresión se deduce el radio, R, de la órbita:

$R= 3438 \cdot 360/(2 \pi\ 0{,}51)=386.241$ kilómetros.

Este radio es la distancia de la Tierra a la Luna. Dado que el valor real medio resulta ser de 384.000 kilómetros, el cálculo descrito constituye una estimación magnífica.

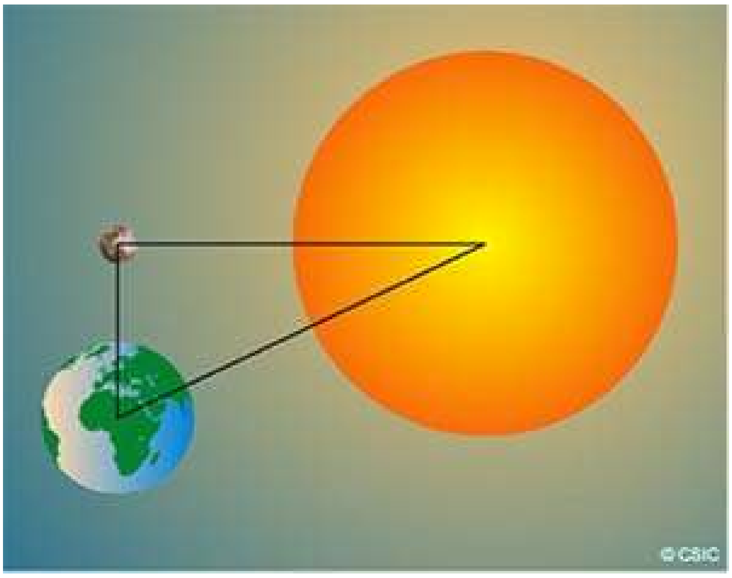
Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna (2007)
López Sancho; JM; Refolio Refolio; MC; Rubio Bernal; Juan & Moreno Gómez; Esteban.
El CSIC en la Escuela [http://www.csicenlaescuela.csic.es/]

En realidad la órbita real de la Luna es, de acuerdo con la primera ley de **Kepler**, una elipse, por lo que la distancia Tierra-Luna es variable. La distancia mínima (perigeo) a la Tierra es 356.410 kilómetros y la máxima (apogeo) es 406.700 kilómetros. La distancia media a lo largo de la órbita resultó ser efectivamente 384.000 Kilómetros.

TAMAÑO DEL SOL Y DISTANCIA DESDE LA TIERRA

La determinación de la distancia al Sol la vamos a llevar a cabo siguiendo, en líneas generales, el método expuesto por Aristarco. Sabemos que la Luna recibe la luz del Sol, que es el origen de las fases de la Luna. Cuando vemos media Luna iluminada (ya sea en cuarto creciente o menguante) la luz del Sol forma un ángulo recto con la línea que une la Tierra y la Luna.
Si, en estas condiciones, medimos el ángulo α que forman las direcciones Tierra-Sol y Tierra-Luna obtendremos un triángulo rectángulo con el que es fácil determinar la distancia Tierra-Sol.

Aristarco midió el ángulo y obtuvo un valor de 87 grados. Como sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo plano siempre vale 180 grados, el ángulo beta medirá 3 grados.



Ángulo Sol-Luna-Tierra=90º

Ángulo Luna-Tierra-Sol= 87º

Ángulo Tierra-Sol-Luna= 3º

En el razonamiento que sigue admitiremos la misma aproximación del cálculo anterior, es decir, que las longitudes de la cuerda y el arco son iguales, pero en este caso utilizaremos los valores de la mitad de la cuerda y del arco.

Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna (2007)
López Sancho; JM; Refolio Refolio; MC; Rubio Bernal; Juan & Moreno Gómez; Esteban.
El CSIC en la Escuela [http://www.csicenlaescuela.csic.es/]

Con centro en el Sol, dibujamos una circunferencia con la que podemos escribir la siguiente relación:

$$3º/(\text{Distancia Tierra-Sol})=360º/2\ \pi R$$

$$R=(120/2\ \pi).$$

$$(\text{Distancia Tierra-Sol})=19.099 \cdot 38.6241=7.376.817 \text{ kilómetros}$$

algo más de siete millones de kilómetros, es decir, que el Sol dista de nosotros unas veinte veces más que la Luna. Aristarco cometió un error importante al medir el ángulo alfa, que en realidad es de unos 89,85º, lo que da como resultado, una distancia veinte veces mayor de la que calculó **Aristarco**, es decir, de unos 147 millones de kilómetros frente a los 150 millones de kilómetros que es la distancia verdadera.

El error del modelo simplificado de **Aristarco** se debe a que la distancia al Sol no es infinita, por lo que sus rayos no llegan paralelos a la Tierra. En realidad hay una zona de sombra rodeada de una zona de penumbra, con lo que las medidas corregidas son:

$$\text{Diámetro Tierra} = 3.70 \text{ Diámetro Luna}$$

Que coincide con la medida de Hiparco.

DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DEL SOL

Una vez conocida la distancia al Sol (R), el diámetro del Sol (D) se puede determinar a partir del tamaño angular. Como es difícil medir el ángulo bajo el que se ve el Sol, **Hiparco** utilizó el conocimiento que tenía del tamaño angular de la Luna y del hecho de que en los eclipses de Sol totales el tamaño aparente de la Luna coincidía con bastante exactitud con el del Sol.

Un eclipse de Sol ocurre cuando la Luna se sitúa entre la Tierra y el Sol, de manera que la sombra de la Luna cubre parte o la totalidad del Sol. Como la Luna se mueva en su órbita, su sombra también se desplaza por la superficie de la Tierra, de manera que el eclipse total dura uno o dos minutos cuando se observa desde un punto de la Tierra.

Cuando los centros de los dos astros coinciden se producen eclipses anulares o totales dependiendo de la distancia de la Luna a la Tierra. En un eclipse total, cosa que ocurre cuando la Luna está más cerca de la Tierra, ambos astros tienen el mismo tamaño angular, del orden de medio grado (0.51º).

Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna (2007)
López Sancho; JM; Refolio Refolio; MC; Rubio Bernal; Juan & Moreno Gómez; Esteban.
El CSIC en la Escuela [http://www.csicenlaescuela.csic.es/]

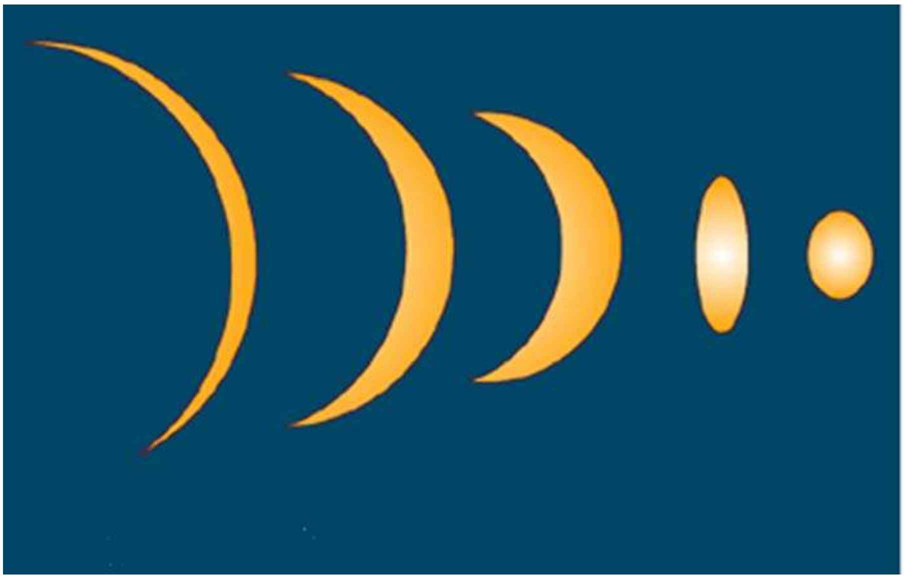
Como la distancia Tierra Sol (R) es conocida, 150 millones de kilómetros, podemos calcular el diámetro del Sol (D) razonando como sigue:

si la longitud de la circunferencia ($2 \pi R$) corresponde a un ángulo de 360º, D será el arco correspondiente a 0.51º. Es decir:

Si a $2 \pi R$ le corresponden 360º, al diámetro del Sol le corresponden 0,51º.

$$2\cdot \pi \cdot R / 360 = D / 0{,}51^{o}$$
$$D = 0.51^{o} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R / 360^{o} = 1.335.177 \text{ kilómetros}$$

que da un radio de 667.589 kilómetros, un resultado bastante aproximado ya que las últimas determinaciones dan 695.000 kilómetros.



Eclipse Solar

Otra manera de determinar el tamaño del Sol consiste en utilizar el teorema de Tales: La razón entre las distancias Tierra-Sol (TS) y Tierra-Luna (TL) es igual a la razón entre los correspondientes diámetros DS y DL. Es decir:

$$TS / TL = DS / DL$$

Lo que da:

$$DS = DL\cdot (TS/TL) = 3444\cdot(150000000\text{Km}/384000\text{Km}) = 1.345.312 \text{ Kilómetros}$$

y un radio de 672.656 Kilómetros, una aproximación mejor al valor real.

Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna (2007)
López Sancho; JM; Refolio Refolio; MC; Rubio Bernal; Juan & Moreno Gómez; Esteban.
El CSIC en la Escuela [http://www.csicenlaescuela.csic.es/]