DETERMINACION DEL ELIPSOIDE TERRESTRE POR EL METODO DE LAS AREAS

Por M. J. SEVILLA
y A. NUÑEZ
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense

METODO DE LAS AREAS

1. FUNDAMENTO DEL METODO

Uno de los métodos que más importancia ha tenido en Geodesia para determinar el elipsoide terrestre ha sido el método de las áreas introducido por Hayford en el año 1909, y que después ha tenido grandes aplicaciones.

El método está basado en la utilización de las desviaciones relativas de la vertical; que, como sabemos son, en cada punto, el ángulo formado por la vertical física y la normal al elipsoide de referencia. Ahora bien, estas desviaciones deberán referirse al geoide, por lo que habrán de estar corregidas teniendo en cuenta la influencia que sobre la dirección de la vertical tienen las desviaciones locales definidas por la topografía del terreno, además de la hipótesis admitida de compensación isostática, así como la profundidad de compensación.

Entonces el método de las áreas nos dará como resultado: la profundidad de compensación isostática según la hipótesis admitida y las dimensiones del elipsoide que mejor se adapte al geoide.

Las desviaciones relativas de la vertical que se tomarán como datos, van a depender fundamentalmente de los errores cometidos en el punto astronómico fundamental de la red, de las desviaciones locales (topografía e isostasia) y de las dimensiones del elipsoide de referencia adoptado para calcular la red provisional.

En estas condiciones se tomará como solución la resultante del método de mínimos cuadrados bajo la hipótesis de que dichas soluciones hagan mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones relativas de la vertical a que dan lugar.

Para el cálculo de las desviaciones relativas de la vertical disponemos de las expresiones de sus componentes sobre el meridiano (ξ) y sobre el primer vertical (η); éstas son:

$$\xi = \phi - \varphi$$
$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi$$
$$\eta = (A - \alpha) \operatorname{cotg} \varphi$$

donde ϕ, Λ, A son la latitud, longitud y acimut astronómicos en el punto considerado, y φ, η, α, las correspondientes coordenadas geodésicas; que, como sabemos, serán función principalmente de los parámetros, semieje (a) y cuadrado de la excentricidad (e^2) del elipsoide de referencia, así como de las coordenadas ϕ_o, Λ_o, A_o del punto astronómico fundamental; es decir, del Datum geodésico. Escribimos, pues:

$$\xi = \phi - \varphi\ (a, e^2, \phi_o, \Lambda_o, A_o)$$
$$\eta = (\Lambda - \lambda\ (a, e^2, \phi_o, \Lambda_o, A_o) \cos \varphi$$
$$\eta = (A - \alpha\ (a, e^2, \phi_o, \Lambda_o, A_o) \operatorname{cotg} \varphi$$

dejando al margen las correcciones topoisostáticas, que se tratarán de otra forma.

Consideremos ahora los posibles errores en los elementos anteriores: da, de^2, $d\phi$, $d\Lambda$, dA; éstas serán las incógnitas que habrá que determinar por el método de mínimos cuadrados.

Entonces, siguiendo a Hayford y a partir de las ecuaciones anteriores, obtenemos las ecuaciones de observación, que se pueden escribir de la forma siguiente:

a) Para observaciones de la latitud astronómica (1, a):

$$k_1 d\phi + l_1 d\Lambda + m_1 dA + n_1(da/100) +$$
$$+ o_1(10000 de^2) + (\phi' - \varphi') = D_M$$

b) Para observaciones de la longitud astronómica (1, b):

$$k_2 d\phi + l_2 d\Lambda + m_2 dA + n_2(da/100) + $$
$$+ o_2(10000de^2) + (\Lambda' - \lambda') \cos \varphi' = D_P$$

c) Para observaciones del acimut astronómico (1, c):

$$k_3 d\phi + l_3 d\Lambda + m_3 dA + n_3(da/100) +$$
$$+ o_3(10000de^2) - (A' - \alpha') \operatorname{cotg} \varphi' = D_P$$

Las cantidades ϕ', Λ', A' son las coordenadas astronómicas del punto considerado; φ', λ', α', son sus coordenadas geodésicas; $\phi' - \varphi'$, $(\Lambda' - \lambda') \cos \varphi'$ y $(A' - \alpha') \operatorname{cotg} \varphi'$ son las componentes de las desviaciones de la vertical ya mencionadas.

Las cantidades $d\phi$, $d\Lambda$, dA son las correcciones a la latitud, longitud y acimut del punto fundamental; $(da/100)$ es la centésima parte de la corrección al semieje del elipsoide considerado y $(10000de^2)$ es diez mil veces la corrección del cuadrado de la excentricidad de dicho elipsoide.

k_1 es un coeficiente numérico tal, que si en lugar de comenzar el cálculo con la latitud inicial ϕ_o, se inicia con el valor $\phi_o + d\phi$, la latitud geodésica del punto en cuestión ha variado en $-k_1 d\phi$.

Similarmente, k_2 es un coeficiente numérico tal, que si la latitud inicial varía $d\phi$, el cambio producido en $(\Lambda' - \lambda') \cos \varphi'$ se determina por $k_2 d\phi$. $k_3 d\phi$ expresa la relación entre $d\phi$ y $(A' - \alpha') \operatorname{cotg} \varphi'$.

Los coeficientes l_1, l_2, l_3 expresan las correspondientes relaciones entre $d\Lambda$, corrección en la longitud inicial y las componentes de la desviación de la vertical antes aludidas.

Análogamente, los coeficientes m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3, o_1, o_2, o_3 expresan relaciones similares entre dA, $(da/100)$ y $(10000de^2)$ y las mismas componentes.

Las cantidades D_M representan los residuales de las ecuaciones de observación en latitud. Las cantidades D_P representan dichos residuales en longitud (1, b) y en acimut (1, c).

El problema así planteado consiste en determinar los valores $d\phi$, $d\Lambda$, dA, da, de^2 que hagan $\Sigma D_M^2 + \Sigma D_P^2$ mínimo.

Evidentemente, las desviaciones relativas de la vertical dependerán, además de los errores ya considerados, de los errores propios de la triangulación y también de la profundidad de compensación isostática utilizada.

Según las investigaciones de Hayford en los Estados Unidos, los efectos en las desviaciones de la vertical considerados exceden en mucho a los posibles errores en observación y a los de triangulación, por lo que éstos no se consideran. Sin embargo, la profundidad de compensación isostática debería ser una nueva incógnita a considerar e introducir en el sistema (1), pero Hayford, en vez de esto, repite el proceso expuesto con varias hipótesis isostáticas y diferentes profundidades de compensación, lo que le obliga a resolver diversos sistemas de ecuaciones del tipo (1), en los que cambian los términos independientes, donde están las desviaciones. Al final daremos los resultados obtenidos.

2. OBTENCION DE LOS COEFICIENTES

Primeramente se van a demostrar unas expresiones que se utilizarán para el cálculo efectivo de los coeficientes de las ecuaciones de observación (1).

Consideremos el punto fundamental (ϕ_o, Λ_o, A_o) e introduzcamos una corrección dada por $(d\phi, d\Lambda, dA)$; igualmente se efectúan sobre los parámetros que definen el elipsoide de referencia escogido, las correcciones da y $d(e^2)$. Debido a estas correcciones las coordenadas geodésicas $(\varphi', \lambda', \alpha')$ de un punto P de la triangulación habrán sufrido una alteración, pasando a ser $(\varphi'', \lambda'', \alpha'')$.

Por lo tanto, al considerar las correcciones infinitésimos de primer orden podemos escribir que:

$$\varphi'' = \varphi' + d_{11}(d\phi) + d_{12}(d\Lambda) + d_{13}(dA) +$$
$$+ d_{14}(da) + d_{15}(de^2)$$

$$\lambda'' = \lambda' + d_{21}(d\phi) + d_{22}(d\Lambda) + d_{23}(dA) +$$
$$+ d_{24}(da) + d_{25}(de^2) \qquad (2)$$

$$\alpha'' = \alpha' + d_{31}(d\phi) + d_{32}(d\Lambda) + d_{33}(dA) +$$
$$+ d_{34}(da) + d_{35}(de^2)$$

El problema se reduce a determinar los coeficientes d_{ij}.

Sean (φ, λ) las coordenadas geodésicas del punto fundamental que, según se sabe, coinciden con las astronómicas (ϕ_o, Λ_o). Recordemos las siguientes fórmulas de triangulación:

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\overline{\alpha}+\omega+\zeta)=$$

$$=-\frac{\cos\frac{1}{2}(90-\varphi-\theta)}{\cos\frac{1}{2}(90-\varphi+\theta)}\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}\qquad(3)$$

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\overline{\alpha}-\omega+\zeta)=$$

$$=-\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90-\varphi-\theta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90-\varphi+\theta)}\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}\qquad(4)$$

$$\varphi'-\varphi=-\frac{s\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\overline{\alpha}+\alpha+\zeta)}{\rho\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\overline{\alpha}-\alpha+\zeta)}(1+Q)\qquad(5)$$

Siendo: $\omega = \lambda' - \lambda$ la diferencia entre la longitud de la estación y la longitud del punto fundamental, s la distancia en metros del punto (φ, λ) al punto (φ', λ'), α el acimut desde el punto (φ, λ) al punto (φ', λ') y $\overline{\alpha}$ el recíproco, ρ el radio de curvatura de la elipse meridiana en el punto de latitud $\frac{\varphi+\varphi'}{2}$, θ el arco correspondiente a la distancia s sobre el elipsoide de referencia y ζ es la corrección que se le da al acimut debido a la altura de los puntos sobre el elipsoide. Sus valores correspondientes son:

$$\rho=\frac{a\,(1-e^2)}{\left[1-e^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')\right]^{3/2}}\qquad(6)$$

$$\theta=\frac{s}{N}\left[1+\frac{1}{6}\,\frac{s^2\,\theta^2}{(1-e^2)}\cos^2\varphi\cos^2\alpha\right]\qquad(7)$$

siendo N la normal a la elipse meridiana en el punto de latitud φ

$$N=\frac{a}{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2}}\qquad(8)$$

y

$$\zeta=-\frac{1}{4}\,\frac{e^2\,\theta^2}{(1-e^2)}\cos^2\varphi\operatorname{sen}2\alpha\qquad(9)$$

Por último, la cantidad Q es:

$$Q=\frac{\theta^2}{12}\cos^2\frac{1}{2}(\overline{\alpha}+\alpha)\qquad(10)$$

El significado geométrico de dichas cantidades puede verse en la gráfica siguiente, que representa un triángulo esférico sobre una esfera de centro H, coincidente con el centro del elipsoide de referencia y tangente a éste en el punto C (φ, λ). Los elementos de dicho triángulo esférico que tiene por vértices el punto B, que es el polo; el punto A, que es la estación considerada, y C, que es la estación inicial o DATUM, son:

$\hat{B} = \omega = \lambda' - \lambda$ $\qquad$ $BC = 90 - \varphi$

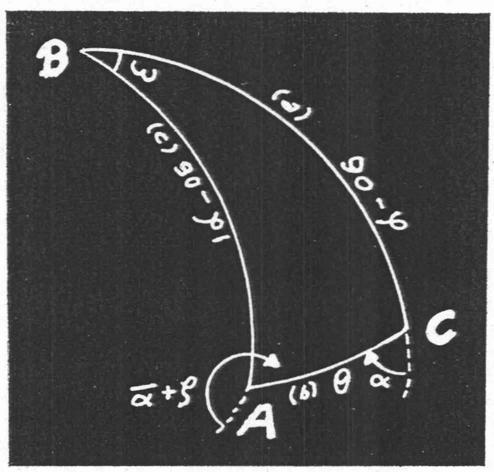
$\hat{C} = 180 - \alpha$ $\qquad$ $AC = \theta$

$\hat{A} = (\overline{\alpha} + \zeta) - 180$ $\qquad$ $BA = 90 - \varphi' = p$

Sea $d\Lambda$ la corrección aplicada a la longitud del DATUM Λ_o, o bien λ como estamos considerando. Si imponemos que ω permanezca constante se ha de verificar que:

$$\lambda'' = \lambda' + d\Lambda$$

Luego los demás elementos permanecen constantes, pues lo único que ha variado es la posición del triángulo sobre la esfera debido a una rotación alrededor del eje de revolución de ángulo $d\Lambda$. Por lo tanto, $\varphi'' = \varphi'$ y $\alpha'' = \alpha'$, con lo que se concluye que:



$$\boxed{\begin{aligned} d_{12} &= 0 \\ d_{22} &= 1 \\ d_{32} &= 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(11)\\ &(12)\\ &(13)\end{aligned}$$

Para la obtención de los coeficientes d_{11}, d_{21} y d_{31} hemos de efectuar un cambio $d\phi$ en φ, manteniendo constantes λ y α, que nos va a producir un pequeño cambio en θ (véase la fórmula 7) que se considerará despreciable. Luego se concluye que s, C, b permanecen constantes, pero c, a, B y A varían.

Igualmente la obtención de los coeficientes d_{13}, d_{23}, d_{33} se llevará a cabo introduciendo un cambio dA en α y manteniendo constantes φ y λ, si igualmente se supone que θ no ha variado, se concluye que A, B, C, c varían.

Recordando las fórmulas (3) y (4) es evidente que si α varía entonces, $\overline{\alpha}$ y ω también varían, manteniéndose θ prácticamente constante por lo expuesto antes. En cuanto a la cantidad ζ, ya de por sí pequeñísima, su variación con respecto a α será en la práctica despreciable, es decir:

$$\frac{d\zeta}{d\alpha} = 0$$

En los cálculos que siguen a continuación, ζ se considerará, además de constante, despreciable.

Diferenciando la fórmula (3) con respecto a α se obtiene:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\alpha} + \frac{d\omega}{d\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\overline{\alpha}+\omega)\cos\frac{1}{2}(90-\varphi-\theta)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{1}{2}(90-\varphi+\theta)} \quad (14)$$

Utilizando las fórmulas generales de la trigonometría esfeica:

$$\operatorname{sen}(A+B)\cos^2\frac{1}{2}c =$$

$$= \cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen} C \quad (15)$$

$$\cos\frac{1}{2}(A+B) =$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\operatorname{sen}\frac{1}{2}C \quad (16)$$

que para nuestro caso se transforman en:

$$-\operatorname{sen}(\overline{\alpha}+\omega)\cos^2\frac{p}{2} =$$

$$= \cos\frac{1}{2}(90-\varphi-\theta)\cos\frac{1}{2}(90- -\varphi+\theta)\operatorname{sen}\alpha \quad (17)$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\overline{\alpha}+\omega) =$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(90-\varphi+\theta)}{\cos\frac{p}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} \quad (18)$$

obtenemos que:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\alpha} + \frac{d\omega}{d\alpha} = -\frac{\operatorname{sen}(\overline{\alpha}+\omega)}{\operatorname{sen}\alpha} \quad (19)$$

Diferenciando la fórmula (4) respecto a α obtenemos:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\alpha} - \frac{d\omega}{d\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\overline{\alpha}-\omega)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90-\varphi-\theta)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90-\varphi+\theta)} \quad (20)$$

Utilizando las fórmulas generales de trigonometría esférica

$$\operatorname{sen}(A-B)\operatorname{sen}^2\frac{c}{2} =$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen} C \quad (21)$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \quad (22)$$

que en nuestro caso son:

$$-\operatorname{sen}(\overline{\alpha}-\omega)\operatorname{sen}^2\frac{p}{2} = \operatorname{sen}\frac{1}{2}(90-$$

$$-\varphi-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90-\varphi+\theta)\operatorname{sen}\alpha \quad (23)$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\overline{\alpha}-\omega) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(90-\varphi+\theta)}{\operatorname{sen}\frac{p}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} \quad (24)$$

se obtiene:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\alpha}-\frac{d\omega}{d\alpha} = -\frac{\operatorname{sen}(\overline{\alpha}-\omega)}{\operatorname{sen}\alpha} \quad (25)$$

Sumando las expresiones (19) y (25) se tiene:

$$\boxed{\frac{d\overline{\alpha}}{d\alpha} = -\frac{\operatorname{sen}\overline{\alpha}\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha} = d_{33}} \quad (26)$$

Restándolas se obtiene:

$$\boxed{\frac{d\omega}{d\alpha} = -\frac{\cos\overline{\alpha}\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\alpha} = d_{23}} \quad (27)$$

Volviendo a las fórmulas (3) y (4), si φ varía al mismo tiempo que α y λ permanecen constantes, $\overline{\alpha}$ y ω también varían, y θ lo suponemos, igual que antes, constante.

Diferenciando la fórmula (3) se obtiene:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\varphi}+\frac{d\omega}{d\varphi} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\overline{\alpha}+\omega)\operatorname{sen}\theta\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{1}{2}(90-\varphi+\theta)} \quad (28)$$

Simplificando (28) mediante la fórmula (18) se obtiene:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\varphi}+\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha}{2\cos^2\frac{p}{2}} \quad (29)$$

Diferenciando (4) se encuentra:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\varphi}-\frac{d\omega}{d\varphi} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\overline{\alpha}-\omega)\operatorname{sen}\theta\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(90-\varphi+\theta)} \quad (30)$$

Simplificando (30) mediante la relación (22) obtenemos:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\varphi}-\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha}{2\operatorname{sen}^2\frac{p}{2}} \quad (31)$$

El teorema de los senos de la trigonometría esférica dice:

$$\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}b} = \frac{\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}c} \quad (32)$$

que aplicado a nuestro triángulo

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}p} \quad (33)$$

Sumando las expresiones (29) y (31) y aplicando (33) se obtiene:

$$\boxed{\frac{d\overline{\alpha}}{d\varphi} = -\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta} = d_{31}} \quad (34)$$

Restándolas y puesto que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, se tiene:

$$\boxed{\frac{d\omega}{d\varphi} = \text{cotg } p \text{ sen } \omega = d_{21}} \qquad (35)$$

y suponiendo $p = 90 - \varphi'$, concluimos que:

$$\boxed{\frac{d\omega}{d\varphi} = \text{tag } \varphi' \text{ sen } \omega = d_{21}} \qquad (35)$$

Para el cálculo de d_{13} consideremos la fórmula (5); es evidente que si α se corrige una pequeña cantidad $d\alpha$, al mismo tiempo que φ y λ quedan fijos, $\overline{\alpha}$ y φ' varían. Para calcular $\frac{d\varphi'}{d\alpha}$ vamos a considerar que $(1 + Q)$ permanece constante y despreciando el ángulo ζ, se encuentra, diferenciando (5):

$$\frac{d\varphi'}{d\alpha} = -\frac{s}{\rho}(1+Q)\frac{\text{sen } \overline{\alpha} - \text{sen } \alpha \frac{d\overline{\alpha}}{d\alpha}}{2 \text{ sen}^2 \frac{1}{2}(\overline{\alpha} - \alpha)} \qquad (36)$$

Sustituyendo en (36) el valor encontrado para $\frac{d\overline{\alpha}}{d\alpha}$ se obtiene:

$$\boxed{\frac{d\varphi'}{d\alpha} = -\frac{s}{\rho}(1+Q)\frac{\text{sen } \overline{\alpha}(1+\cos \omega)}{2 \text{ sen}^2 \frac{1}{2}(\overline{\alpha} - \alpha)} = d_{13} \qquad (37)}$$

Similarmente, si φ se corrige en $d\varphi$ al mismo tiempo que α y s quedan constantes, $\overline{\alpha}$ y φ' cambian, resultando:

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = 1 + \frac{s}{\rho}(1+Q)\frac{\text{sen } \alpha \frac{d\overline{\alpha}}{d\varphi}}{2 \text{ sen}^2 \frac{1}{2}(\overline{\alpha} - \alpha)} \qquad (38)$$

Sustituyendo en (38) el valor $\frac{d\overline{\alpha}}{d\varphi}$ obtenido anteriormente nos queda:

$$\boxed{\frac{d\varphi'}{d\varphi} = 1 - \frac{s}{\rho}(1+Q)\frac{\text{sen}^2 \omega}{2 \text{ sen}^2 \frac{1}{2}(\overline{\alpha} - \alpha) \text{ sen } \theta} = d_{11}} \qquad (39)$$

A fin de determinar d_{14}, d_{24}, d_{34}, d_{15}, d_{25}, d_{35} es decir, los efectos producidos en φ', λ' $\overline{\alpha}$ por un cambio en a y e^2 de magnitud da y $d(e^2)$, consideremos en primera aproximación.

$$\theta = \frac{s}{N} = \frac{s(1 - e^2 \text{ sen}^2 \varphi)^{1/2}}{a} \qquad (40)$$

Diferenciando con respecto a **a** tenemos:

$$\frac{d\theta}{da} = -\frac{s(1 - e^2 \text{ sen}^2 \varphi)^{1/2}}{a^2} = -\frac{\theta}{a} \qquad (41)$$

Diferenciando igualmente con respecto a (e^2) obtenemos:

$$\frac{d\theta}{d(e^2)} = -\frac{\theta}{2}\frac{\text{sen}^2 \varphi}{(1 - e^2 \text{ sen}^2 \varphi)} \qquad (42)$$

En las expresiones (3) y (4), cuando θ varía α y ω también varían. Despreciando ζ y diferenciando (3) se obtiene:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\theta} + \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{\text{sen}^2 \frac{1}{2}(\overline{\alpha} + \omega) \text{ tag } \frac{\alpha}{2} \cos \varphi}{\cos^2 \frac{1}{2}(90 - \varphi + \theta)} \qquad (43)$$

Introduciendo la fórmula (18) se obtiene:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\theta} + \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{\text{sen } \alpha \cos \varphi}{2 \cos \frac{p}{2}} \qquad (44)$$

Similarmente, diferenciando (4) y despreciando ζ obtenemos:

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\theta} - \frac{d\omega}{d\theta} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\bar{\alpha} - \omega) \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2} \cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (90 - \varphi + \theta)} \quad (45)$$

que combinándola con (24) conduce a la expresión:

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\theta} - \frac{d\omega}{d\theta} = - \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \varphi}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{p}{2}} \quad (46)$$

Sumando (44) y (46), miembro a miembro, resulta:

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\theta} = - \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi \frac{\operatorname{cotg} p}{\operatorname{sen} p} \quad (47)$$

En el triángulo esférico de la figura se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} p} = - \frac{\operatorname{sen} \bar{\alpha}}{\cos \varphi} \quad (48)$$

Utilizando la fórmula dada en (48) y puesto que hemos admitido que $p = 90 - \varphi'$, se obtiene:

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\theta} = \operatorname{tag} \varphi' \operatorname{sen} \bar{\alpha} \quad (49)$$

Restando las ecuaciones (44) y (46), miembro a miembro, y efectuando operaciones similares a las anteriores:

$$\frac{d\omega}{d\theta} = - \frac{\operatorname{sen} \bar{\alpha}}{\cos \varphi'} \quad (50)$$

Ahora bien, según se sabe, $\frac{d\bar{\alpha}}{da} = \frac{d\bar{\alpha}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{da}$

y resulta:

$$\boxed{\frac{d\bar{\alpha}}{da} = - \frac{\theta}{a} \operatorname{tag} \varphi' \operatorname{sen} \bar{\alpha} = d_{34}} \quad (51)$$

De igual forma:

$$\boxed{\frac{d\omega}{da} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{da} = \frac{\theta}{a} \frac{\operatorname{sen} \bar{\alpha}}{\cos \varphi'} = d_{24}} \quad (52)$$

Sustituyendo en (7) el valor de N dado en (8), y diferenciando con respcto a e^2, donde se han considerado los términos de segundo orden se obtiene:

$$\frac{d\theta}{d(e^2)} = - \frac{\theta}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + $$
$$+ \frac{s\, \theta^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha}{6\, a\, (1 - e^2)^2} \quad (53)$$

Luego:

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{d\omega}{d(e^2)} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{d(e^2)} = \\ = - \frac{\operatorname{sen} \bar{\alpha}}{\cos \varphi'} \left[- \frac{\theta}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{s\, \theta^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha}{6\, a\, (1 - e^2)^2} \right] = d_{35} \\ (54) \end{gathered}}$$

y

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{d\bar{\alpha}}{d(e^2)} = \frac{d\bar{\alpha}}{d\theta} \frac{d\theta}{d(e^2)} = \\ = \operatorname{tag} \varphi' \operatorname{sen} \bar{\alpha} \left[- \frac{\theta}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{s\, \theta^2 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha}{6\, a\, (1 - e^2)^2} \right] = d_{35} \\ (55) \end{gathered}}$$

Por otra parte, $(\varphi - \varphi')\rho$ es con suficiente aproximación la diferencia de latitudes expresada en metros.

Si en el triángulo esférico se supone $\varphi' = 90 - p$, evidentemente $(90 - p - \varphi)N$ es también la expresión de la diferencia latitudes en metros.

De aquí:

$$(\varphi' - \varphi) = \frac{N}{\rho}(90 - p - \varphi) \qquad (56)$$

Si N/ρ varía al mismo tiempo que φ permanece constante, φ' y p varían según (56). Diferenciando resulta que:

$$d\varphi' = -\frac{N}{\rho}dp + (90 - p + \varphi)\, d\left[\frac{N}{\rho}\right] \qquad (57)$$

Para nuestro triángulo esférico se tienen las siguientes relaciones (primera y segunda fórmulas de Bessel):

$$\cos p = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta - \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \cos\alpha \qquad (58)$$

$$-\operatorname{sen} p \cos\overline{\alpha} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \cos\theta \cos\varphi \cos\alpha \qquad (59)$$

Diferenciando (58) y manteniendo constante φ y α se obtiene:

$$-\operatorname{sen} p\, dp = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta\, d\theta -$$

$$-\cos\varphi \cos\theta \cos\alpha\, d\theta = \operatorname{sen} p \cos\overline{\alpha}\, d\theta \qquad (60)$$

Luego:

$$dp = -\cos\overline{\alpha}\, d\theta \qquad (61)$$

$$\frac{N}{\rho} = \frac{\left[1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\right]^{3/2}}{(1 - e^2)(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}} \qquad (62)$$

y diferenciando obtenemos:

$$\frac{d\left[\frac{N}{\rho}\right]}{d[e^2]} = \frac{1}{1 - e^2}\left[1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi - \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\right] = \qquad (63)$$

$$= \frac{1}{4(1 - e^2)}\left[1 + 2\operatorname{sen}^2\varphi + 3\cos(\varphi + \varphi')\right]$$

Por lo tanto:

$$d\varphi' = -\frac{N}{\rho}\frac{\theta}{a}\cos\overline{\alpha}\, da -$$

$$-\frac{N}{\rho}\frac{\theta}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\varphi \cos\overline{\alpha}}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\varphi} d[e^2] + \qquad (64)$$

$$+\frac{90 - p - \varphi}{4(1 - e^2)}\left[1 + 2\operatorname{sen}^2\varphi + 3\cos(\varphi + \varphi')\, d[e^2]\right]$$

De esta última expresión se deduce finalmente que los coeficientes que nos faltaban son:

$$\boxed{d_{14} = -\frac{N}{\rho}\frac{\theta}{a}\cos\overline{\alpha}} \qquad (63)$$

$$d_{15} = -\frac{N}{\rho}\frac{\theta}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\varphi \cos\overline{\alpha}}{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi} +$$

$$+\frac{90 - p - \varphi}{4(1 - e^2)^2}\left[1 + 2\operatorname{sen}^2\varphi + 3\cos(\varphi + \varphi')\right]$$

es decir:

$$\boxed{\begin{aligned} d_{15} &= -\frac{N}{\rho}\frac{\theta}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\varphi \cos\overline{\alpha}}{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi} + \\ &+ \frac{\rho}{N}\frac{\varphi' - \varphi}{4(1 - e^2)^2}\left[1 + 2\operatorname{sen}^2\varphi + 3\cos(\varphi + \varphi')\right] \\ &\qquad (66) \end{aligned}}$$

De esta forma se deducen los coefícieintes d_{ij}, según lo hizo Hayford en 1909, partiendo de las expresiones (3), (4), (5), (6), (7), (8). Evidentemente, estas fórmulas se pueden cambiar por otras, pues las últimas son aproximadas, según se sabe.

Una vez obtenidas los d_{ij} la obtención de los coeficientes de las ecuaciones (1) es inmediata. En la ecuación (1-a) aparece el factor $-\varphi'$, lo que nos indica que:

$$k_1 = -d_{11}$$
$$l_1 = -d_{12} = 0$$
$$m_1 = -d_{13}$$
$$n_1 = -\frac{100}{\text{sen } 1''} d_{14} \qquad (67)$$
$$o_1 = -\frac{1}{10000 \text{ sen } 1''} d_{15}$$

Donde en las fórmulas que dan n_1 y o_1 se divide por sen 1'' para pasar los radianes a grados.

En la ecuación (1-b) aparece el factor $-\lambda'$ cos φ'; por lo tanto, podemos escribir:

$$k_2 = -\cos \varphi' \, d_{21}$$
$$l_2 = -\cos \varphi' \, d_{22}$$
$$m_2 = -\cos \varphi' \, d_{23}$$
$$n_2 = -\frac{100}{\text{sen } 1''} \cos \varphi' \, d_{24} \qquad (68)$$
$$o_2 = -\frac{\cos \varphi'}{10000 \text{ sen } 1''} d_{25}$$

En la ecuación (1-c) aparece el factor $-\overline{\alpha}$ cotg φ', luego:

$$k_3 = -\text{cotg } \varphi' \, d_{31}$$
$$l_3 = -\text{cotg } \varphi' \, d_{32} = 0$$
$$m_3 = -\text{cotg } \varphi' \, d_{33}$$
$$n_3 = -\frac{100}{\text{sen } 1''} \text{cotg } \varphi' \, d_{34}$$
$$o_3 = -\frac{\text{cotg } \varphi'}{10000 \text{ sen } 1''} d_{35}$$

Con lo que se completa el apartado relativo a la obtención de los coeficientes de las ecuaciones de observación (1).

3. CALCULO PRACTICO

Para calcular dichos coeficientes vamos a partir de los siguientes datos: coordenadas geodésicas del punto de estación considerado (φ', λ') y las coordenadas astronómicas o geodésicas del punto fundamental (φ, λ). El problema inverso del cálculo de una triangulación nos da a partir de estos datos los acimutes α y el recíproco $\overline{\alpha}$, así como la distancia entre los dos puntos s, o bien el ángulo θ correspondiente a la distancia s por medio de la fórmula (7). Se calculan a continuación el radio de curvatura ρ por (6) en el punto $(\varphi+\varphi')/2$ y la normal por (8) en el punto φ. El valor de Q se calcula por la expresión (10). Por último, $\omega = \lambda'-\lambda$ es también conocido, así como los parámetros que definen el elipsoide a y e^2. Por lo tanto, a partir de los datos (φ, λ) y (φ', λ') anteriores los coeficientes de las ecuaciones de Hayford son perfectamente calculables.

Hayford utiliza 765 determinaciones astronómicas en vértices de primer orden de la red americana; abarca 18° 50' en latitud y 57° 7' en longitud, calculadas sobre el elipsoide de Clarke (1866), con $\alpha = 1/295$ y a = 6378.206. La corrección topográfica se extendió 4.126 kilómetros alrededor de cada estación astronómica. Adopta la hipótesis isostática de Pratt tomando cinco profundidades de compensación diferentes: Solución B, extrema rigidez, profundidad infinitia. Solución E, profundidad, 162,2 kilómetros. Solución H, profundidad, 120,9 kilómetros. Solución G, profundidad, 113,7 kilómetros, y solución A, profundidad, 0 kilómetros. A partir de los valores obtenidos para las soluciones E, F y G llega a estimar con profundidad de compensación más probable la de 122,2 kilómetros, y los valores que entonces resultan para los parámetros del elipsoide son:

semieje = 6378.388 $\pm$ 18 m.

aplanamiento = 1/297 $\pm$ 0.5

Mencionemos, por último, otros resultados más recientes obtenidos por el método de las áreas:

	a	$1/\alpha$
Heiskanen (1929)	6378.400	297.20
Jeffreys (1948)	6378.099	297.10
Krassovsky (1948)	6378.245	298.30
Hough (1959)	6378.270	297.00
Oxford (1959)	6378.201	297.65
U. A. I. (1964)	6378.160	298.25

El último elipsoide es el recomendado por la Unión Astronómica Internacional en su Asamblea general de 1964 en Hamburgo. El valor del aplanamiento se obtuvo como resultado de las observaciones de satélites artificiales. En 1967 fue adoptado por la Unión Geodésica Internacional.

BIBLIOGRAFIA

HAYFORD: «Figure of the earth and isostasy from measurements in the United States». U. S. Coast and Geodetic Survey. Washington, 1909.

HAYFORD: «Suplementary investigation in 1909 of the earth and isostasy». U. S. Coast and Geodetic Survey. Washington, 1910.

INGLADA, V.: «Las observaciones gravimétricas». Talle res del I. G. C. Madrid, 1923.

TARDI, P., et LACLAVERE, G.: «Traité de Géodesie». Gau thier-Villars. París, 1954.

TORROJA, J. M.: «La Geodesia en la era del espacio». Real Academia de Ciencias. Madrid, 1969.

SUMMARY

The areas method, which has been extensively used by Hayford in the determination of the reference ellipsoid, is presented. The coefficients of the observation equations are deduced for the application of the minimum squares method, and there is a summary of the results obtained by this method.

RÉSUMÉ

La méthode des aires, largement utilisée par Hayford pour la détermination de l'ellipsoïde de référence, est exposée. Les coefficients des équations d'observation pour l'application de la méthode de minimums carrés sont déduits, et il est donné un résumé des résultats obtenus par application de ladite méthode.