



Universidad de Oviedo  
*Universidá d'Uviéu*  
*University of Oviedo*

UNIVERSIDAD DE OVIEDO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

HACES DE LUZ HELICOIDALES

*Autor:* ANDRÉS RODRÍGUEZ BARRO

*Tutor:* María Vélez Fraga

13 de julio de 2020

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Momento angular y vórtices ópticos</b>	<b>5</b>
<b>3. Desarrollo de funciones de onda de la luz</b>	<b>10</b>
3.1. Estudio de haces gaussianos . . . . .	10
3.2. Desarrollo de la ecuación de ondas para haces gaussianos . . . . .	14
3.3. Desarrollo de la ecuación de ondas para haces más genéricos en coordenadas cartesianas . . . . .	17
3.4. Desarrollo de la ecuación de ondas para haces más genéricos en coordenadas cilíndricas . . . . .	21
<b>4. Interferencia ondas</b>	<b>25</b>
4.1. Cálculo de interferencias para haces gaussianos . . . . .	25
4.1.1. Descripción del experimento virtual . . . . .	25
4.1.2. Interferencia de una onda gaussiana con una onda plana . . . . .	26
4.1.3. Interferencia de una onda gaussiana con una onda plana inclinada . . . . .	32
4.1.4. Interferencia de una onda gaussiana con una onda plana variando $z$ . . . . .	37
4.2. Cálculo de interferencias para ondas de Hermite . . . . .	39
4.2.1. Interferencia de una onda plana con una onda de Hermite para distintos valores de $L$ . . . . .	40
4.2.2. Interferencia entre una onda plana y una onda de Hermite para distintos órdenes del polinomio . . . . .	42

4.2.3.	Interferencia entre una onda plana y una onda de Hermite para distintos valores del ángulo de inclinación . . . . .	43
4.3.	Cálculo de interferencias para ondas de Laguerre . . . . .	45
4.3.1.	Interferencia de una onda plana con una onda de Laguerre para distintos valores de L . . . . .	46
4.3.2.	Interferencia entre una onda plana y una onda de Laguerre para distintos órdenes del polinomio . . . . .	49
4.3.3.	Interferencia entre una onda plana y una onda de Laguerre para distintos valores del ángulo de inclinación . . . . .	50
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>6.</b>	<b>Anexos</b>	<b>55</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La luz tiene unas propiedades físicas que han sido estudiadas y determinadas a lo largo de la historia. *John Henry Pointing* se dio cuenta que la luz posee un momento angular propio, de valor  $\pm\hbar$  para un fotón, que se acabaría conociendo como momento angular de espín del fotón. Sin embargo, menos conocido es el hecho de que ciertos haces de luz poseen momento angular. En 1992, se encontró que la luz tiene una dependencia azimutal con el **momento angular orbital** mediante  $e^{i\ell\theta}$  [1]. Este hecho origina que los haces de luz puedan ser helicoidales, lo cual es una característica más que relaciona las propiedades macroscópicas de la luz con efectos cuánticos. Este momento angular orbital puede ser de mucho mayor valor que el momento angular de espín.

Se estructurará en tres partes diferenciadas. En primer lugar introduciremos la noción de **momento angular orbital de la luz** asociada a los **haces helicoidales**, y cómo esto deriva en el estudio de los conocidos como **vórtices ópticos**. En segundo lugar realizaremos un desarrollo de los haces gaussianos, asociados a la aproximación paraxial. Desarrollaremos la ecuación de ondas para obtener las condiciones que cumplen dichos haces, y posteriormente ampliaremos el estudio a funciones de onda más genéricas, de donde se obtendrán haces dependientes de los polinomios de Hermite y de Laguerre, conocidos como **haces de Hermite-Gauss** y **haces de Laguerre-Gauss** respectivamente. Veremos sus correspondientes patrones de intensidad y sobre ellos sacaremos información de su simetría.

Por último, calcularemos los patrones de interferencia de los haces de luz ya mencionados en un interferómetro Mach-Zender virtual, viendo las variaciones en función de distintos parámetros tales como la distancia del interferómetro, la inclinación entre los haces, la diferencia de camino óptico o los parámetros de los polinomios involucrados. A partir de esto obtendremos una buena descripción de los haces helicoidales, y de estos los conocidos como vórtices ópticos.

Para este trabajo se utilizarán conocimientos de las asignaturas Óptica, Electromagnetismo, Ecuaciones Diferenciales Aplicadas a la Física I, Ecuaciones Diferenciales Aplicadas a la Física II, Métodos Numéricos Aplicados a la Física y Topología II.

## Capítulo 2

# Momento angular y vórtices ópticos

Una onda electromagnética se propaga con un campo eléctrico y magnético  $\vec{E}, \vec{B}$ . Consideremos en primer lugar la densidad de energía asociada a la onda

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) \quad (2.1)$$

Donde  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío respectivamente. Podemos definir también el vector de Pointing

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

La densidad de momento angular es  $\vec{j} = \vec{r} \times \vec{p}$ , donde  $\vec{p} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ . Con lo cual obtenemos la relación

$$\vec{j} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{r} \times \vec{S} \quad (2.3)$$

El flujo de energía asociado viene dado por la integral de la densidad de energía, que puede ser absorbido por la materia cambiando su temperatura. Su momento lineal  $\vec{p}$  al interactuar produce una presión de radiación, pero sin embargo su momento angular produce rotación. Para una onda plana propagándose en la dirección  $z$ ,  $\vec{p}$  está en  $z$ , con lo cual no se puede originar momento angular ya que no hay componentes  $x, y$ . Sin embargo, en el estudio de haces de luz más complicados, llamados haces de **Laguerre-Gauss**, los cuales son haces helicoi-

dales, aparece el término  $e^{i\ell\theta}$  que da cuenta de una dependencia azimutal de la fase. Este valor  $\ell \in \mathbb{Z}$ , es el indicativo de la presencia de momento angular de la luz.

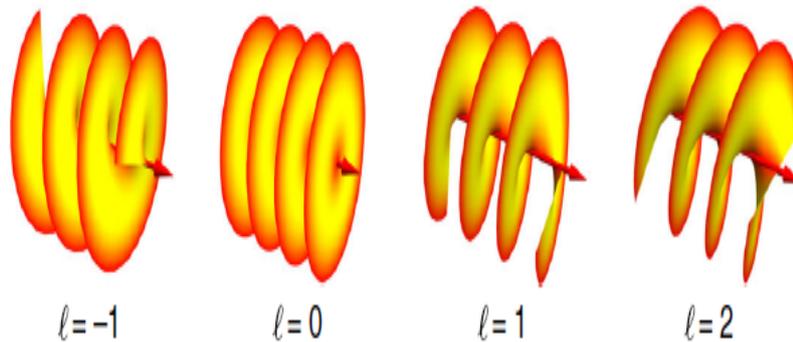


Figura 2.1: Representación de los frentes de onda helicoidales y del cambio de dirección en el vector de Pointing debido al factor azimutal [7]

Por electromagnetismo, sabemos que el vector de Pointing da cuenta de la dirección de propagación de la luz (así como su intensidad), visto como el producto vectorial del campo eléctrico y el campo magnético. No obstante, para haces helicoidales, la componente azimutal dependiente del momento angular, hace que el vector cambie de dirección debido a la Ecuación 2.3, conformando la ya mencionada hélice tal y como se ilustra en la Figura 2.1.

La forma para expresar haces helicoidales es, como ya se ha mencionado, mediante los haces de Laguerre-Gauss. Estos haces son una generalización de haces gaussianos para simetría cilíndrica. Pueden verse como haces de Hermite-Gauss, otra expresión derivada de los haces gaussianos, añadiendo el término  $e^{i\ell\theta}$ . Para obtener haces helicoidales experimentalmente, la manera estándar y más sencilla es partir de un haz gaussiano y utilizar láminas de fase con forma de espiral como la descrita en la Figura 2.2, donde se centra el haz.

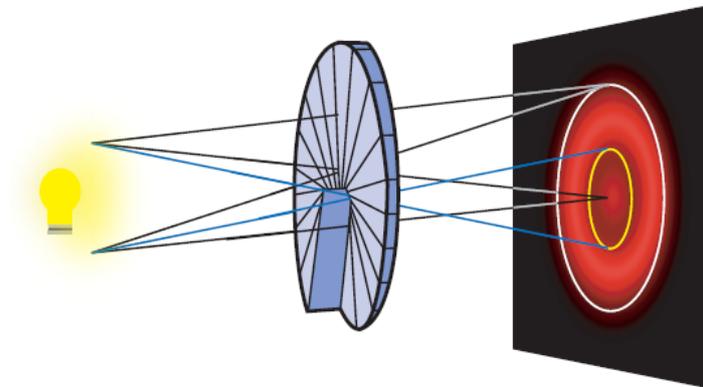


Figura 2.2: Esquema de la formación de haces helicoidales a partir de haces gaussianos de luz por medio de una lámina de fase en forma de espiral [7].

Estas láminas se diseñan de forma que su grosor aumenta progresivamente en forma de espiral para añadir un cambio en la fase. Además puede verse que para un material de índice de refracción  $n$  dicho desfase viene dado por

$$\Delta\phi = \frac{2\pi(n-1)g}{\lambda} \quad (2.4)$$

Donde  $g$  es el grosor de la placa. Para obtener un haz helicoidal se debe producir un cambio completo de la fase ( $\Delta\phi = 2\pi\ell$ ) con lo que el grosor para el que se da esto es para

$$g_h = \frac{\ell\lambda}{n-1} \quad (2.5)$$

De hecho a partir del desarrollo de estos haces, se obtiene que surge una singularidad en la medida de la fase, donde al dar una revolución completa, la fase no es constante. Este fenómeno se conoce como **vórtice óptico**, y está estrechamente relacionado con conceptos como las dislocaciones en sólidos. La primera mención al concepto de vórtice óptico surge en 1989, en el trabajo de Couillet et al. [9] a partir del cual se empiezan a estudiar las singularidades en la fase. En 1992, se probó que los vórtices (idénticamente los haces helicoidales) portan momento angular, como ya se ha mencionado. En 1995 [7], se empezó a estudiar su uso para rotar partículas como pinzas ópticas. En la siguiente década se profundizó en dicho hecho, hasta llegar en 2012 al uso de haces heli-

coidales para comunicaciones usando fibras ópticas complejas. Ya en 2019, se ha conseguido controlar la quiralidad del vórtice mediante microláseres. Además, se puede probar que la superficie generada por dicho vórtice es homeomorfa (existe una identificación topológica) a una banda de Moebius. A lo largo del trabajo veremos que sobre un plano este vórtice genera una dislocación con forma de tenedor, dependiente de las propiedades del haz. La propiedad más importante relacionada con el vórtice viene dada por

$$\ell = \frac{1}{2\pi} \int_C \nabla \Phi(r) dr \quad (2.6)$$

Donde  $\ell$  es la carga topológica asociada al defecto,  $C$  es un entorno de este, y  $\Phi(r)$  es la función de distribución de fase. Otra manera de medir este valor es a través de las franjas de fase constante. Dado que aparece la singularidad, recorrer un circuito cerrado entorno a esta hace que el número de franjas atravesadas no coincida en ambas direcciones, con lo que contando el número de franjas podemos obtener la discontinuidad de la fase.



Figura 2.3: *Representación de una banda de Moebius, estructura topológica más simple que no mantiene la orientación en tres dimensiones [7].*

La importancia del estudio de estos haces de luz radica principalmente en dos ramas:

- *Teórica*: Comprender mejor la naturaleza de la luz y sus propiedades, extendiendo nuestra concepción de vórtices ópticos.
- *Experimental*: Desarrollo de pinzas ópticas para micromanipulación y formación de sistemas complejos de comunicaciones, haciendo uso de fibras ópticas para las que podemos controlar la rotación de sus partículas.

Como ya se ha mencionado, la presencia de momento angular en la materia debe producir rotación al interactuar con partículas que absorben luz, con lo

que para probar los efectos de la acción de haces helicoidales, se ha realizado un experimento en el que se obtiene el torque [2]. Consiste en tomar un disco (del que se puede calcular su momento de inercia) suspendido de un hilo de algodón de momento recuperador despreciable y en el vacío (para que pueda despreciarse la fricción). Cuando a dicho disco se le hace interaccionar con un haz helicoidal, por ser portador de momento angular, empieza a rotar. Por ejemplo, en el experimento ilustrado en la Figura 2.4, con un disco de  $1.5\text{mm}$  de diámetro para una potencia de  $25\text{W}$  se produce una aceleración angular del orden de  $10^{-4} \text{ }^\circ/\text{s}^2$ , y depende del valor de  $\ell$ .

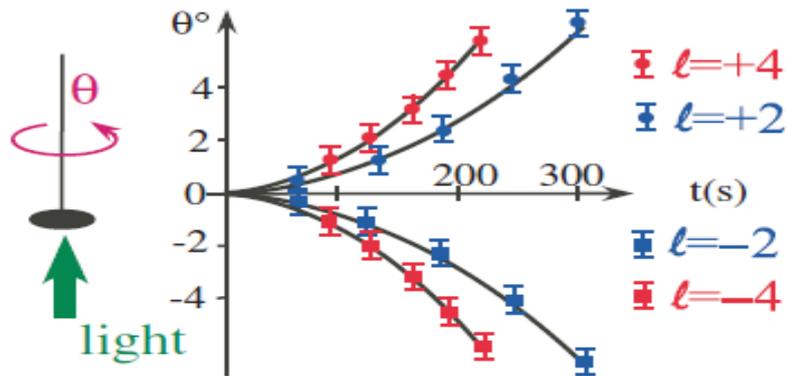


Figura 2.4: Esquema de la prueba experimental de la existencia de momento angular en la luz [2].

# Capítulo 3

## Desarrollo de funciones de onda de la luz

### 3.1. Estudio de haces gaussianos

A lo largo de los últimos años, los láseres han sido una herramienta básica en desarrollo de ciencia y tecnología. Para hacer estudios de espectroscopía, debemos conocer profundamente las propiedades de los haces de luz que componen dichos láseres, teniendo en común todos ellos que se encuentran en longitudes de onda próximas, formando los conocidos como **haces monocromáticos**, que verdaderamente no tienen una única longitud de onda, sino que son composición de varias. Además se busca formar un haz fino, de tal modo que la energía se restringe a la dirección transversa a la de propagación del láser.

En los estudios más básicos en los que se analiza la propagación de luz, se suele tratar con funciones de onda lo más sencillas posibles, ondas planas. Una expresión genérica viene dada por

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad (3.1)$$

Con  $A$  la amplitud de la onda,  $\vec{k}$  vector de onda,  $\vec{r}$  el vector que marca la dirección de propagación y  $\omega$  su frecuencia angular. Incluso, por convenio, se suele escoger la dirección de propagación en un eje fijo, por ejemplo el eje  $z$ . De

esta manera la función de ondas pasa a tomar la expresión simplificada

$$\psi(\vec{r}) = Ae^{i(\vec{k}z - \omega t)} \quad (3.2)$$

No obstante, en la realidad nos encontramos con que las ondas no son puramente ondas planas, que surgen como solución de la ecuación de ondas a todo el espacio en coordenadas cartesianas, sino que hay ondas esféricas, que aparecen como solución de la ecuación en coordenadas esféricas. Concretamente, trataremos las llamadas **funciones de onda gaussianas**, o **haces gaussianos**.

Esta noción surge debido a que aunque los haces tengan una dirección preferente de propagación, estos se expanden conforme avanzan. Por tanto, para expresar dicho efecto, consideraremos una función de onda que tenga en cuenta que

- 1) la amplitud de la onda es variable según su propagación.
- 2) existe un decaimiento en la intensidad en la dirección transversa a la propagación.

De esta manera, tomaremos una función de onda espacial de la forma

$$E(x, y, z) = u(x, y, z) \cdot e^{-i(kz - \omega t)} \quad (3.3)$$

Donde  $u(x, y, z)$  es una función de amplitud que modula la propagación de la onda (tanto en intensidad como en dirección). Además, tenemos en cuenta la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial z^2} \right) \quad (3.4)$$

Donde  $v$  es la velocidad de propagación de la onda en el medio, la cual cumple que  $v = \frac{\omega}{k}$ .

Ahora, introducimos la expresión de 3.3 en 3.4:

$$-\omega^2 u(x, y, z) e^{-i(kz - \omega t)} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} e^{-i(kz - \omega t)} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} e^{-i(kz - \omega t)} \right) + v^2 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} e^{-i(kz - \omega t)} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} e^{-i(kz - \omega t)} \right) \quad (3.5)$$

Simplificando, llegamos a

$$-k^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = -k^2 u \quad (3.6)$$

Llegando finalmente a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

Ecuación de ondas no dependiente del tiempo.

Surge la necesidad de emplear frentes de onda esféricos, ya que las superficies de fase constante y amplitud constante no coinciden, motivo por el cual hablamos de haces gaussianos. A raíz de esto podemos explicar la aproximación **paraxial**, la cual nos dice que los rayos de luz forman ángulos pequeños respecto del eje óptico (de la dirección de propagación). Es decir, buscamos que la desviación que aparece en la figura sea pequeña. Por tanto, podemos utilizar la siguiente aproximación:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \leq \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|; \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|; \left| 2k \frac{\partial u}{\partial z} \right| \right\} \quad (3.8)$$

De forma que la ecuación de ondas pasa a ser

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

La Figura 3.1 muestra explícitamente las condiciones de la aproximación.

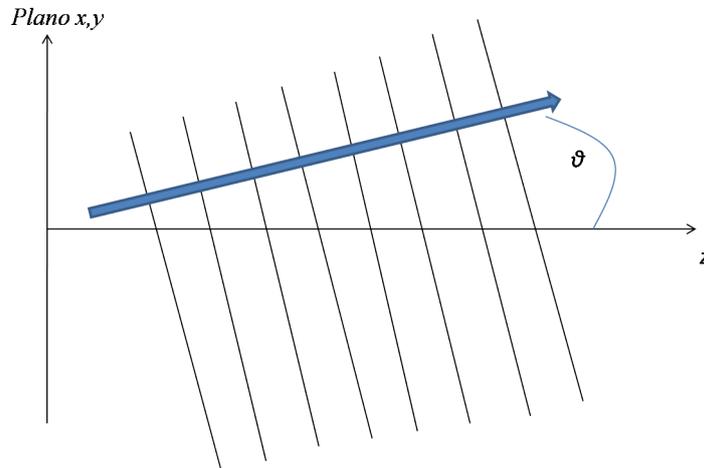


Figura 3.1: Esquema de la aproximación paraxial. Se representa un corte de una superficie del plano  $x, y$  en función de  $z$ , viendo como son las superficies de misma fase (líneas que atraviesan el haz). El ángulo  $\theta$  representa la inclinación del centro del haz respecto del eje  $z$ . La asunción de la aproximación es que dicho ángulo sea lo suficientemente pequeño. Para nuestro estudio esto es razonable ya que el rango en el que se trabaja es de haces no muy dispersivos con respecto a su eje de propagación.

Como resultado, obtendremos unos frentes de onda como los descritos en la Figura 3.2.

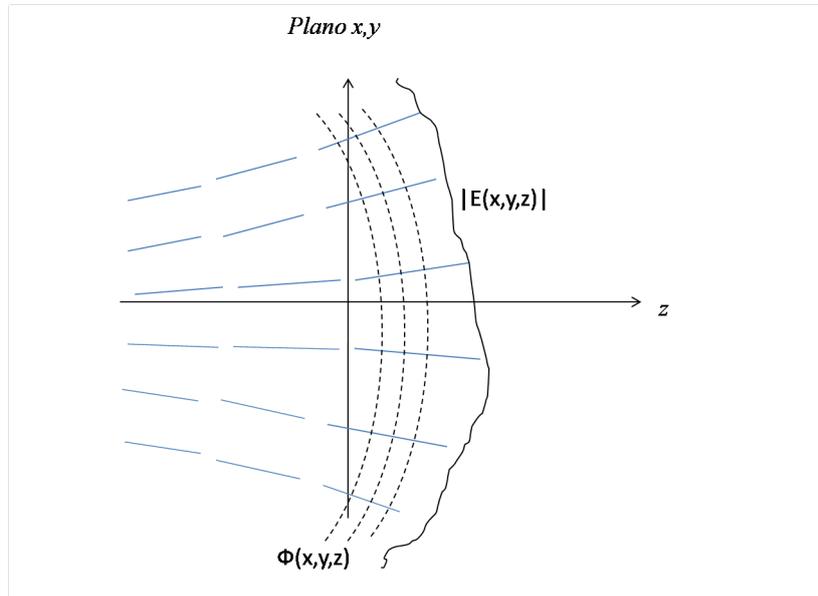


Figura 3.2: Esquema de la propagación del haz, representado como un corte de una superficie del plano  $x, y$  en función de  $z$ . Observamos como debido a la expansión del haz las superficies de fase constante  $\Phi(x, y, z)$  son distintas de las superficies de amplitud constante  $|E(x, y, z)|$ . Esto motiva el estudio de haces de luz como frentes de onda esféricos.

### 3.2. Desarrollo de la ecuación de ondas para haces gaussianos

Consideraremos una onda descrita según la Ecuación 3.3, donde la ecuación que rige la propagación de dicha onda es 3.9.

En nuestro estudio tomamos funciones de onda gaussianas como función prueba, las cuales vienen representadas de forma genérica como:

$$u(x, y, z) = A(z)e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2q(z)}} \quad (3.10)$$

Donde  $A(z)$  es la amplitud de dicha onda, y la función  $q(z)$  es el *radio de curvatura* del frente de onda esférico. Notar que  $q(z)$  es una función compleja, y que de hecho, por convenio, suele escribirse como una función que cumple la siguiente relación:

$$\frac{1}{q(z)} := \frac{1}{R(z)} - 2ik \frac{1}{\omega(z)^2} \quad (3.11)$$

De donde  $R(z)$  es el denominado radio de curvatura real del frente de onda esférico, es decir, la parte que decae debido a lo explicado en la Figura 3.2.  $\omega(z)$  es la anchura del haz, es decir, el rango de anchura en el que la intensidad del haz es apreciable. Podemos ver lo que representan físicamente ambos valores en la siguiente gráfica, que representa un modo gaussiano de orden bajo.

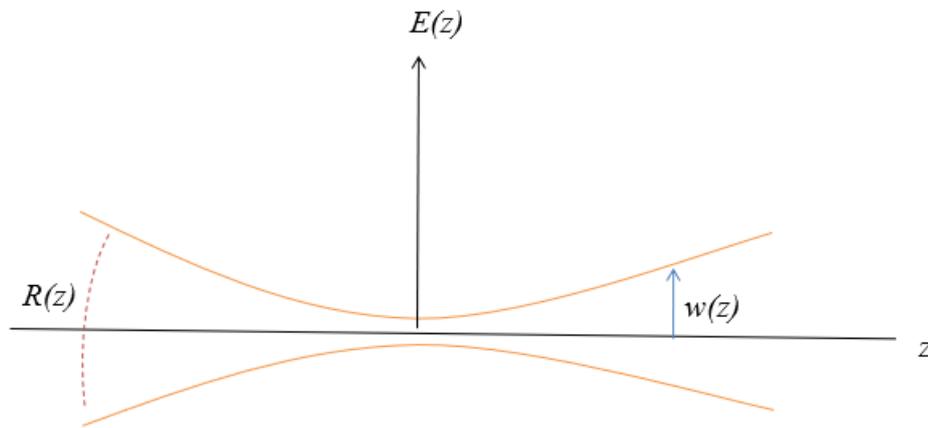


Figura 3.3: Representación física del radio de curvatura. Vemos como  $R(z)$  es el radio de curvatura del haz conforme se expande, así como  $\omega(z)$  expresa el valor que va tomando su anchura. Existe un valor mínimo de  $\omega$ ,  $\omega_0$ , el cual es el valor más pequeño que puede tomar para ser perceptible la intensidad del haz.

Reescribimos por tanto la Ecuación 3.10,

$$u(x, y, z) = A(z) e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2R(z)}} e^{k^2 \frac{x^2+y^2}{\omega(z)^2}} \quad (3.12)$$

Con lo cual tenemos separada la parte de amplitud que varía (función de  $\omega(z)$ ) y la parte de la fase que decae según  $R(z)$ .

Dicho esto, procedemos a obtener las expresiones de dichas funciones, es de-

cir, las características de la función de onda gaussiana que satisfacen la ecuación de ondas en aproximación paraxial (Ec 3.9), para lo cual obtenemos por separado:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -A(z) \left( \frac{ikx}{q(z)} \right) e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2q(z)}} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A(z) e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2q(z)}} \left[ \left( \frac{k^2 x^2}{q(z)^2} \right) + \frac{ik}{q(z)} \right] \quad (3.14)$$

Y el cálculo en la variable  $y$  es análogo, de forma que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -A(z) e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2q(z)}} \left[ \left( \frac{k^2(x^2+y^2)}{q(z)^2} \right) + \frac{2ik}{q(z)} \right] \quad (3.15)$$

Por otro lado

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A(z) \left( q'(z) \frac{ik(x^2+y^2)}{2q(z)^2} \right) e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2q(z)}} + \frac{\partial A(z)}{\partial z} e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2q(z)}} \quad (3.16)$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas 3.9 las expresiones, obtenemos:

$$\frac{A'(z)}{A(z)} + ik(x^2+y^2) \frac{q'(z)}{2q(z)^2} = ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)^2} - \frac{1}{q(z)} \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

Igualando parte real e imaginaria, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{dq(z)}{dz} = 1 \quad (3.19)$$

$$\frac{dA(z)}{dz} = \frac{A(z)}{q(z)} \quad (3.20)$$

De la ecuación 3.19 obtenemos que  $q(z) = q_0 + z - z_0$ . Esta separación de constantes se toma por convenio para separar parte real e imaginaria, cuestión que se relaciona con la Ec 3.11.

Sustituyendo este valor de  $q(z)$  en 3.20, obtenemos la siguiente relación:

$$A(z) = \frac{A_0 \cdot q_0}{q(z)} \quad (3.21)$$

La cual podemos sustituir en la Ec 3.12, obteniendo

$$u(x, y, z) = \frac{A_0 \cdot q_0}{q(z)} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)}} \quad (3.22)$$

Es decir, comprobamos que la función de onda prueba de tipo gaussiano, 3.12, satisface la ecuación de ondas 3.9.

### 3.3. Desarrollo de la ecuación de ondas para haces más genéricos en coordenadas cartesianas

Una vez hecho esto, procedemos a hacer lo mismo para funciones de onda más genéricas que la anterior. Para ello, supondremos que la función de onda puede expresarse como producto de funciones de variables separadas, es decir

$$u_{nm}(x, y, z) = u_n(x, z)u_m(y, z) \quad (3.23)$$

De forma que operamos en la ecuación de ondas para cada función por separado. La función de prueba que usaremos es

$$u_n(x, z) = A(q(z))h_n\left(\frac{x}{p(z)}\right) e^{-ik \frac{x^2}{2q(z)}} \quad (3.24)$$

Introducimos 3.24 en la Ecuación 3.9, y buscamos qué condiciones debe satisfacer para ser solución.

$$0 = h_n''\left(\frac{x}{p(z)}\right) - h_n'\left(\frac{x}{p(z)}\right) \left[2ikp(z) \left(\frac{xp'(z)}{p(z)} - \frac{x}{q(z)}\right)\right] + \quad (3.25)$$

$$+ h_n \left[ -\frac{ikp(z)^2}{q(z)} - \frac{k^2 x^2 p(z)^2}{q(z)^2} - 2ikp(z)^2 q'(z) \frac{A'(q(z))}{A(q(z))} + k^2 x^2 \frac{q'(z)p(z)^2}{q(z)^2} \right] \quad (3.26)$$

Usando la relación que ya dedujimos,  $q'(z) = 1$  (3.19) podemos simplificar la ecuación por lo cual

$$h_n'' \left( \frac{x}{p(z)} \right) - 2ik \left[ \frac{p(z)}{q(z)} - p'(z) \right] x h_n' \left( \frac{x}{p(z)} \right) - \quad (3.27)$$

$$- \frac{ikp(z)^2}{q(z)} \left( 1 + \frac{2q(z)}{A(q(z))} \frac{dA(q(z))}{dq(z)} \right) h_n \left( \frac{x}{p(z)} \right) = 0 \quad (3.28)$$

Ahora bien, si prestamos atención a la forma de la ecuación, vemos que poniendo las condiciones adecuadas sobre los coeficientes, podemos identificarla con la ecuación de Hermite, ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución son los polinomios de Hermite, la cual viene dada por

$$H_n'' - 2 \frac{x}{p} H_n' + 2n H_n = 0 \quad (3.29)$$

En concreto, para identificar la ecuación 3.28 obtenida a partir de la ecuación de ondas paraxial con la ecuación de Hermite 3.29, debemos imponer:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p}{q} + \frac{i}{kp} \quad (3.30)$$

$$\frac{2q}{A} \frac{dA}{dq} = \frac{2inkp^2}{q} - 1 \quad (3.31)$$

Es decir, obtenemos una familia de funciones que satisfacen la ecuación. Tendremos en cuenta que, para identificarlo con la forma usual de expresar los polinomios de Hermite y obtener una función que relacione lo visto en la Ec 3.11, asumimos que  $q(z)$  puede expresarse en términos de  $R(z)$  y  $\omega(z)$  como se vio en la ecuación 3.11, y aproximamos como

$$\frac{1}{p(z)} := \frac{\sqrt{2}}{\omega(z)}$$

donde lo que se ha hecho es la aproximación de que el radio de curvatura  $R(z)$  es grande frente a  $\omega(z)$ . Por tanto, la función de cada variable por separado que se obtiene (recordemos simetría en  $x$  e  $y$ ), es:

$$u_n(x, z) = h_n \left( \frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right) e^{-i \frac{kx^2}{2R(z)} - \frac{x^2}{\omega(z)^2}} \quad (3.32)$$

Es decir, si tomamos la Ecuación 3.23, normalizando y teniendo en cuenta las relaciones anteriores podemos llegar a:

$$u_{mn}(x, y, z) = \frac{N}{w(z)} H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right) e^{-i \frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)} - \frac{x^2+y^2}{\omega(z)^2}} \quad (3.33)$$

Con N constante de normalización. Esta función de onda describe los haces de **Hermite-Gauss**, que denotaremos simplemente como haces de Hermite. Estos son los haces de luz que surgen de tomar una generalización de los haces de Gauss en coordenadas cartesianas.

Los polinomios de Hermite de orden más bajo, que serán los que utilizaremos más adelante en cálculos, son los siguientes:

$$H_0(\nu) = 1 \quad (3.34)$$

$$H_1(\nu) = 2\nu \quad (3.35)$$

$$H_2(\nu) = 4\nu^2 - 2 \quad (3.36)$$

Donde  $\nu$  es la variable de la que dependerá el polinomio de Hermite.

En este caso, dado que no es una ecuación sencilla de interpretar, procederemos a estudiar por separado los haces de Hermite, para ver cuál es su forma y el patrón de intensidad que dejan por separado. Para ello, tomaremos distintos valores de  $H_n(x)$  y de  $H_m(y)$ , viendo la estructura para los órdenes más bajos y sus combinaciones en la Ecuación 3.33. En la Figura 3.4 observaremos que la intensidad se divide, generando formas simétricas. Esto ocurre debido a los nodos del polinomio de Hermite, los cuales sabemos que son del mismo número que su orden.

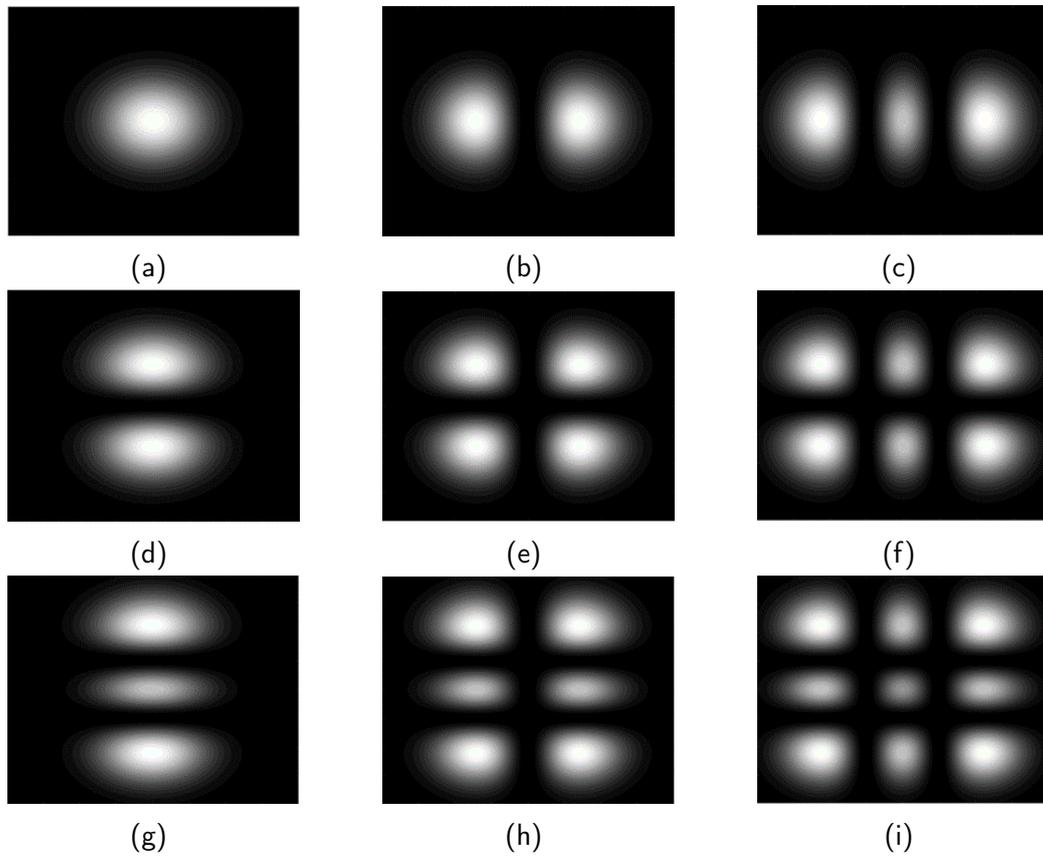


Figura 3.4: Representación de los patrones de intensidad de haces de Hermite para (a)  $H_{00}$ , (b)  $H_{01}$ , (c)  $H_{02}$ , (d)  $H_{10}$ , (e)  $H_{11}$ , (f)  $H_{12}$ , (g)  $H_{20}$ , (h)  $H_{21}$ , (i)  $H_{22}$ .

En la Figura 3.4, observamos las diferencias entre los distintos tipos de ondas de Hermite de orden bajo. Conforme aumentamos el orden del haz en la dirección  $y$ , apreciamos cómo el patrón de intensidad se "divide", en el eje de las  $y$  para cada valor de  $m$ . Lo mismo ocurre en la dirección  $x$  conforme aumentamos  $m$ . En el siguiente capítulo veremos que debemos tener cuidado con la dirección en la que aumentamos el orden, en relación a cómo esto afecta a otros parámetros de la interferencia. Aun así, es evidente que las soluciones son totalmente simétricas, verificando lo esperado. Es relevante destacar que las figuras de intensidad no nos aportan información sobre cómo cambia la **fase** de la función de onda. Para poder estudiar dichas características de los haces, necesitamos realizar cálculos de **interferencia**, los cuales serán tratados en el capítulo siguiente.

### 3.4. Desarrollo de la ecuación de ondas para haces más genéricos en coordenadas cilíndricas

Partiendo de la Ecuación 3.23, buscaremos un desarrollo análogo pero para coordenadas cilíndricas, donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.37)$$

$$\theta = \arctan(y/x) \quad (3.38)$$

$$z = z \quad (3.39)$$

Si se hace un desarrollo semejante al de la sección anterior, explicado en [8], llegamos a

$$u_{p\ell}(r, \theta, z) = \frac{N}{\omega(z)} \left( \frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)} \right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left( \frac{2r^2}{\omega(z)^2} \right) e^{-i\frac{k(r^2)}{2R(z)}} e^{-\frac{r^2}{\omega(z)^2}} e^{i\ell\theta} \quad (3.40)$$

Y en este caso surgen en la ecuación como factor los polinomios de Laguerre, donde  $N$  es una constante de normalización y  $p, \ell$  los parámetros del orden de los polinomios. A estos haces  $u_{p,\ell}$  se les denomina haces de **Laguerre-Gauss**, y por comodidad nos referiremos a ellos como haces de Laguerre en lo posterior. La diferencia más importante que aparece con respecto a los haces de Hermite es el término de fase  $e^{i\ell\theta}$ . La importancia de este término quedará reflejada en el estudio de las interferencias de los haces, ya que será la causa de la aparición de los haces helicoidales.

Al igual que hicimos con los haces de Hermite, veamos cuál es su forma y características en un patrón de intensidad. Los polinomios de orden más bajo vienen dados por

$$L_0^{|\ell|}(\nu) = 1 \quad (3.41)$$

$$L_1^{|\ell|}(\nu) = 1 + |\ell| - \nu \quad (3.42)$$

$$L_2^{|\ell|}(\nu) = \frac{1}{2} [\nu^2 - 2\nu(|\ell| + 2) + (|\ell| + 1)(|\ell| + 2)] \quad (3.43)$$

Con  $\nu$  variable de dependencia. En este apartado estudiaremos la influencia de los parámetros  $p$  y  $\ell$ . En primer lugar, tomaremos unos valores cualesquiera para ver la forma de los haces, esto se ilustra en la Figura 3.5

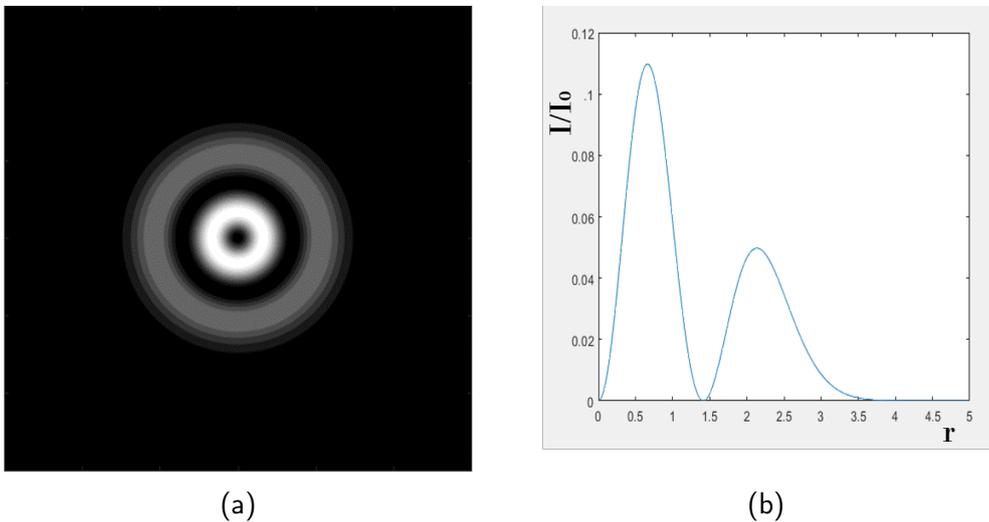


Figura 3.5: Simulación del patrón de intensidad de onda de Laguerre para  $p = 1, \ell = 1$ . La imagen (a) muestra cómo varía el patrón en el plano  $(x,y)$ . El panel está centrado en  $(0,0)$  y tiene un tamaño de  $12z_R \cdot 12z_R$ . La imagen (b) representa la variación de intensidad frente a  $r$  con un tamaño  $8z_R$ .

En la Figura 3.5a observamos cómo la forma del patrón es circular, formando anillos. En la Figura 3.5b vemos la variación de la intensidad en función del radio de los anillos. A continuación, veremos la forma del patrón para más valores de  $p, \ell$ .

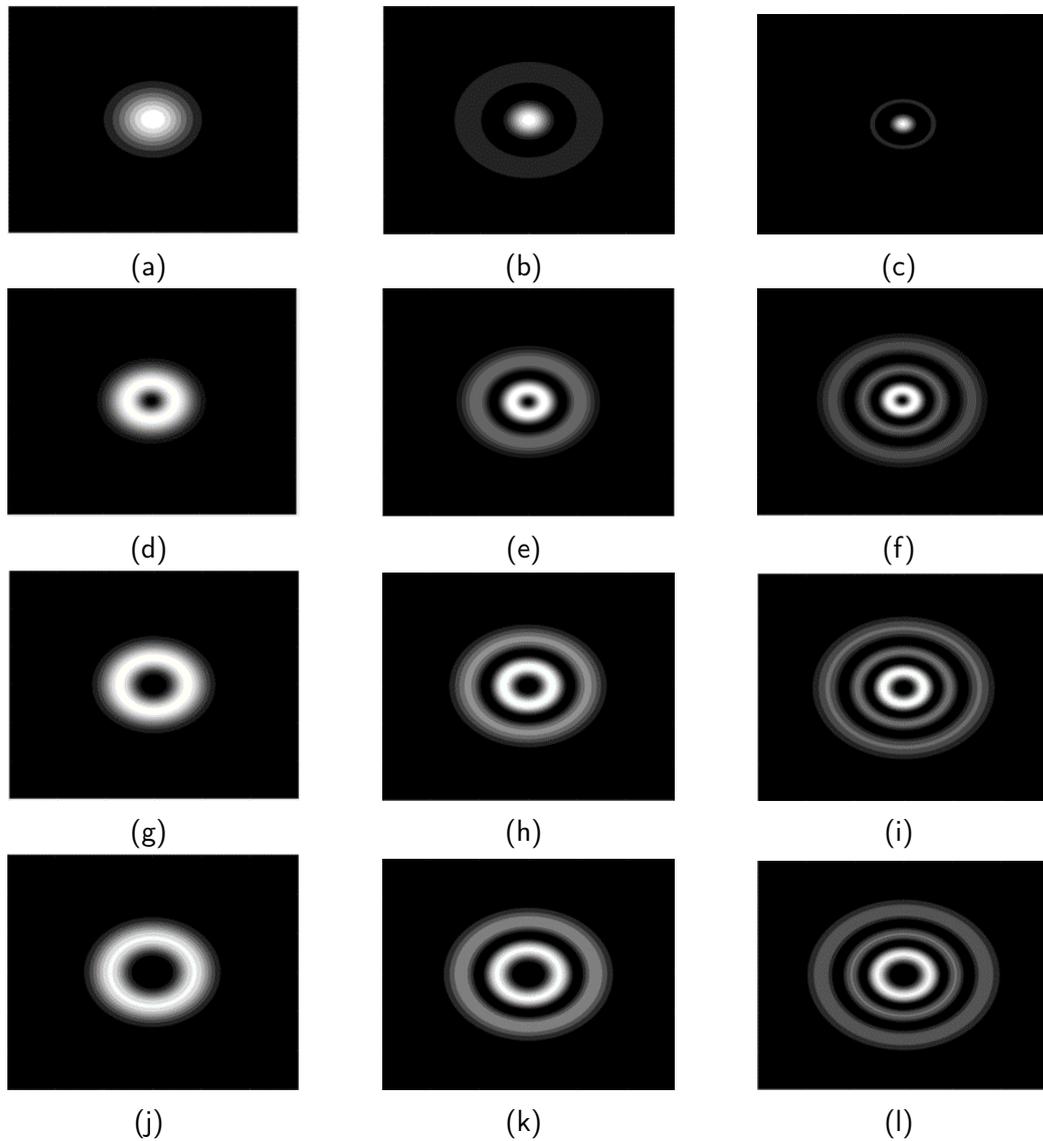


Figura 3.6: Representación de los patrones de intensidad de haces de Laguerre para (a)  $L_{00}$ , (b)  $L_{10}$ , (c)  $L_{20}$ , (d)  $L_{01}$ , (e)  $L_{11}$ , (f)  $L_{21}$ , (g)  $L_{02}$ , (h)  $L_{12}$ , (i)  $L_{22}$ , (j)  $L_{03}$ , (k)  $L_{13}$ , (l)  $L_{23}$ . El panel está centrado en  $(0,0)$  y tiene un tamaño de  $12z_R \cdot 12z_R$ .

De la Figura 3.6 deducimos que el cambio de  $p$  varía el número de anillos, mientras que la variación de  $\ell$  afecta al tamaño de dichos anillos. Esto corrobora la Ecuación 3.40, ya que sus raíces no nulas surgen de  $L_p^{|\ell|} \left( \frac{2r^2}{\omega(z)^2} \right)$ , y se puede probar que de ellas sólo se obtienen raíces por la parte dependiente de  $p$ .

## Haces de luz helicoidales

---

Nuevamente es importante darse cuenta que el estudio de la forma de la intensidad sólo nos proporciona información sobre la amplitud de las ondas, no sobre su fase. En el siguiente capítulo se probará la influencia de la fase al hacer interferir los haces con una onda plana.

# Capítulo 4

## Interferencia ondas

### 4.1. Cálculo de interferencias para haces gaussianos

#### 4.1.1. Descripción del experimento virtual

El proceso de estudio consistirá en realizar un experimento "virtual". Es decir, mediante simulación utilizando programas de MatLab, buscaremos las condiciones necesarias para obtener interferencias constructivas y destructivas entre los haces de luz, y así poder conocer sus características.

Nuestro interferómetro consistirá en una simulación de un interferómetro Mach-Zehnder [3]. En la figura 4.1 se ilustra la composición simplificada de dicho interferómetro. Centrándonos en el objetivo que tenemos, que es hacer interferir dos haces de luz (bien iguales o bien distintos), la luz parte de nuestra fuente (el láser). Un divisor de haz separa en dos el rayo de luz, hasta llevarlos a sendos espejos orientados a un nuevo divisor de haz, que dirige las señales a dos detectores. La principal ventaja de este interferómetro es que moviendo la posición de los espejos podemos obtener un ángulo de inclinación entre ambos haces. Para tener dos haces de diferente naturaleza, se hace uso de distintos dispositivos (redes de difracción, láminas,...) de forma que se pueden obtener las funciones de onda por separado y hacerlas interferir. El principal parámetro que cambiaremos en el estudio es la **diferencia de camino óptico**, que denotaremos

por L. Cambiando la posición de los brazos del interferómetro seremos capaces de obtener diferentes interferencias en función de la fuente. Otro parámetro interesante que alteraremos será  $\beta$ , la inclinación de los haces ya comentada, y cómo esto altera el patrón de interferencias.

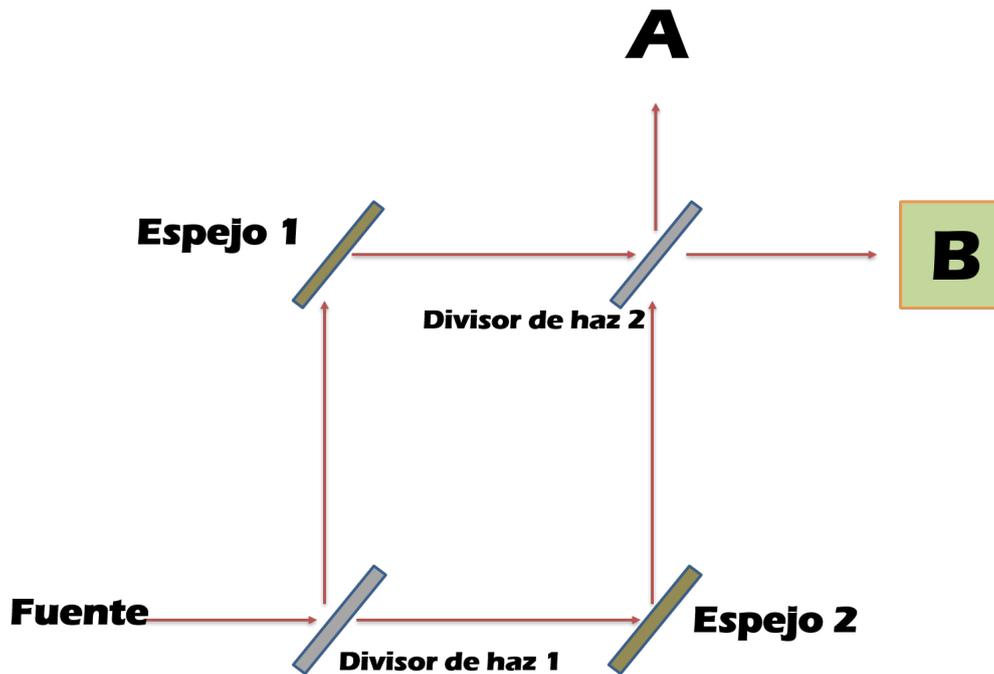


Figura 4.1: Esquema de un interferómetro Mach-Zehnder.

#### 4.1.2. Interferencia de una onda gaussiana con una onda plana

En este apartado buscaremos las condiciones de interferencia constructiva y destructiva entre dos ondas, una onda plana genérica, y una onda gaussiana, descritas respectivamente en 4.1 y 4.2

$$\psi_1(x, y, z) = B e^{ik(z+L)} \quad (4.1)$$

$$\psi_2(x, y, z) = A \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2R(z)}} e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega(z)^2}} \quad (4.2)$$

Donde  $\omega(z)$  es la anchura del haz,  $\omega_0$  el mínimo valor que esta toma,  $R(z)$  el radio de curvatura y  $L$  la diferencia de camino óptico, la cual se puede modular cambiando la separación del brazo del interferómetro.

Sabemos que las expresiones de  $\omega$  y  $R$  vienen dadas por

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad (4.3)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{z_R \lambda}{\pi}} \quad (4.4)$$

$$z_R = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \quad (4.5)$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \quad (4.6)$$

Es decir, tenemos que podemos relacionar el valor del rango de Rayleigh  $z_R$  con  $\omega_0$  mediante la longitud de onda, o equivalentemente el vector de onda  $k = 2\pi/\lambda$ .

Para contextualizar, veamos de qué manera depende  $z_R$  de  $\lambda$  en un caso real. Supuesto que el valor de  $\lambda$  es fijo, debemos buscar un valor de  $z_R$  que haga que la amplitud del haz de onda que estamos tratando no se atenúe demasiado. Tomemos por ejemplo una longitud de onda situada en el rojo ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ), para un valor de anchura  $\omega_0 = 0.5 \text{ mm}$ , sustituyendo en la ecuación 4.5, obtenemos un valor de  $z_R = 1.12 \text{ m}$ .

Para nuestro estudio, tomamos  $z = z_R$ , con lo que  $R(z) = 2z_R$ , y además  $\omega = 2\omega_0$ . Si nos fijamos en la forma de 4.1, tenemos interferencia constructiva en  $(x, y) = (0, 0)$  si colocamos el interferómetro de tal manera que  $L = -z_R$ . Además, si  $A(z) = 2$  y  $B(z) = 1$ , observamos que en el origen ambas ondas tienen la misma amplitud. La amplitud tomada para la onda plana se toma así para que su intensidad sea 1, con lo que tomaremos  $I_{\text{Onda plana}} = I_0$ , valor sobre el que normalizaremos para que los valores de la intensidad en todos los casos sean adimensionales.

El objetivo ahora es identificar dónde surgen las interferencias destructivas. Para ello buscamos que la diferencia de camino óptico entre ambas ondas cumpla:

$$k \frac{x^2 + y^2}{2(R(z))} - k(z + L) = \pi \quad (4.7)$$

Sustituyendo los valores para nuestro caso particular obtenemos

$$x^2 + y^2 = \lambda R(z) = \lambda 2z_R \quad (4.8)$$

Con lo cual, el radio del anillo donde se produce la oscuridad es

$$r_{oscuro} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\lambda 2z_R} \quad (4.9)$$

No obstante, por el hecho de ser  $\psi_2$  una onda gaussiana, tenemos un factor de decaimiento en la intensidad,

$$e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega^2}}$$

el cual hace que

$$|\psi_1 + \psi_2| = \left| e^{-\frac{x^2+y^2}{4\omega_0^2}} - 1 \right| = \left| e^{-\frac{\lambda z_R}{2\frac{\lambda z_R}{\pi}}} - 1 \right| = |e^{-\pi/2} - 1| \quad (4.10)$$

Operando obtenemos que  $I_{min} = |\psi_1 + \psi_2|^2 = 0.63$ .

Si repetimos el proceso para el siguiente anillo oscuro, el cual se obtiene para una diferencia de camino óptico de  $3\pi$ , el resultado es

$$I_{min} = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |e^{-3\pi/2} - 1|^2 = 0.98$$

Lo que observaremos por tanto es que se produce un decaimiento debido a la parte amortiguante de la onda gaussiana, pero cuyo efecto es cada vez menor, tendiendo a tener únicamente la onda plana.

En la Figura 4.2a observamos el máximo en el centro, y cómo aunque la tonalidad se vuelve más clara pasada la primera parte oscura, es de menor intensidad, y posteriormente se vuelve de la misma tonalidad de gris, lo que indica que ya ha alcanzado el valor  $I = 1$ . En la Figura 4.2b vemos cómo varía la intensidad conforme variamos  $x$ , y en la inferior conforme variamos  $y$ . Se observa claramente el efecto descrito anteriormente, en el que la intensidad toma un máximo en cero

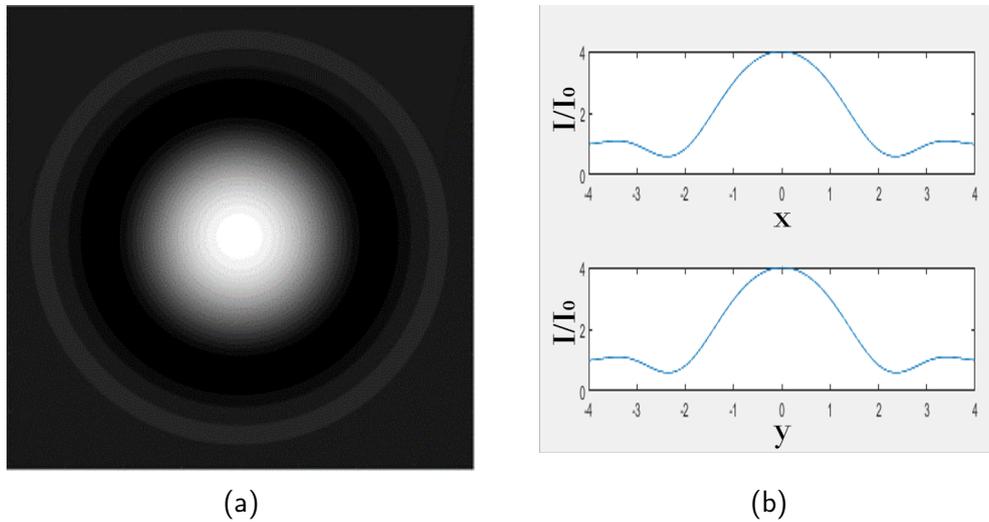


Figura 4.2: Simulación de la interferencia de una onda plana y una onda gaussiana para  $L = -z_R$ . La imagen (a) muestra cómo varía el patrón de interferencias en el plano  $(x,y)$  para  $L = -z_R$ . La escala de grises es proporcional a la intensidad de la luz en cada punto, siendo el blanco más intenso y el negro menos. El panel está centrado en  $(0,0)$  y tiene un tamaño de  $8z_R \cdot 8z_R$ . La imagen (b) representa la variación de intensidad frente a  $x$  (imagen superior) e  $y$  (imagen inferior) con un tamaño  $8z_R$ .

y conforme nos alejamos tiende a uno, ya que la influencia de la onda gaussiana es menor.

Una vez visto esto, resulta interesante ver de qué manera cambia el patrón de interferencias si cambiamos la posición de los espejos del interferómetro, es decir, cambiar  $L$ . A continuación veremos cómo, cambiando el valor de  $L$  entre distintos valores entre  $-z_R$  y  $-z_R + \lambda = -z_R + \frac{2\pi}{k}$ , se aprecia el cambio entre interferencia constructiva y destructiva en el origen, así como de qué manera varía la posición de los anillos oscuros y el valor de la intensidad.

Volviendo a la Ecuación 4.7 para un  $L$  genérico, buscamos obtener el radio de los anillos oscuros empleando la condición de interferencia destructiva, donde  $r^2 = x^2 + y^2$ :

$$\frac{r^2}{2R(z)} = \frac{\pi}{k} + (z + L) \quad (4.11)$$

$$r^2 = \frac{2\pi R}{k} + 2R(z + L) \quad (4.12)$$

Y ahora sustituimos los valores propios de nuestro desarrollo,  $z = z_R, R(z) = 2z_R, L = -z_R + C\frac{\pi}{k}$ , donde  $C \in (0, \dots, 2)$ .

$$r^2 = \frac{4z_R\pi}{k} + 4z_R(z_R - z_R + C\frac{\pi}{k}) = 2\lambda z_R(1 + C) \quad (4.13)$$

Con lo que observaremos el cambio del patrón de interferencias para diferentes valores de  $C$ , es decir, de  $L$ . Es relevante fijarse cómo es el patrón para el caso  $L = -z_R + \pi/k$ , ya que es directamente opuesto al anteriormente visto para  $z = -z_R$ , siendo descrito en la Figura 4.3a

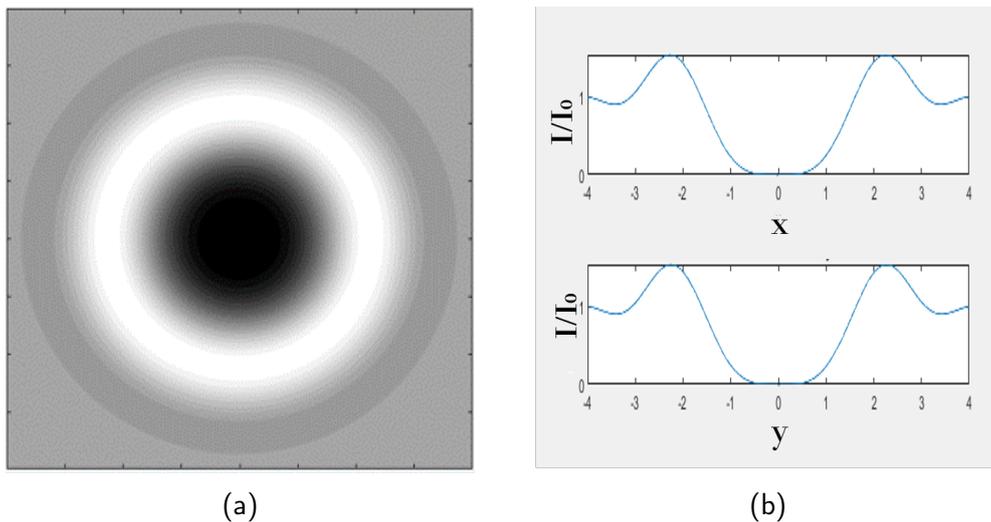


Figura 4.3: Simulación de la interferencia de una onda plana y una onda gaussiana para  $L = -z_R + \pi/k$ . El panel está centrado en  $(0,0)$  y tiene un tamaño de  $8z_R \cdot 8z_R$ . En la imagen (b) vemos cómo varía la intensidad conforme variamos  $x$ , y en la inferior conforme variamos  $y$  con un tamaño  $8z_R$ .

Para la Figura 4.3a, vemos el caso opuesto a la Figura 4.2a, ya que en este caso la interferencia destructiva surge en el origen, el cual es el punto más oscuro de toda la imagen. Conforme nos alejamos, llegamos a alcanzar el máximo, volviendo a decaer para estabilizarse, pero a un valor de intensidad más alto que para el centro. Para la Figura 4.3b se refleja perfectamente cómo esta imagen es directamente opuesta al caso  $L = -z_R$ .

La visión general para varios valores de  $L$  es el que vemos en la Figura 4.4.

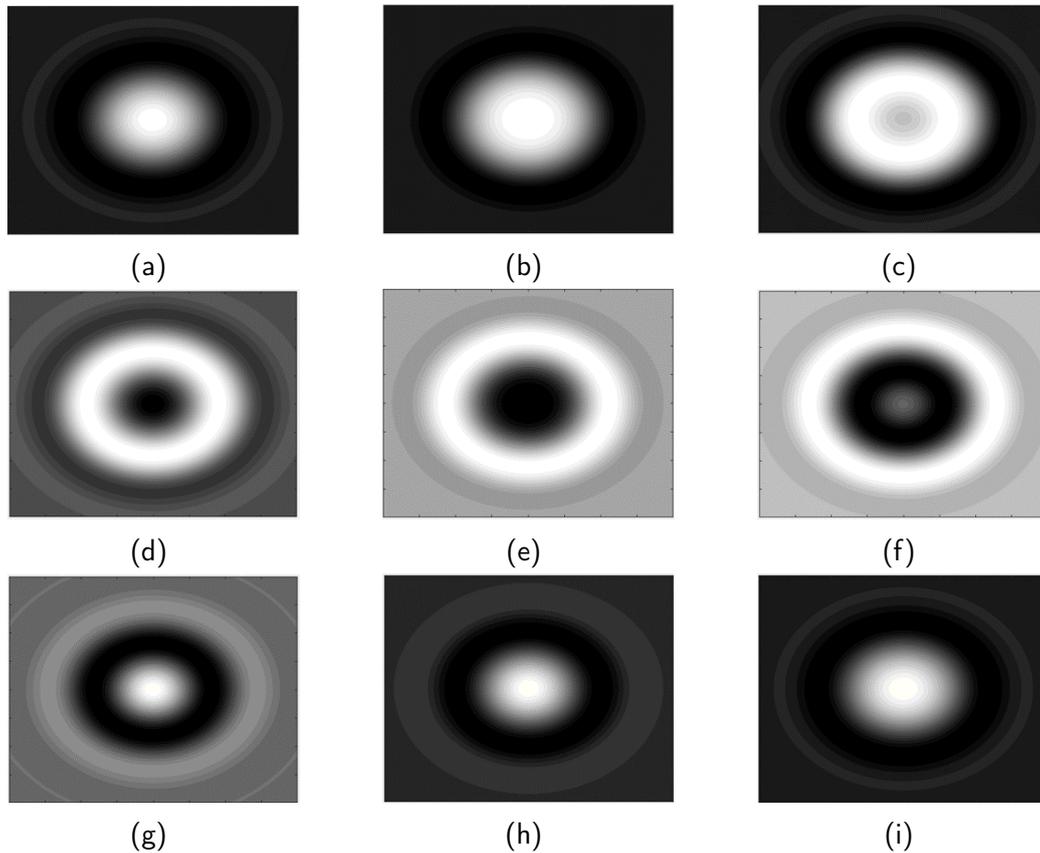


Figura 4.4: Variación del patrón de interferencias entre una onda plana y una gaussiana para distintos valores de  $L$ , donde (a)  $L = -z_R$ , (b)  $L = -z_R + 0.25\pi/k$ , (c)  $L = -z_R + 0.5\pi/k$ , (d)  $L = -z_R + 0.75\pi/k$ , (e)  $L = -z_R + \pi/k$ , (f)  $L = -z_R + 1.25\pi/k$ , (g)  $L = -z_R + 1.5\pi/k$ , (h)  $L = -z_R + 1.75\pi/k$ , (i)  $L = -z_R + 2\pi/k$ . El tamaño del panel es de  $8z_R \cdot 8z_R$

En la Figura 4.4 se observa como el máximo central debido a la interferencia constructiva se va alejando conforme aumentamos el valor de  $L$  formando anillos, tal y como describía la Ecuación 4.13. A partir de  $L = -z_R + \pi/k$  el cambio en el patrón es el inverso al del caso anterior, ya que progresivamente pasamos de tener un mínimo en el origen a recuperar el mismo patrón inicial para  $L = -z_R + 2\pi/k$ .

Podemos ver de hecho explícitamente cómo es la variación de los radios de los anillos en función de  $L$ , y así verificar la Ecuación 4.13. Para ello representamos en el gráfico 4.5 dichos valores (tomando  $r^2$  para buscar dependencia lineal).

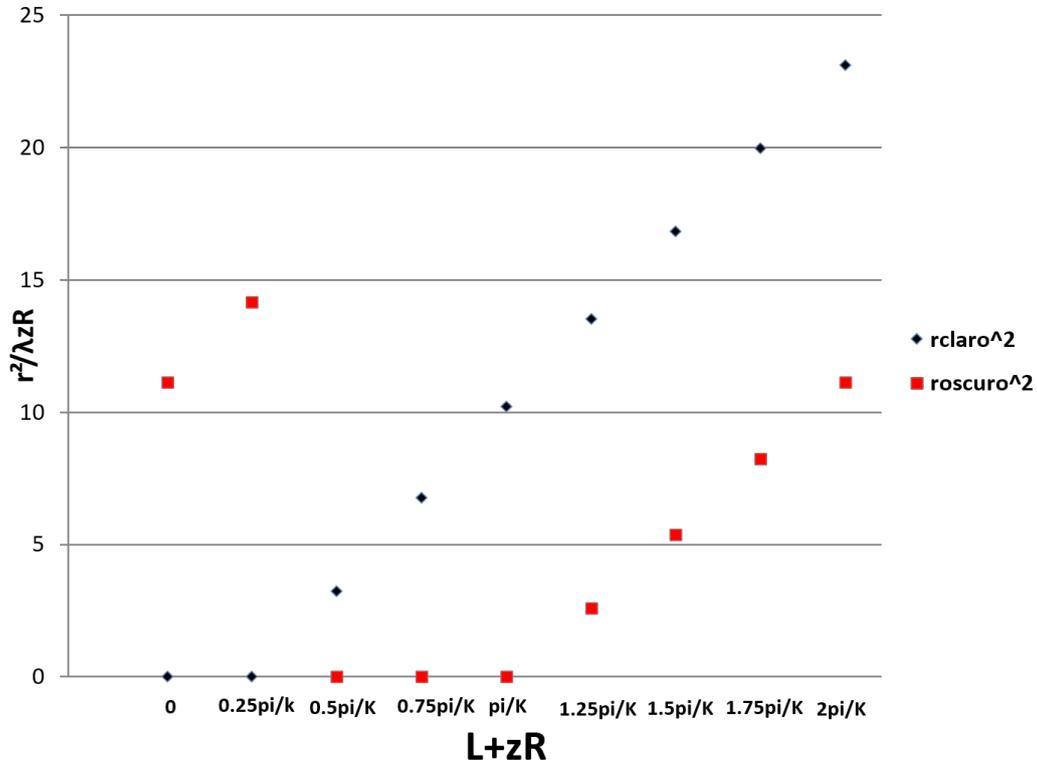


Figura 4.5: Representación gráfica de los valores del cuadrado de los radios de los anillos obtenidos en unidades de  $z/\lambda z_R$  (ver Ecuación 4.13), tanto de máximos ( $r_{claro}$ ) como mínimos ( $r_{oscuro}$ ) frente a los distintos valores de  $L$ .

Se aprecia en la Figura 4.5 perfectamente la dependencia lineal, y los valores de  $L$  donde se originan las interferencias constructivas y destructivas.

### 4.1.3. Interferencia de una onda gaussiana con una onda plana inclinada

La siguiente pregunta que nos haremos es qué ocurrirá si en lugar de tomar una onda plana cuya dirección de propagación coincide con el de la onda gaussiana, hacemos que haya un ángulo de inclinación al que denotaremos por  $\beta$ , entre las direcciones de propagación de ambas ondas. Este caso es más genérico que el anterior.

Dicho esto, tomaremos como onda plana

$$\psi_1(x, y, z) = B e^{ik[(z+L) \cos \beta + x \sin \beta]} \quad (4.14)$$

Donde el vector de propagación pasa a ser uno genérico  $\vec{v} = (\sin \beta, 0, \cos \beta)$  (tomamos arbitrariamente el giro sobre el plano con la dirección  $x$ )

Así pues, repetimos el proceso visto en la sección anterior, donde veremos de qué manera cambian los patrones para ángulos del orden de las centésimas de radián.

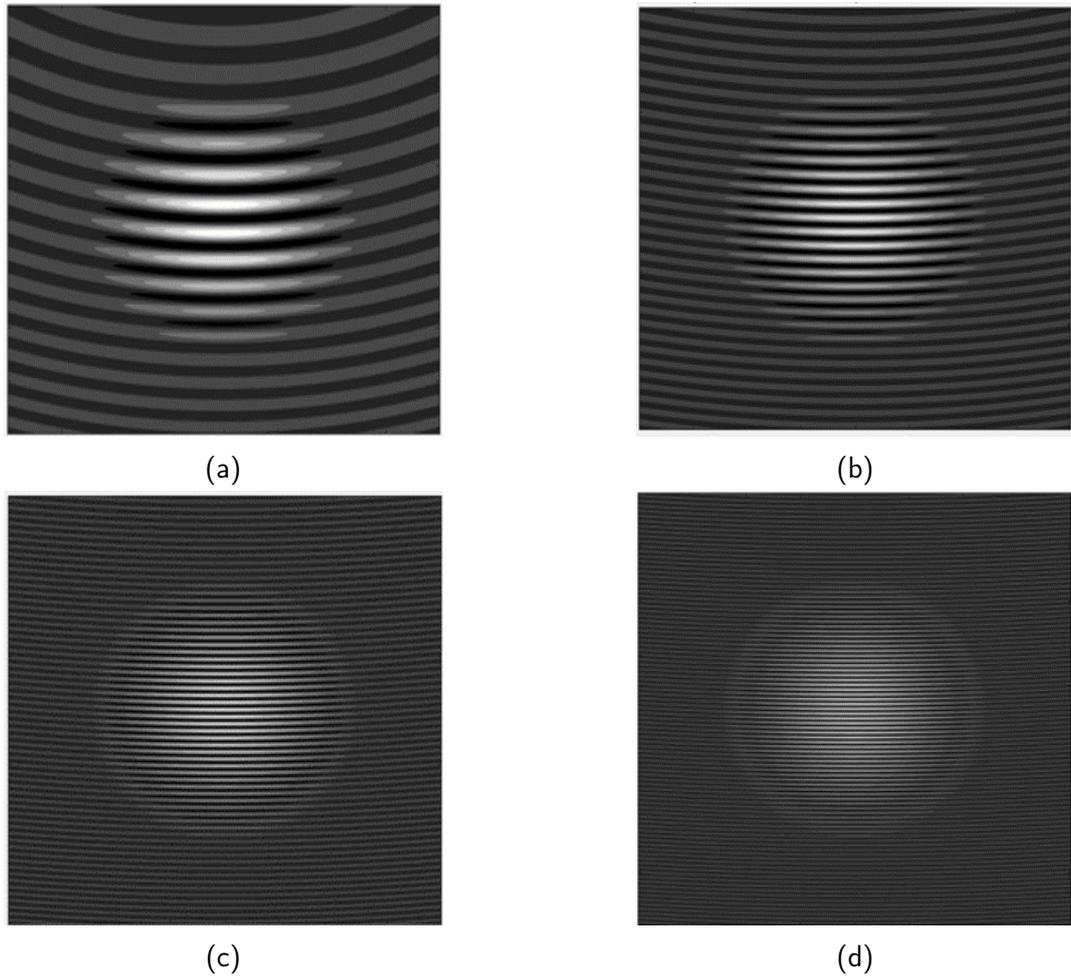
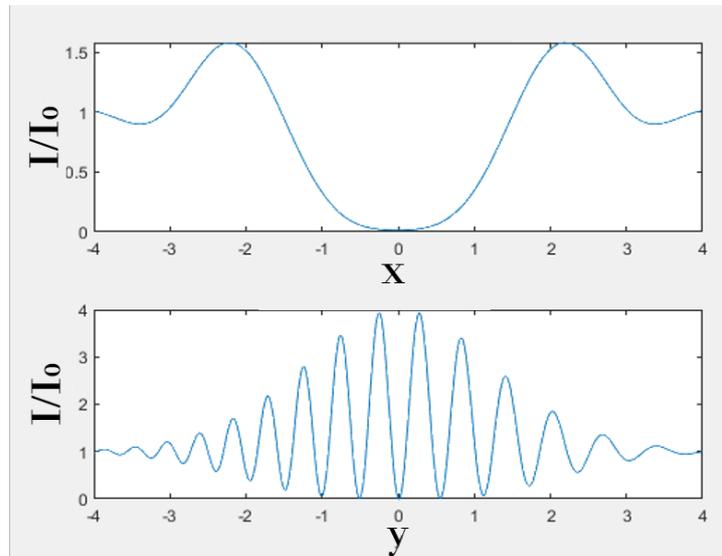


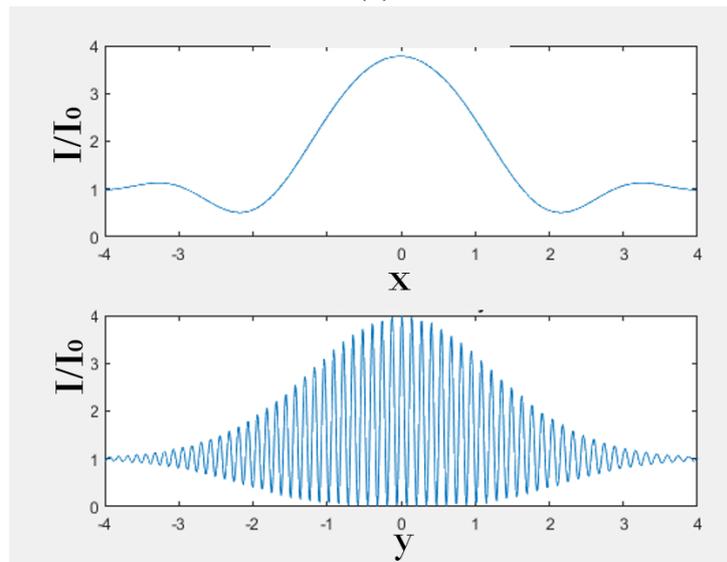
Figura 4.6: Variación del patrón de interferencias entre una onda plana y una gaussiana para distintos valores de  $\beta$ , (a)  $\beta = 0.0019$  radianes (b)  $\beta = 0.0038$  radianes (c)  $\beta = 0.0075$  (d)  $\beta = 0.0113$ . El tamaño del panel es de  $8z_R \cdot 8z_R$

En la Figura 4.6 observamos que a diferencia de en la sección anterior, aparecen unas líneas curvadas respecto al eje  $x$ , y que son más numerosas conforme aumentamos el valor del ángulo. Estas líneas son de fase constante, y su curvatura surge debido a que la fase de la onda gaussiana está cambiando (aquí entra en juego  $\omega(z)$ ). Además observamos cómo en la parte central de los patrones hay una zona más clara (debida a la onda gaussiana), y a partir de cierto radio esta desaparece. Esto ocurre porque la onda gaussiana pierde intensidad progresivamente, al contrario que la onda plana que no decae.

Además, representamos en la Figura 4.7 cómo varía la intensidad frente a  $x$  e  $y$ , en la dirección  $y$  observamos la aparición de un batido.



(a)



(b)

Figura 4.7: Gráficas de la intensidad frente a  $x$  e  $y$  para (a)  $\beta = 0.0019$  radianes (b)  $\beta = 0.0075$  radianes.

En las figuras que representan la intensidad frente a  $y$  apreciamos un batido, que es más pronunciado conforme mayor es el ángulo. Esto se debe a que dado que la propagación está enfocada en los ejes  $x$  y  $z$ , en la dirección  $y$  se produce

un modulado por las líneas de fase constante.

Si nos centramos en el batido que se origina, podemos ver que se respeta

$$k\Delta y \sin \beta = 2\pi \quad (4.15)$$

Donde  $\Delta y$  representa el periodo del batido. Dicho valor lo podemos obtener de la gráfica, y compararlo con el calculado a partir de la Ecuación 4.15. Realizamos una representación gráfica de tanto los valores calculados por simulación como los valores obtenidos directamente al sustituir en la ecuación, y observamos el resultado en la Figura 4.8

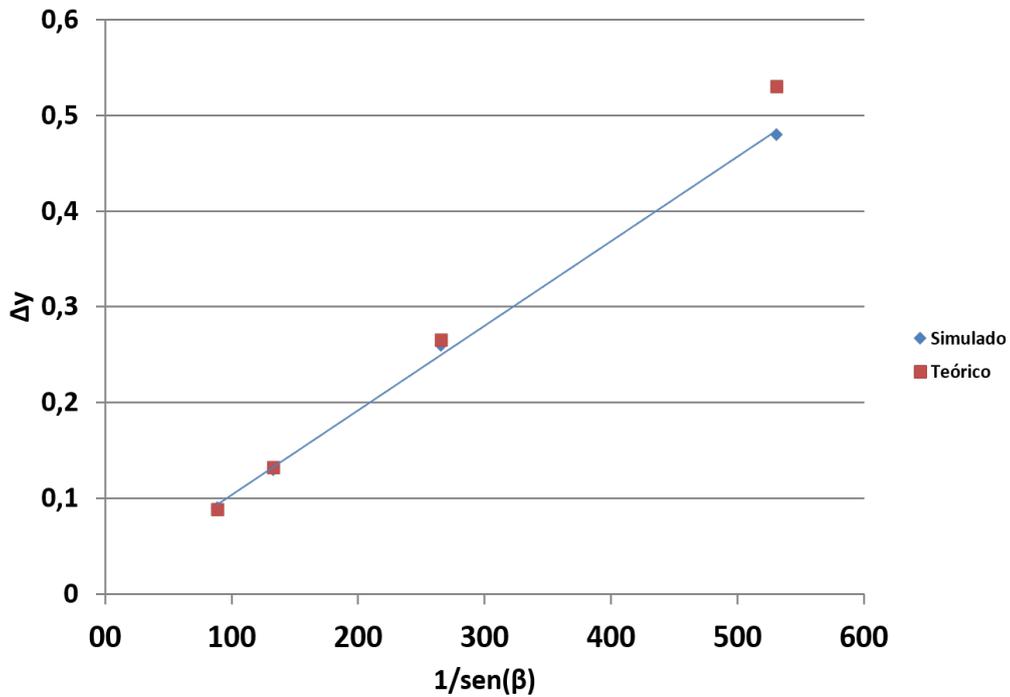


Figura 4.8: Representación gráfica de los valores del periodo frente al inverso del seno del ángulo. Comprobamos que efectivamente siguen una tendencia lineal, reafirmando la relación 4.15

#### 4.1.4. Interferencia de una onda gaussiana con una onda plana variando $z$

Hasta ahora habíamos tomado que  $z = z_R$ , de modo que el siguiente paso será estudiar cómo afecta este parámetro al estudio. Tomaremos una serie de valores de  $z$ , aumentando progresivamente. Tal y como se define el rango de Rayleigh, lo lógico es pensar que cuanto mayor sea  $z$  frente a  $z_R$  se verá como la luz diverge más rápido. Los resultados se verán en las imágenes de la Figura 4.9. Realizamos el cálculo para  $L = -z_R$ .

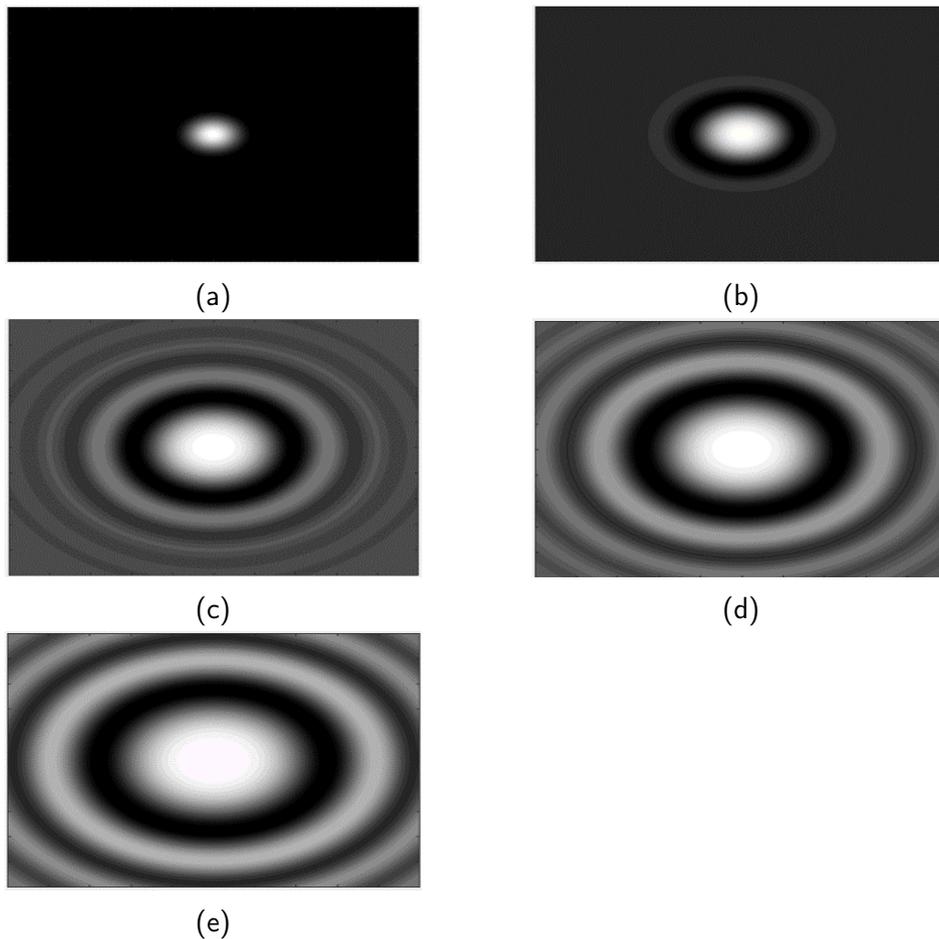


Figura 4.9: Variación del patrón de interferencias entre una onda plana y una gaussiana para distintos valores de  $z$ , donde (a)  $z = z_R$ , (b)  $z = 2.5z_R$ , (c)  $z = 5z_R$ , (d)  $z = 7.5z_R$ , (e)  $z = 10z_R$ . El panel está centrado en  $(0,0)$  y tiene un tamaño de  $20z_R \cdot 20z_R$ .

En la Figura 4.9 vemos cómo al partir de un haz centrado en (a), progresivamente se va aumentando la divergencia, y por tanto aumenta el radio de la región de intensidad apreciable. Es decir, si queremos que nuestros haces sean medidos en un rango en el que no diverjan, operaremos en valores cercanos a  $z_R$ .

Una manera de ver cómo esto ocurre es fijarnos en el experimento del interferómetro de Michelson, interferómetro similar al Mach-Zehnder, pero en el cual la luz recorre más de una vez el mismo camino. Cuando en la asignatura Técnicas Experimentales III se nos propuso este experimento, se hizo el estudio partiendo de que teníamos ondas planas. No obstante, fijándonos en lo que acabamos de ver, realmente lo que ocurre es que tenemos la interferencia de dos ondas gaussianas, pero estamos en un régimen en que  $z \gg z_R$ . La imagen 4.10 es la misma imagen utilizada para los informes de Técnicas Experimentales III, la cual fue tomada a una distancia aproximada de un metro.

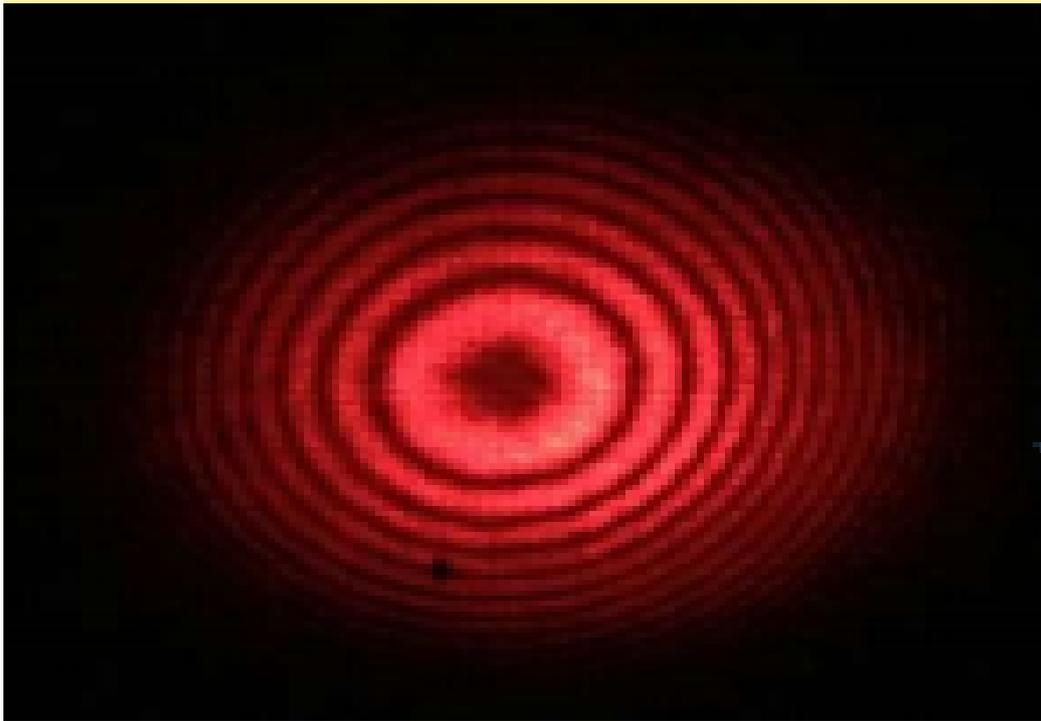


Figura 4.10: *Interferencia originada al hacer interferir dos haces láser en el interferómetro de Michelson.*

## 4.2. Cálculo de interferencias para ondas de Hermite

Tal y como se vio en el capítulo anterior, al resolver la ecuación de ondas paraxial de forma más genérica que con la función prueba gaussiana, surgen los polinomios de Hermite. Dichos polinomios dan forma a la Ecuación 3.33, con lo que tomaremos como función para la interferencia a

$$\psi_2(x, y, z) = H_{mn}(x, y, z) = \frac{N}{w(z)} H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right) e^{-i \frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega(z)^2}} \quad (4.16)$$

La cual haremos interferir, al igual que en el caso anterior con una función de onda plana,

$$\psi_1(x, y, z) = B e^{ik(z+L)} \quad (4.17)$$

Y de la misma manera que para la onda gaussiana, vemos cómo son las condiciones de interferencia destructiva. Estas dependerán del orden del polinomio de Hermite. Sin embargo para el caso más sencillo, tomando el polinomio  $H_{01}$  o  $H_{10}$  (son la misma solución degenerada cambiando sólo la orientación), tendremos que:

$$\left. \begin{aligned} k \frac{x^2 + y^2}{2(R(z))} - k(z + L) &= \pi \text{ si } x > 0 \\ k \frac{x^2 + y^2}{2(R(z))} - k(z + L) + \pi &= \pi \text{ si } x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Donde debemos tener en cuenta que para el polinomio  $H_1(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)})$  para valores de  $x$  negativos podemos considerar que  $x = -|x| = |x|e^{i\pi}$  e introducir dicho valor en la fase. Por tanto con el cambio de signo en  $x$  pasamos de interferencia destructiva a constructiva. El desarrollo se seguiría igual que para los haces gaussianos. Se verá más adelante la consecuencia de este hecho.

### 4.2.1. Interferencia de una onda plana con una onda de Hermite para distintos valores de $L$

Una vez que tenemos clara la forma de las funciones de Hermite (ver capítulo anterior), procederemos a ver cuál es el resultado de la interferencia entre estas y la onda plana. Para ello fijaremos la combinación  $H_{01}$ , y estudiaremos el resultado para un valor de  $L = -z_R$ .

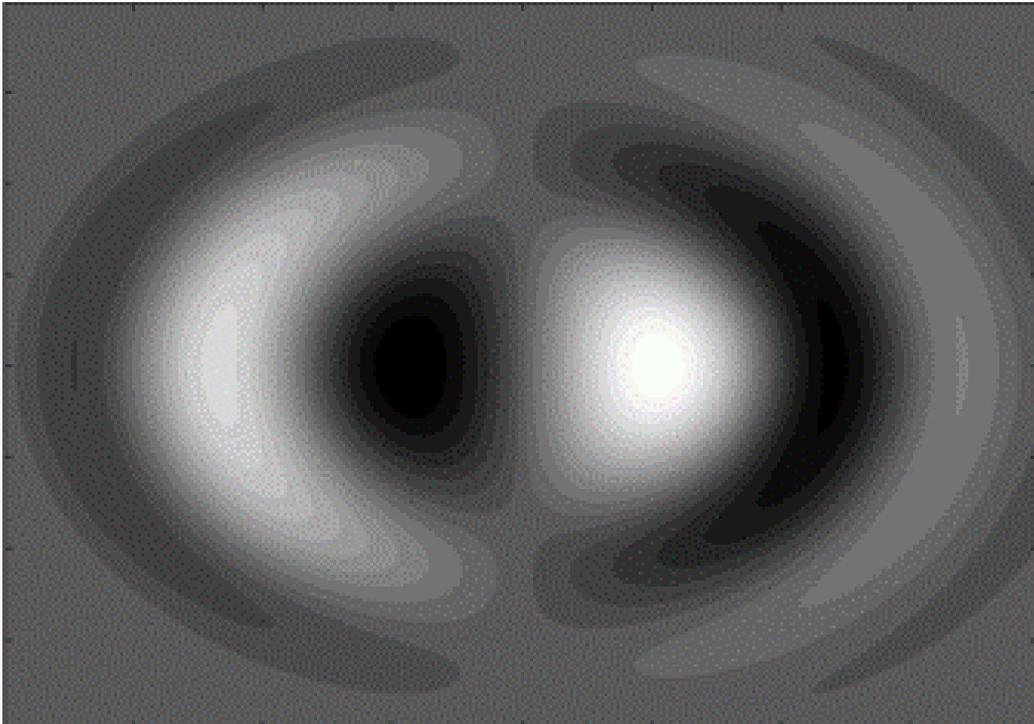


Figura 4.11: *Interferencia originada al hacer interferir un haz de Hermite con una onda plana para  $H_{01}$  y  $L = -z_R$ . El tamaño del panel es de  $8z_R \cdot 8z_R$*

En la Figura 4.11 vemos el efecto de hacer interferir ambas ondas, y el resultado es que surge una mezcla entre los dos patrones simétricos originarios de la Figura 3.4b. Realmente lo que estamos observando es que debido al cambio de signo en la fase de la función de onda, obtenemos una interferencia constructiva en la parte derecha de la imagen, y destructiva en la parte izquierda. Es decir, la diferencia entre esta figura y su hómónima del capítulo anterior 3.4b es que debido al cambio de signo en la onda plana cuando  $x$  pasa de positivo a nega-

tivo (Ecuación 4.18), añadimos una fase de  $\pi$ , lo que produce la interferencia destructiva.

A continuación, y al igual que hicimos con la función de onda gaussiana, veremos cómo afecta el cambio en la diferencia de camino óptico  $L$ .

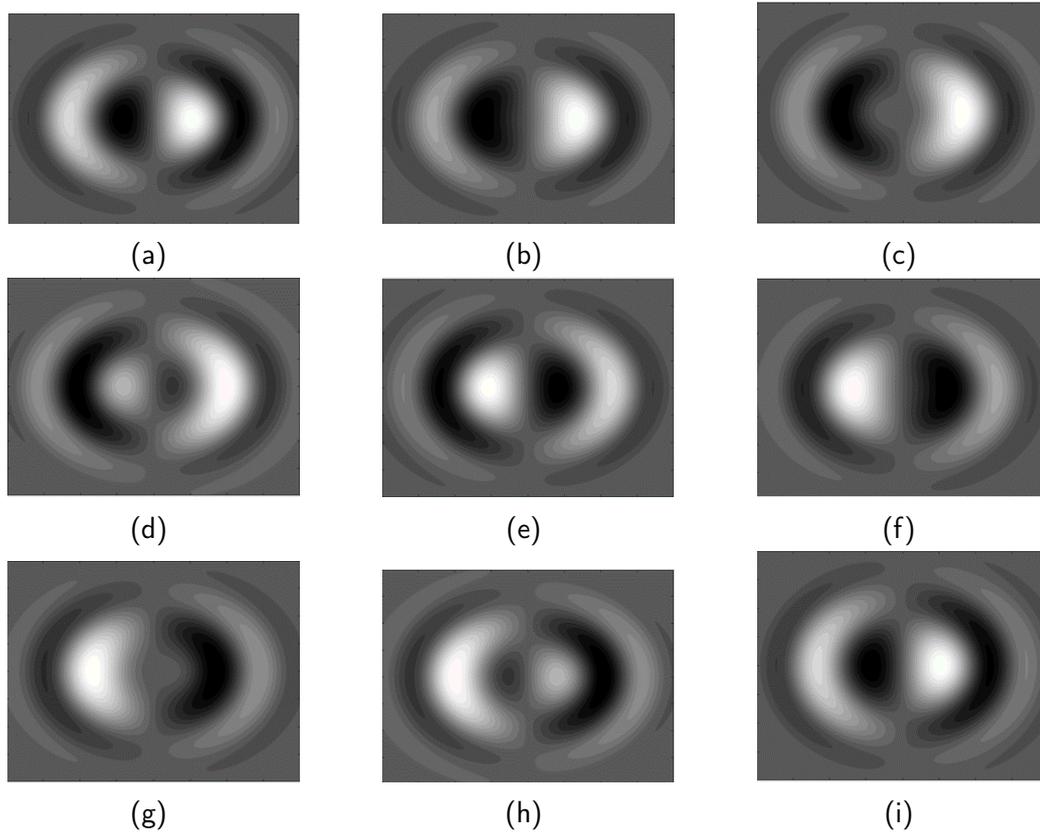


Figura 4.12: Representación de los patrones interferencia de funciones de Hermite con funciones de onda planas para (a)  $L = -z_R$ , (b)  $L = -z_R + 0.25\pi/k$ , (c)  $L = -z_R + 0.5\pi/k$ , (d)  $L = -z_R + 0.75\pi/k$ , (e)  $L = -z_R + \pi/k$ , (f)  $L = -z_R + 1.25\pi/k$ , (g)  $L = -z_R + 1.5\pi/k$ , (h)  $L = -z_R + 1.75\pi/k$ , (i)  $L = -z_R + 2\pi/k$ .

En la Figura 4.12 vemos la transición en los patrones de interferencia conforme aumentamos el valor de  $L$ . El efecto que aparece es que a mayor valor de  $L$ , la separación entre máximos y mínimos (zonas de interferencia constructiva y destructiva) va cambiando, hasta que para  $L = -z_R + \pi/k$  obtenemos la imagen especular de  $L = -z_R$ . A partir de este valor ocurre el proceso opuesto hasta

recuperar la misma imagen para  $L = -z_R + 2\pi/k$ .

#### 4.2.2. Interferencia entre una onda plana y una onda de Hermite para distintos órdenes del polinomio

Lo siguiente que veremos es cómo cambia este patrón si tomamos otros órdenes de polinomios de Hermite. En la Figura 4.13 observamos explícitamente esta variación. Dejamos fijo el valor  $L = -z_R$ .

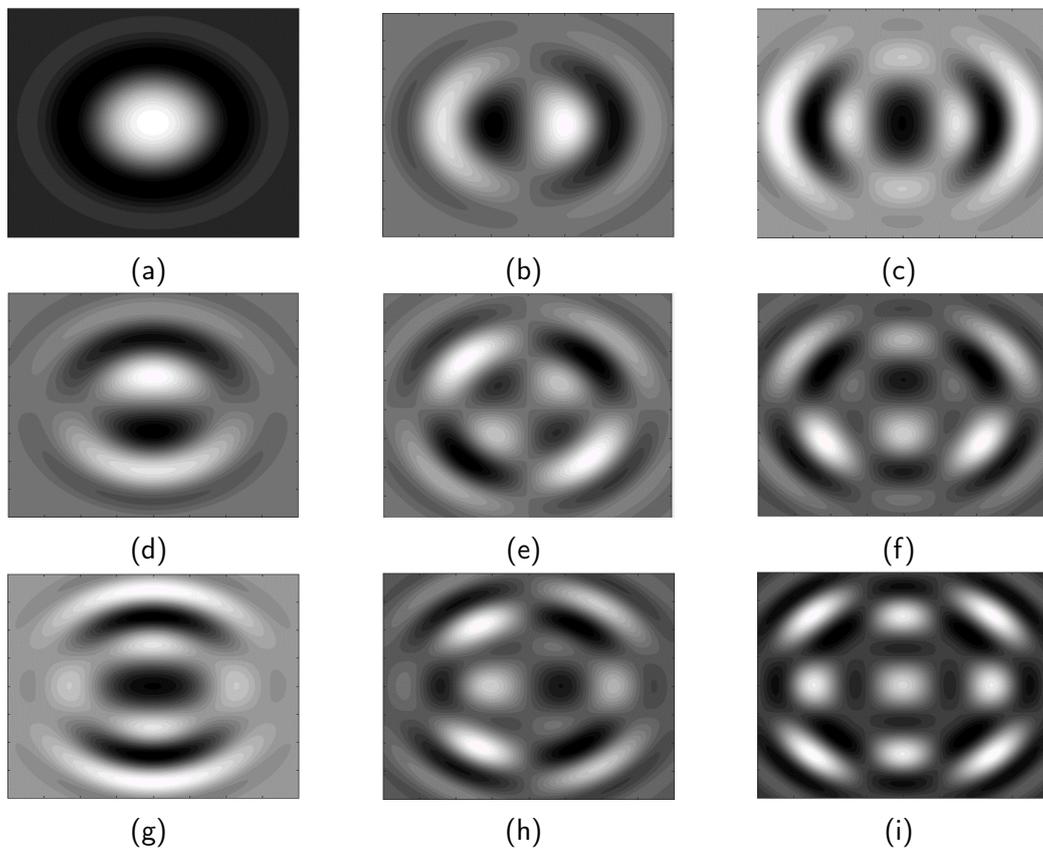


Figura 4.13: Representación de los patrones de interferencias de funciones de onda plana y de funciones de Hermite para (a)  $H_{00}$ , (b)  $H_{01}$ , (c)  $H_{02}$ , (d)  $H_{10}$ , (e)  $H_{11}$ , (f)  $H_{12}$ , (g)  $H_{20}$ , (h)  $H_{21}$ , (i)  $H_{22}$ . El tamaño del panel es de  $8z_R \cdot 8z_R$

Lo que ocurre al aumentar el orden de  $H_{nm}$  es que conforme aparecen más óvalos (mayor valor de  $n$  en la dirección  $x$  y de  $m$  en la dirección  $y$ ) se "parten" tal

y como vimos en la Figura 4.12. En lo consecuente será conveniente tratar órdenes bajos para mayor claridad en el visionado.

Fijándonos en el paso de  $H_{01}$  a  $H_{02}$ , como ya vimos aparece un nodo más. Pero también vimos que el cambio de signo en  $x$  produce el cambio entre interferencia constructiva y destructiva. Por tanto, lo que estamos viendo es que las zonas de interferencia constructiva y destructiva de los tres óvalos se mezclan, duplicando el patrón visto para  $H_{01}$ , debido al comportamiento cuadrático de la ecuación de Hermite.

En la otra dirección, vemos como la imagen para  $H_{10}$  es un giro de 90 grados respecto de  $H_{01}$ . En este caso, dadas las funciones de onda el cambio surge para  $y = 0$ . Al añadir un orden más y pasar a  $H_{20}$  ocurre lo mismo que para  $H_{02}$ . Sin embargo, al añadir más nodos subiendo los órdenes, vemos cómo aparecen nuevas simetrías debidas al producto de las ecuaciones.

### 4.2.3. Interferencia entre una onda plana y una onda de Hermite para distintos valores del ángulo de inclinación

En esta sección estudiaremos cómo afecta la inclinación de los haces en el patrón de interferencia. De forma análoga al caso de haces gaussianos, variaremos el ángulo de inclinación  $\beta$  de la onda plana respecto al haz de Hermite.

En la Figura 4.14a apreciamos que se produce el mismo efecto que para los haces gaussianos, como era de esperar. En este caso, vemos la división del patrón generado por la onda de Hermite, pues el patrón generado por la onda plana "parte" ambas superficies obteniendo un patrón en el que se suceden zonas de máximos y mínimos. En la Figura 4.14b vemos cómo surge de nuevo el batido en el eje  $y$ , el eje que sufre las consecuencias de este cambio en el ángulo. A continuación como extensión observaremos el patrón para distintos valores de  $\beta$ .

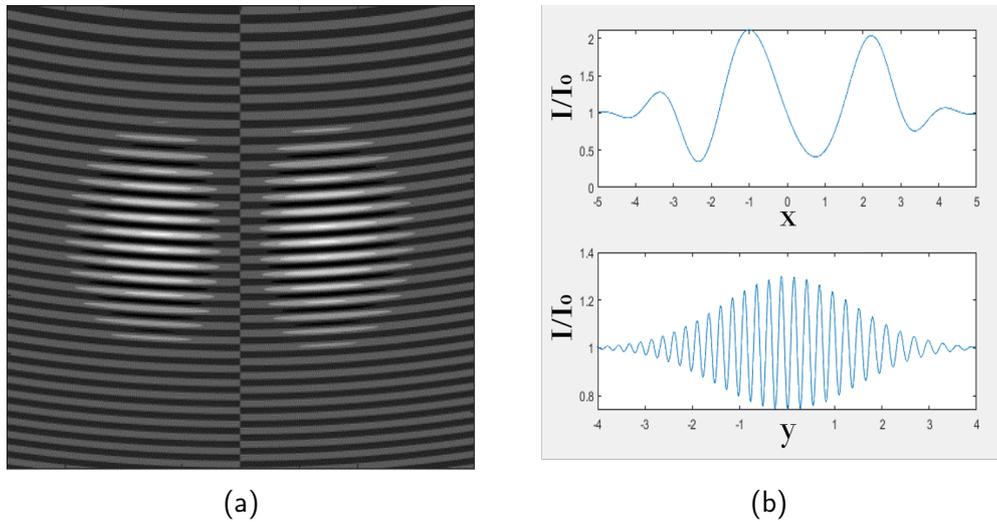


Figura 4.14: Simulación de la interferencia de una onda plana y una onda de Hermite para  $\beta = 0.0019$  radianes. La imagen (a) muestra cómo varía el patrón de interferencias en el plano  $(x,y)$  para  $\beta = 0.0019$  radianes. El panel está centrado en  $(0,0)$  y tiene un tamaño de  $8z_R \cdot 8z_R$ . La imagen (b) representa la variación de intensidad frente a  $x$  (imagen superior) e  $y$  (imagen inferior) con un tamaño  $8z_R$ .

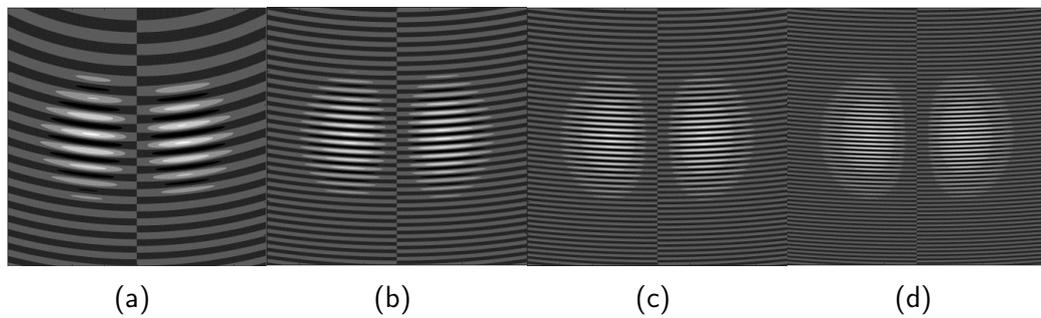


Figura 4.15: Representación de los patrones interferencia de funciones de Hermite con funciones de onda planas para (a)  $\beta = 0.0019$  radianes, (b)  $\beta = 0.0038$  radianes, (c)  $\beta = 0.0057$  radianes, (d)  $\beta = 0.0075$  radianes

Nuevamente en la Figura 4.15 se ve que a mayor valor del ángulo de inclinación, mayor es la deformación en el patrón, lo que es consecuente con la sección anterior.

### 4.3. Cálculo de interferencias para ondas de Laguerre

Como se vio en el capítulo anterior, al resolver la ecuación de ondas paraxial en coordenadas cilíndricas, aparecen como solución las denominadas funciones de onda de Laguerre, las cuales tienen simetría radial. Por tanto en este caso tomaremos como función de onda para la interferencia a

$$\psi_2(r, \theta, z) = L_{p,\ell}(r, \theta, z) = \frac{N}{w(z)} \left( \frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)} \right)^{|\ell|} L_p^{|\ell|} \left( \frac{2r^2}{\omega(z)^2} \right) e^{-i\frac{k(r^2)}{2R(z)}} e^{-\frac{r^2}{\omega(z)^2}} e^{i\ell\theta} \quad (4.19)$$

Y de nuevo, una función de onda plana

$$\psi_1(x, y, z) = B e^{ik(z+L)} \quad (4.20)$$

Al igual que se probó tanto como para la onda gaussiana y de Hermite, calculemos las posiciones de los mínimos de interferencia (zonas de interferencia destructiva).

$$k \frac{r^2}{2R(z)} - \ell\theta - k(z+L) = \pi \quad (4.21)$$

$$\frac{kr^2}{2R(z)} - k(z+L) = \pi + \ell\theta \quad (4.22)$$

$$\frac{r^2}{2R(z)} = \frac{\pi}{k} + \frac{\ell\theta}{k} + (z+L) \quad (4.23)$$

Y teniendo en cuenta la expresión 4.12, obtenemos que

$$r_{oscuro}^2 = 2R\frac{\pi}{k} + 2R\frac{\ell\theta}{k} + 2R(z + L) = r_{Gauss}^2 + \frac{2R}{k}\ell\theta \quad (4.24)$$

Donde directamente

$$r_{oscuro} = \sqrt{r_{Gauss}^2 + \frac{2R}{k}\ell\theta} \quad (4.25)$$

Es decir, que los radios no son fijos, al igual que en los casos anteriores. Tenemos una dependencia del término  $\ell\theta$  con lo que dado que  $\theta = \arctan(y/x)$  la posición de los mínimos da una vuelta de  $2\pi$  con respecto a su centro. Por tanto, la ecuación que estamos obteniendo describe una espiral, la cual, al ser prolongada a lo largo de la propagación por el eje  $z$ , produce una **hélice**.

#### 4.3.1. Interferencia de una onda plana con una onda de Laguerre para distintos valores de L

El siguiente paso será estudiar la influencia de la diferencia de camino óptico en el caso de los haces de Laguerre con una onda plana, en que la propagación es radial. Procedemos igual que en los casos anteriores, tomando un valor de L para ver cómo es la interferencia.

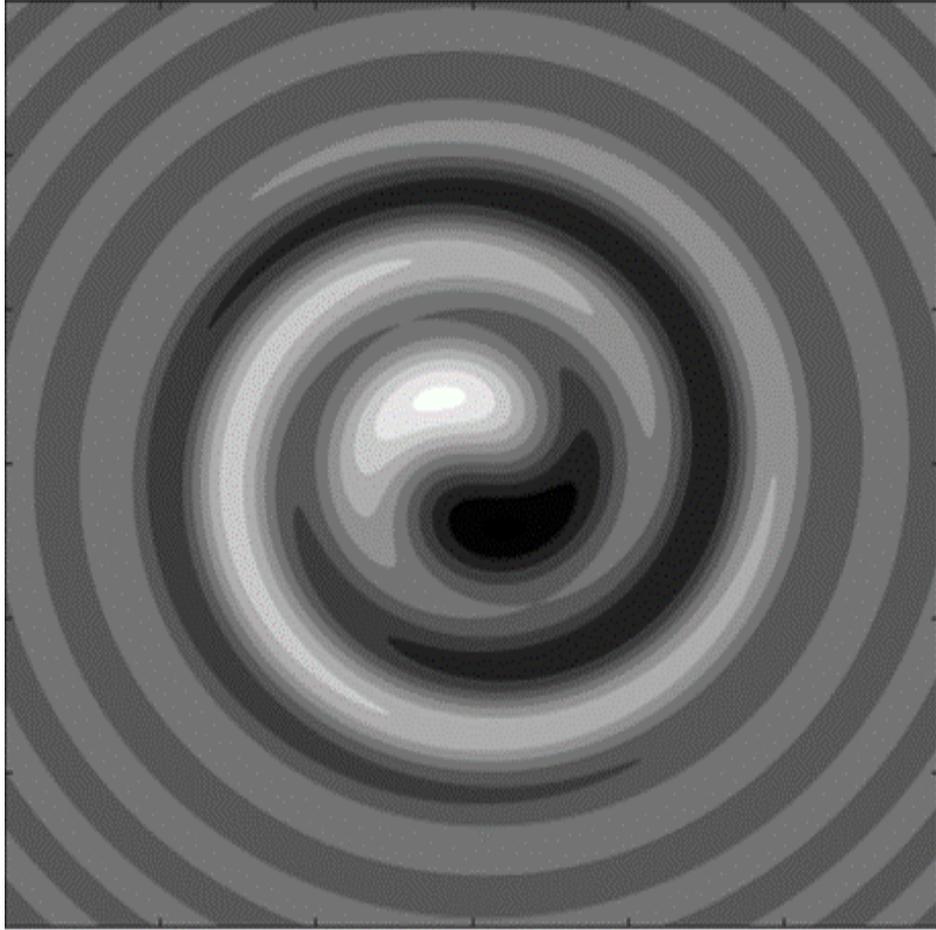


Figura 4.16: *Simulación de la interferencia de una onda plana y una onda de Laguerre para  $p = 1, \ell = 1$ . La imagen muestra cómo varía el patrón en el plano  $(x,y)$ . El panel está centrado en  $(0,0)$  y tiene un tamaño de  $12z_R \cdot 12z_R$ .*

En la Figura 4.16 aparece la forma de una espiral. Es decir, debido al factor  $\ell$  que aparece en la Ecuación 4.19 la fase genera revoluciones alrededor del centro, ya que aumenta de forma continua conforme aumenta el ángulo. En la figura vemos que conforme aumenta el radio, van formándose dos hélices simétricas, una de intensidad mínima y otra de intensidad máxima, consecuencia del cálculo de la Ecuación 4.25. Por primera vez calculamos **haces helicoidales**. A continuación variamos  $L$ , de la misma manera que en secciones anteriores.

En la Figura 4.17, se aprecia que conforme variamos el tamaño de  $L$ , se produce un movimiento en la hélice. Lo que estamos haciendo es cambiar las

superficies de fase, que en este caso ya no son constantes, por lo que cambia el punto origen de la hélice.

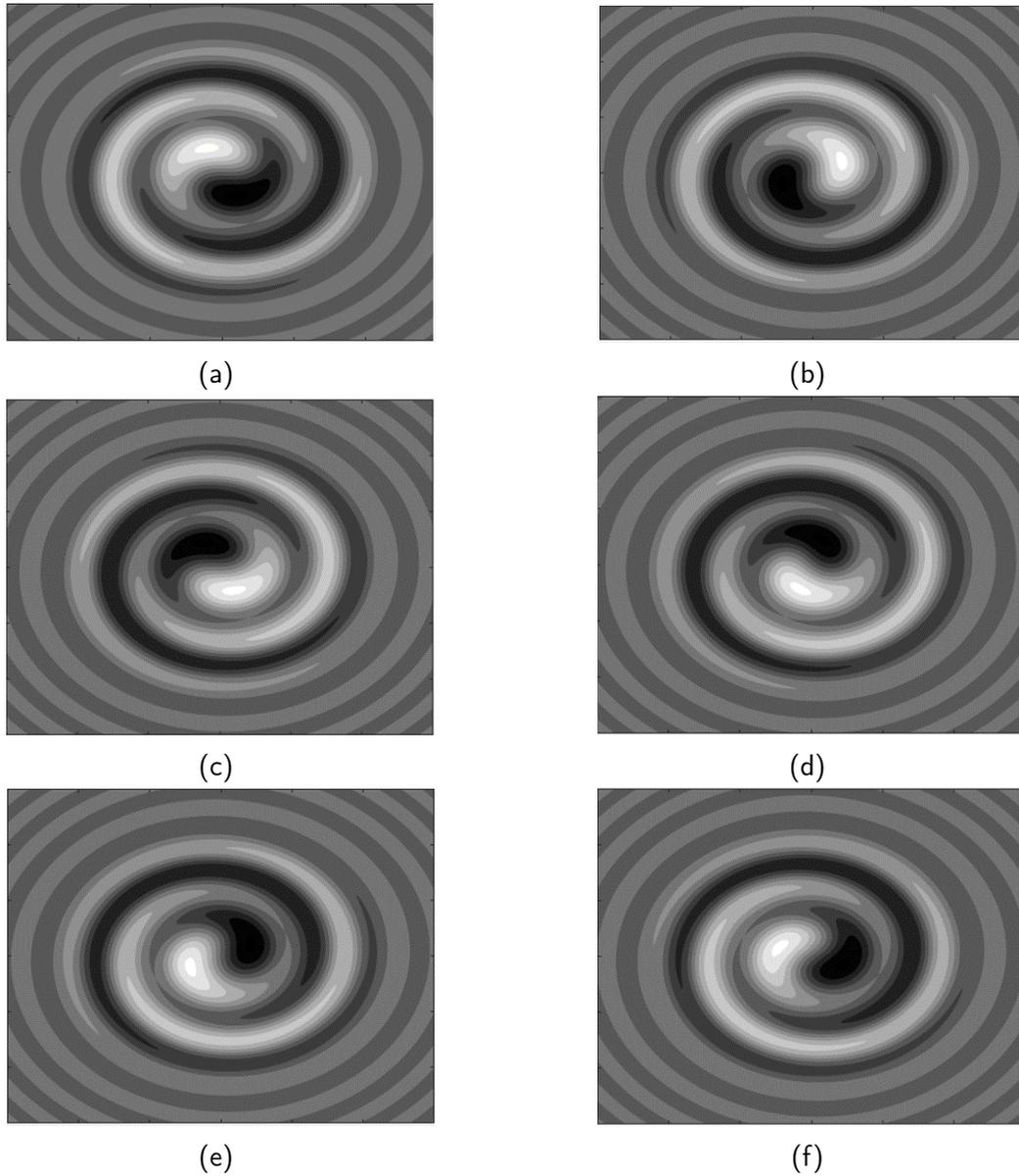


Figura 4.17: Representación de los patrones de funciones de Laguerre para (a)  $L = -z_R$ , (b)  $L = -z_R + 0.5\pi/k$ , (c)  $L = -z_R + \pi/k$ , (d)  $L = -z_R + 1.25\pi/k$ , (e)  $L = -z_R + 1.5\pi/k$ , (f)  $L = -z_R + 1.75\pi/k$ . El panel está centrado en  $(0,0)$  y tiene un tamaño de  $12z_R \cdot 12z_R$ .

### 4.3.2. Interferencia entre una onda plana y una onda de Laguerre para distintos órdenes del polinomio

Ahora veremos cómo cambia el patrón de interferencia en el caso en que variemos los valores de los parámetros  $p, \ell$ . Tomaremos un valor fijo de  $L = -z_R$

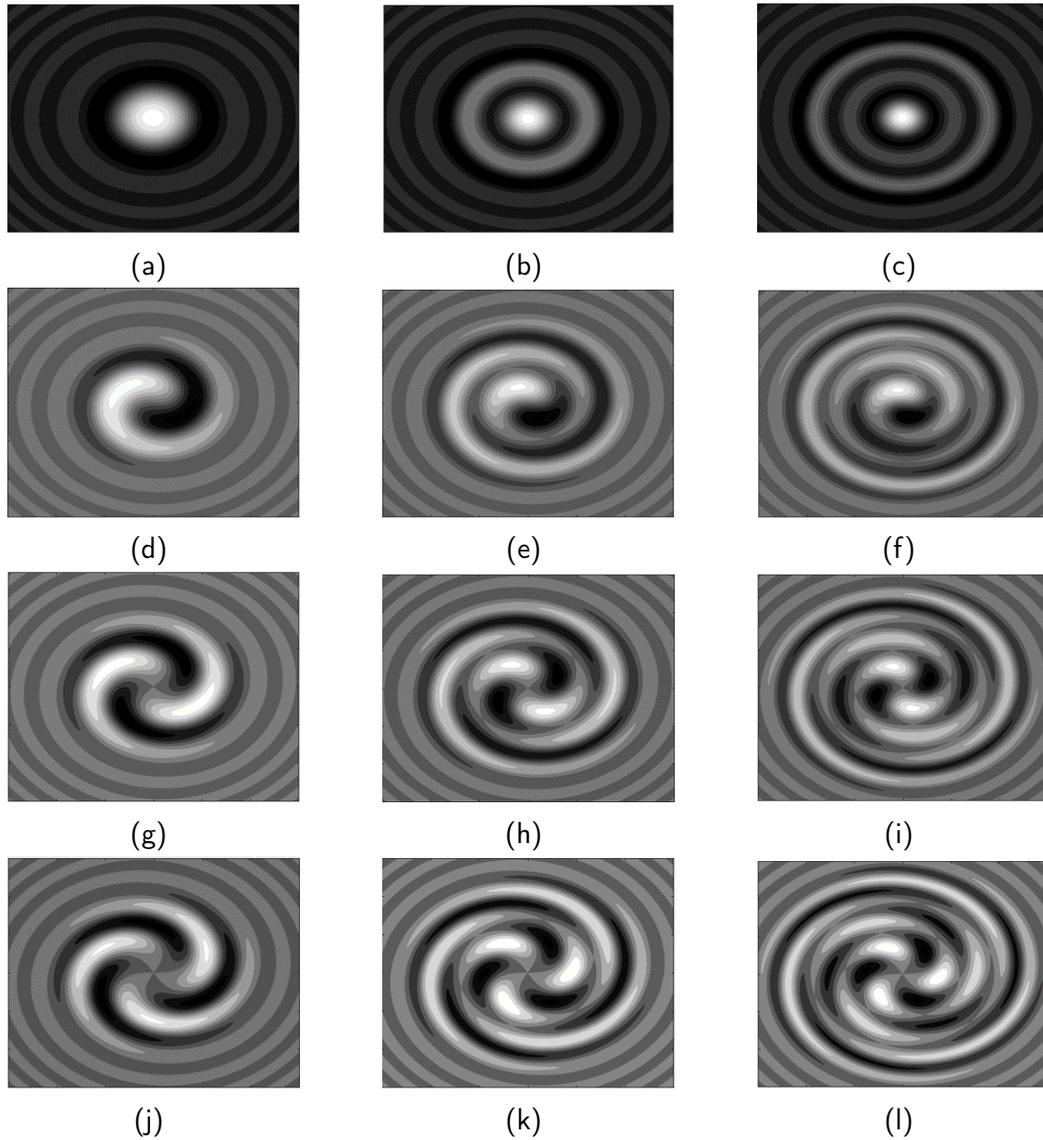


Figura 4.18: Representación de los patrones de funciones de Laguerre variando los parámetros del polinomio para (a)  $L_{00}$ , (b)  $L_{10}$ , (c)  $L_{20}$ , (d)  $L_{01}$ , (e)  $L_{11}$ , (f)  $L_{21}$ , (g)  $L_{02}$ , (h)  $L_{12}$ , (i)  $L_{22}$ , (j)  $L_{03}$ , (k)  $L_{13}$ , (l)  $L_{23}$ . El panel está centrado en  $(0,0)$  y tiene un tamaño de  $12z_R \cdot 12z_R$ .

En la Figura 4.18 vemos la variación del patrón de interferencias conforme cambiamos los parámetros. Lo primero que debemos notar es que para  $\ell = 0$  no se ve ninguna hélice. Esto es debido a que el factor que origina la hélice es precisamente  $e^{i\ell\theta}$ , y al ser nulo no cambia la fase. Conforme aumentamos el valor de éste se aprecian las espirales. Para valores mayores de  $p$  observamos cómo surgen varias hélices, tantas como anillos se veían en la Figura 3.6. Es relevante remarcar que para  $\ell > 1$ , por ejemplo  $\ell = 2$ , la parte de fase es  $e^{i2\theta}$ , con lo que la periodicidad es doble (pasa a ser la mitad de la superficie), y se origina una doble espiral.

### 4.3.3. Interferencia entre una onda plana y una onda de Laguerre para distintos valores del ángulo de inclinación

Por último, procederemos a estudiar el caso en que haya un ángulo de inclinación en la interferencia entre el haz plano y el de Laguerre. Esto nos lleva a realizar el mismo estudio que para los haces de Hermite.

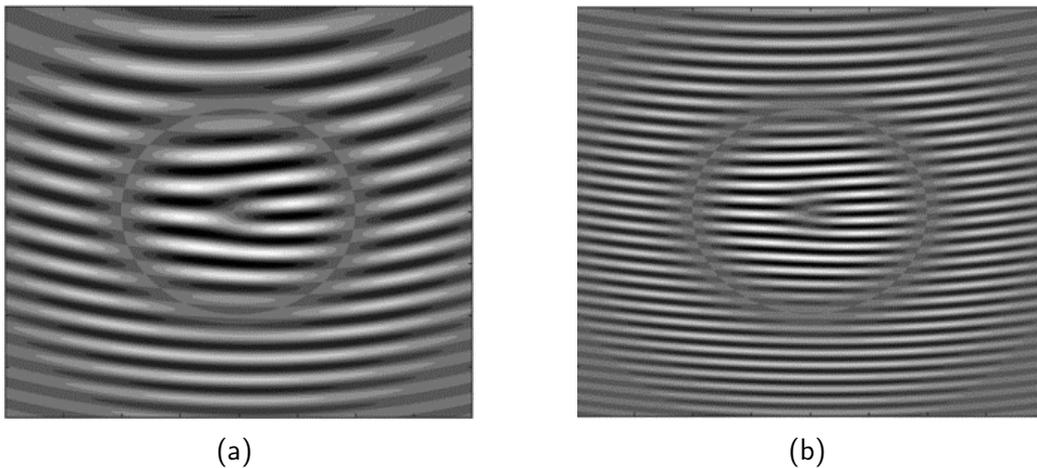


Figura 4.19: Representación de los patrones interferencia de funciones de Laguerre con funciones de onda planas para el caso  $L_{11}$  con (a)  $\beta = 0.0019$  radianes, (b)  $\beta = 0.0038$  radianes. El panel está centrado en  $(0,0)$  y tiene un tamaño de  $12zR \cdot 12zR$

En la Figura 4.19 se ve que al añadir el ángulo de inclinación el efecto global

es el mismo que para los haces de Hermite, surgiendo franjas curvadas, que tienen un corte en la superficie donde se encuentra el anillo correspondiente, y aumentando el ángulo aparecen progresivamente más. La principal diferencia es que en el origen aparece una forma de tenedor, que une (o separa) dos franjas. Este fenómeno es conocido como **vórtice óptico**. Notar que cambiar el signo de  $\ell$  cambiaría la orientación del vórtice.

Además, el número de franjas que pertenecen al vórtice depende del valor del número  $\ell$ . De la misma manera que en la Figura 4.19 para  $\ell = 1$  aparece sólo una franja dentro del tenedor, en la Figura 4.20 que corresponde con  $\ell = 3$  aparecen tres franjas.

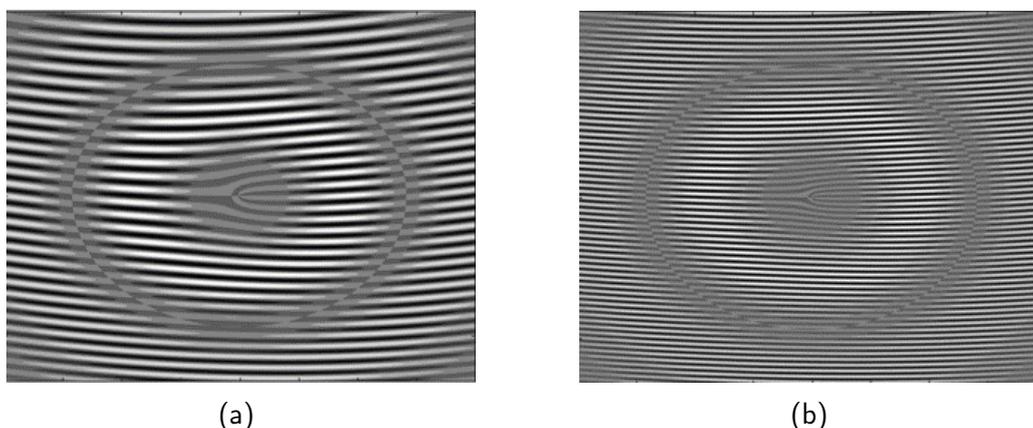


Figura 4.20: Representación de los patrones interferencia de funciones de Laguerre con funciones de onda planas para el caso  $L_{13}$  con (a)  $\beta = 0.0019$  radianes, (b)  $\beta = 0.0038$  radianes

No obstante la pregunta que surge es por qué dicho fenómeno se entiende como un vórtice. Esto ocurre debido a la similitud con otros fenómenos de otros ámbitos (tales como la física del estado sólido o la física de fluidos) donde aparecen los vórtices. La figura esta relacionada con defectos topológicos en su centro. Lo que tenemos es una zona donde la fase no está totalmente definida. Tengamos en cuenta que cada línea representa un cambio en la fase de  $2\pi$ , entonces observamos que dando una revolución completa en un entorno del vórtice, debido a las franjas adicionales del tenedor, no recorremos el mismo número de franjas en todas direcciones y por tanto aparecen desfases dependiendo del número de líneas del vórtice, es decir, del orden de la función. Dicho cambio es la

Haces de luz helicoidales

---

singularidad en la fase.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En la primera parte del trabajo hemos introducido históricamente el descubrimiento de los haces helicoidales de luz y de los vórtices ópticos, explicando brevemente sus propiedades y su importancia tanto teórica como experimental.

En la segunda parte hemos trabajado con la explicación matemática que justifica la aparición de los haces helicoidales, pasando por el tipo de haces más sencillos, tomando la aproximación paraxial, los haces gaussianos. A partir de estos, obtuvimos las propiedades más elementales que debían cumplir, y generalizamos las condiciones de la resolución de la función de onda para obtener los haces de Hermite-Gauss en coordenadas cartesianas, y de Laguerre-Gauss en coordenadas cilíndricas.

Tras estudiar las características de los tipos de haces de luz surgidos, en la última parte pasamos a estudiar las propiedades de su fase mediante estudios de interferencia con una onda plana. Para ello partimos de los haces gaussianos, y calculamos mediante una simulación numérica sus propiedades en función de la inclinación de los haces, la longitud de los brazos del interferómetro y en función de la distancia a la que se realiza la medición. Tras esto, procedimos a repetir el estudio con los haces de Hermite, y posteriormente de Laguerre. Fuimos capaces de calcular los haces helicoidales, y obteniendo las diferencias entre distintos órdenes del polinomio de Laguerre y del ángulo de inclinación, fuimos capaces de conseguir vórtices ópticos como singularidades de fase.

# Bibliografía

- [1] Light's Orbital Angular Momentum Miles Padgett, Johannes Courtial, and Les Allen *Physics Today* 57, 35 (2004);
- [2] Olivier Emile, Janine Emile. Energy, linear and angular momentum of light: what do we measure?. *Annalen der Physik*, 2018, 530 (2012), pp.1800111
- [3] K.P. Zetie, S.F. Adams and R.M. Tocknell, How does a Mach–Zehnder interferometer work?, *Phys. Educ.* 35 (2000) 46.
- [4] Miles Padgett, Johannes Courtial, Les Allen, Light's Orbital Angular Momentum, *Physics Today* 57 (2004) 35.
- [5] Yao, A.M., and Padgett, M.J. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Advances in Optics and Photonics*, 3 (2011) 161.
- [6] Robert W. Boyd, Intuitive explanation of the phase anomaly of focused light beams, *Journal of the Optical Society of America* 70 (1980) 877-880.
- [7] Yijie Shen, Xuejiao Wang, Zhenwei Xie, Changjun Min, Xing Fu, Qiang Liu, Mali Gong, Xiaocong Yuan, Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities, *Light: Science & Applications* 8 (2019) 90.
- [8] Galvez E.J. , Gaussian Beams in the optics course *Am.J.Phys* 74 (2006) 355.
- [9] Couillet, P., Gil, L. Lega, J. Defect-mediated turbulence. *Phys. Rev. Lett.* 62, 1619–1622 (1989).

# Capítulo 6

## Anexos

A continuación se añaden los códigos de MatLab utilizados para los cálculos numéricos del trabajo.

```
1 clear all
2 %onda gaussiana
3 A=2;
4 B=1;
5 longx=8;
6 longy=8;
7 K=2*pi*1000;
8 w0=1;
9 zR=K*w0^2/2;
10 z=1*zR;
11 R=z*(1+zR^2/z^2);
12 w=2*w0;
13 C=0;
14 L=-zR+C*pi/K;
15
16 x0=-longx/2-0.01 ;
17 x=x0;
18 y0=-longy/2;
19 y=y0;
```

```

20 l=zeros(longx , longy );
21
22
23 for m=1:longx*100
24     x=x+0.01;
25     y=y0;
26     for k=1:longy*100
27         y=y+0.01;
28         fidos(k)=K*(z+L);
29         psidos(k)=B*exp(1i*fidos(k));
30
31         psiuno(k)=A*w0/w*exp(-(x^2+y^2)/w^2)*exp(1i*K*(x
            ^2+y^2)/2/R);
32
33         psi(k)=psiuno(k)+psidos(k);
34         Id(k)=abs(psi(k))^2; %intensidad
35         yM(m,k)=y;
36         l(m,k)=Id(k);
37         rr(k,m)=sqrt(x^2+y^2);
38     end
39     xV(m)=x;
40 end
41 yV=yM(length(xV)/2,:);
42 lx=l(length(xV)/2,:);
43 lx=lx';
44 ly=l(:,length(yV)/2);
45 figure(1)
46 subplot(2,1,1)
47 plot(xV, lx)
48 xlabel('x')
49 ylabel('Intensidad')
50 title('Intensidad frente a x')
51 subplot(2,1,2)

```

```
52 plot(yV, ly)
53 xlabel('y')
54 ylabel('Intensidad')
55 title('Intensidad frente a y')
56 figure(6)
57 [X,Y] = meshgrid(xV,yV);
58 contourf(X,Y,I,20,'LineStyle','none')
59 title(['Mapeado de la intensidad para L=-zR+',num2str(C
        ), 'pi/K'])
60 xlabel('X')
61 ylabel('Y')
62 xlim([-4,4])
63 ylim([-4,4])
64 colormap gray
65
66 [maxX, locsmaxX] = findpeaks(Ix);
67 [maxY, locsmaxY] = findpeaks(Iy);
68 xVmax=xV(locsmaxX);
69 yVmax=yV(locsmaxY);
70 rclaro=sqrt(xVmax.^2+yVmax.^2);
71 [minX, locsminX] = findpeaks(-Ix);
72 [minY, locsminY] = findpeaks(-Iy);
73 xVmin=xV(locsminX);
74 yVmin=yV(locsminY);
75 roscuro=sqrt(xVmin.^2+yVmin.^2);

1 clear all
2 %onda gaussiana inclinada
3 A=2;
4 B=1;
5
6 longx=8;
7 longy=8;
```

```

8 K=2*pi*1000;
9
10 w0=1;
11 zR=K*w0^2/2;
12 z=1*zR;
13 R=z*(1+zR^2/z^2);
14 w=2*w0;
15 C=1;
16 L=-1*zR+C*pi/K;
17
18 x0=-longx/2-0.01 ;
19 x=x0;
20 y0=-longy/2;
21 y=y0;
22 l=zeros(longx, longy);
23 beta=0.5*0.0012*pi;
24
25 for m=1:longx*100
26     x=x+0.01;
27     y=y0;
28     for k=1:longy*100
29         y=y+0.01;
30         fidos(k)=K*((z+L)*cos(beta)+x*sin(beta));
31         psidos(k)=B*exp(1i*fidos(k));
32
33         psiuno(k)=A*w0/w*exp(-(x^2+y^2)/w^2)*exp(1i*K*(x
            ^2+y^2)/2/R);
34
35         psi(k)=psiuno(k)+psidos(k);
36         Id(k)=abs(psi(k))^2; %intensidad
37         yM(m,k)=y;
38         l(m,k)=Id(k);
39         rr(k,m)=sqrt(x^2+y^2);

```

```
40     end
41     xV(m)=x;
42
43 end
44 yV=yM( length(xV)/2,:);
45
46 lx=l( length(xV)/2,:);
47 lx=lx';
48 ly=l(:, length(yV)/2);
49
50
51 figure(1)
52 subplot(2,1,1)
53 plot(xV, lx)
54 xlabel('x')
55 ylabel('Intensidad')
56 title('Intensidad frente a x')
57 xlim([-4,4])
58 subplot(2,1,2)
59 plot(yV, ly)
60 xlabel('y')
61 ylabel('Intensidad')
62 title('Intensidad frente a y')
63 xlim([-4,4])
64 figure(6)
65 [X,Y] = meshgrid(xV,yV);
66
67 contourf(X,Y,l, 'LineStyle','none')
68 title(['Mapeado de la intensidad para beta=', num2str(
        round(beta,4)), ' radianes'])
69 xlabel('X')
70 ylabel('Y')
71 xlim([-4,4])
```

```
72 ylim([-4,4])
73 colormap gray

1 clear all
2 %onda gaussiana variando z
3 A=2;
4 B=1;
5
6 longx=20;
7 longy=20;
8 K=2*pi*1000;
9
10 w0=1;
11 zR=K*w0^2/2;
12 CC=10;
13 z=CC*zR;
14 R=z*(1+zR^2/z^2);
15 w=w0*sqrt(1+z^2/zR^2);
16 C=0;
17 L=-CC*zR+C*pi/K;
18
19 x0=-longx/2-0.01 ;
20 x=x0;
21 y0=-longy/2;
22 y=y0;
23 l=zeros(longx, longy);
24
25
26 for m=1:longx*100
27     x=x+0.01;
28     y=y0;
29     for k=1:longy*100
30         y=y+0.01;
```

```

31     fidos(k)=K*(z+L);
32     psidos(k)=B*exp(1i*fidos(k));
33
34     psiuno(k)=A*w0/w*exp(-(x^2+y^2)/w^2)*exp(1i*K*(x
        ^2+y^2)/2/R);
35
36     psi(k)=psiuno(k)+psidos(k);
37     Id(k)=abs(psi(k))^2; %intensidad
38     yM(m,k)=y;
39     l(m,k)=Id(k);
40     rr(k,m)=sqrt(x^2+y^2);
41     end
42     xV(m)=x;
43
44 end
45 yV=yM(length(xV)/2,:);
46 lx=l(length(xV)/2,:);
47 lx=lx';
48 ly=l(:,length(yV)/2);
49
50 figure(1)
51 subplot(2,1,1)
52 plot(xV, lx)
53 xlabel('x')
54 ylabel('Intensidad')
55 title('Intensidad frente a x')
56 subplot(2,1,2)
57 plot(yV, ly)
58 xlabel('y')
59 ylabel('Intensidad')
60 title('Intensidad frente a y')
61 figure(6)
62 [X,Y] = meshgrid(xV,yV);

```

```
63
64 contourf(X,Y,I,20,'LineStyle','none')
65 title(['Mapeado de la intensidad para z=',num2str(CC),'
        zR'])
66 xlabel('X')
67 ylabel('Y')
68 xlim([-10,10])
69 ylim([-10,10])
70 colormap gray
71
72
73 [maxX, locsmaxX] = findpeaks(Ix);
74 [maxY, locsmaxY] = findpeaks(Iy);
75 xVmax=xV(locsmaxX);
76 yVmax=yV(locsmaxY);
77 rclaro=sqrt(xVmax.^2+yVmax.^2);
78
79 [minX, locsminX] = findpeaks(-Ix);
80 [minY, locsminY] = findpeaks(-Iy);
81 xVmin=xV(locsminX);
82 yVmin=yV(locsminY);
83 roscuro=sqrt(xVmin.^2+yVmin.^2);
84
85
86 1 clear all
87 2 %patron de intensidad de Hermite
88 3 A=2;
89 4 B=1;
90 5
91 6 longx=8;
92 7 longy=8;
93 8 K=2*pi*1000;
94 9
95 10 w0=1;
```

```
11 zR=K*w0^2/2;
12 z=1*zR;
13 R=z*(1+zR^2/z^2);
14 w=2*w0;
15 C=0;
16 L=-zR+C*pi/K;
17
18 x0=-longx/2-0.01 ;
19 x=x0;
20 y0=-longy/2;
21 y=y0;
22 l=zeros(longx , longy);
23
24 %Elegimos los polinomios de hermite
25 n=2;
26 s=2;
27
28 for m=1:longx*100
29     x=x+0.01;
30     y=y0;
31     for k=1:longy*100
32         y=y+0.01;
33         fidos(k)=K*(z+L);
34         psidos(k)=0*B*exp(1i*fidos(k));
35         nux=sqrt(2)*x/w;
36         if n==0
37             Hx(k)=1;
38         elseif n==1
39             Hx(k)=2*nux;
40         else
41             Hx(k)=4*nux^2-2;
42         end
43         nuy=sqrt(2)*y/w;
```

```

44     if s==0
45         Hy(k)=1;
46     elseif s==1
47         Hy(k)=2*nuy;
48     else
49         Hy(k)=4*nuy^2-2;
50     end
51     psiuno(k)=A/w*Hx(k)*Hy(k)*exp(-(x^2+y^2)/w^2)*
        exp(1i*K*(x^2+y^2)/2/R);
52     psi(k)=psiuno(k)+psidos(k);
53     Id(k)=abs(psi(k))^2; %Intensidad
54     yM(m,k)=y;
55     l(m,k)=Id(k);
56     rr(k,m)=sqrt(x^2+y^2);
57     end
58     xV(m)=x;
59
60 end
61 yV=yM(length(xV)/2,:);
62 lx=l(length(xV)/2,:);
63 lx=lx';
64 ly=l(:,length(yV)/2);
65
66 figure(1)
67 subplot(2,1,1)
68 plot(xV,lx)
69 xlabel('x')
70 ylabel('Intensidad')
71 title('Intensidad frente a x')
72
73 subplot(2,1,2)
74 plot(yV,ly)
75 xlabel('y')

```

```
76 ylabel('Intensidad')
77 title('Intensidad frente a y')
78 figure(6)
79 [X,Y] = meshgrid(xV,yV);
80
81 contourf(X,Y,I,20,'LineStyle','none')
82 title(['Mapeado de la intensidad para H',num2str(n),
      num2str(s)])
83 xlabel('X')
84 ylabel('Y')
85 xlim([-4,4])
86 ylim([-4,4])
87 colormap gray

1 clear all
2
3 A=2;
4 B=1;
5
6 longx=8;
7 longy=8;
8 K=2*pi*1000;
9
10 w0=1;
11 zR=K*w0^2/2;
12 z=1*zR;
13 R=z*(1+zR^2/z^2);
14 w=2*w0;
15 C=0;
16 L=-zR+C*pi/K;
17
18 x0=-longx/2-0.01 ;
19 x=x0;
```

```

20 y0=-longy /2;
21 y=y0;
22 l=zeros(longx , longy );
23
24 %Elegimos los polinomios de hermite
25 n=2;
26 s=2;
27
28 for m=1:longx*100
29     x=x+0.01;
30     y=y0;
31     for k=1:longy*100
32         y=y+0.01;
33         fidos(k)=K*(z+L);
34         psidos(k)=B*exp(1i*fidos(k));
35         nux=sqrt(2)*x/w;
36         if n==0
37             Hx(k)=1;
38         elseif n==1
39             Hx(k)=2*nux;
40         else
41             Hx(k)=4*nux^2-2;
42         end
43         nuy=sqrt(2)*y/w;
44         if s==0
45             Hy(k)=1;
46         elseif s==1
47             Hy(k)=2*nuy;
48         else
49             Hy(k)=4*nuy^2-2;
50         end
51         psiuno(k)=A/w*Hx(k)*Hy(k)*exp(-(x^2+y^2)/w^2)*
            exp(1i*K*(x^2+y^2)/2/R);

```

```

52     psi(k)=psiuno(k)+psidos(k);
53     Id(k)=abs(psi(k))^2; %Intensidad
54     yM(m,k)=y;
55     I(m,k)=Id(k);
56     rr(k,m)=sqrt(x^2+y^2);
57     end
58     xV(m)=x;
59
60 end
61 yV=yM(length(xV)/2,:);
62 Ix=I(length(xV)/2,:);
63 Ix=Ix';
64 Iy=I(:,length(yV)/2);
65
66 figure(1)
67 subplot(2,1,1)
68 plot(xV,Ix)
69 xlabel('x')
70 ylabel('Intensidad')
71 title('Intensidad frente a x')
72
73 subplot(2,1,2)
74 plot(yV,Iy)
75 xlabel('y')
76 ylabel('Intensidad')
77 title('Intensidad frente a y')
78 figure(6)
79 [X,Y] = meshgrid(xV,yV);
80
81 contourf(X,Y,I,20,'LineStyle','none')
82 title(['Mapeado de la intensidad para H',num2str(n),
      num2str(s)])
83 xlabel('X')

```

```
84 ylabel('Y')
85 xlim([-4,4])
86 ylim([-4,4])
87 colormap gray

1 clear all
2 %onda de Hermite inclinada
3 A=2;
4 B=1;
5
6 longx=10;
7 longy=10;
8 K=2*pi*1000;
9
10 w0=1;
11 zR=K*w0^2/2;
12 z=1*zR;
13 R=z*(1+zR^2/z^2);
14 w=2*w0;
15 C=1;
16 L=-1*zR+C*pi/K;
17
18 x0=-longx/2-0.01 ;
19 x=x0;
20 y0=-longy/2;
21 y=y0;
22 l=zeros(longx, longy);
23 beta=1.5*0.0012*pi;
24
25 for m=1:longx*100
26     x=x+0.01;
27     y=y0;
28     for k=1:longy*100
```

```

29     y=y+0.01;
30     fidos(k)=K*((z+L)*cos(beta)+x*sin(beta));
31     psidos(k)=B*exp(1i*fidos(k));
32
33     Hx(k)=1;
34     Hy(k)=2*sqrt(2)*y/w^2;
35     psiuno(k)=A/w*Hx(k)*Hy(k)*exp(-(x^2+y^2)/w^2)*
        exp(1i*K*(x^2+y^2)/2/R);
36
37     psi(k)=psiuno(k)+psidos(k);
38     Id(k)=abs(psi(k))^2; %Intensidad
39     yM(m,k)=y;
40     I(m,k)=Id(k);
41     rr(k,m)=sqrt(x^2+y^2);
42     end
43     xV(m)=x;
44
45 end
46 yV=yM(length(xV)/2,:);
47 lx=l(length(xV)/2,:);
48 lx=lx';
49 ly=l(:,length(yV)/2+20);
50 figure(1)
51 subplot(2,1,1)
52 plot(xV,lx)
53 xlabel('x')
54 ylabel('Intensidad')
55 title('Intensidad frente a x')
56 xlim([-5,5])
57 subplot(2,1,2)
58 plot(yV,ly)
59 xlabel('y')
60 ylabel('Intensidad')

```

```
61 title('Intensidad frente a y')
62 xlim([-4,4])
63
64 figure(6)
65 [X,Y] = meshgrid(xV,yV);
66
67 contourf(X,Y,I,'LineStyle','none')
68 title(['Mapeado de la intensidad para beta=',num2str(
        round(beta,4)), ' radianes'])
69 xlabel('X')
70 ylabel('Y')
71 xlim([-4,4])
72 ylim([-4,4])
73 colormap gray

1 clear all
2 %C Iculo de haces de laguerre
3 A=2;
4 B=1;
5 longx=12;
6 longy=12;
7 K=2*pi*1000;
8 w0=1;
9 zR=K*w0^2/2;
10 z=1*zR;
11 R=z*(1+zR^2/z^2);
12 w=2*w0;
13 C=0;
14 L=-1*zR+C*pi/K;
15 x0=-longx/2-0.01 ;
16 x=x0;
17 y0=-longy/2;
18 y=y0;
```

```

19 l=zeros(longx ,longy );
20 beta=0*0.0012*pi ;
21 ele=3;
22 p=2;
23 Am=factorial(p)*sqrt(2/(pi*factorial(p)*factorial((abs(
    ele)+p)))));
24 for m=1:longx*100
25     x=x+0.01;
26     y=y0;
27     for k=1:longy*100
28         y=y+0.01;
29         rlag=sqrt(x^2+y^2);
30         if x<0
31             if y<0
32                 theta=atan(y/x)+pi;
33             else
34                 theta=atan(y/x)-pi;
35             end
36         else
37             if y>0
38                 theta=atan(y/x);
39             else
40                 theta=atan(y/x);
41             end
42         end
43         fidos(k)=K*(z+L);
44         psidos(k)=B*exp(1i*fidos(k));
45         nu=2*rlag^2/w^2;
46         if p==0
47             LL(k)=1;
48         elseif p==1
49             LL(k)=1+abs(ele)-nu;
50         elseif p==2

```

```

51         LL(k)=0.5*(nu^2-2*nu*(abs(ele)+2)+(abs(ele)
           +1)*(abs(ele)+2));
52     end
53     psiuno(k)=Am/w*sqrt(nu)^(abs(ele))*LL(k)*exp(-
           rlag^2/w^2)*exp(1i*K*(rlag^2)/2/R)*exp(1i*ele
           *theta);
54     psi(k)=psiuno(k)+psidos(k);
55     Id(k)=abs(psi(k))^2; %intensidad
56     yM(m,k)=y;
57     rM(m,k)=rlag;
58     thetaM(m,k)=theta;
59     I(m,k)=Id(k);
60     end
61     xV(m)=x;
62
63
64 end
65 yV=yM(length(xV)/2,:);
66 rV=rM(length(xV)/2,:);
67 thetaV=thetaM(length(xV)/2,:);
68 lx=I(length(xV)/2,:);
69 lx=lx';
70 ly=I(:,length(yV)/2);
71 lr=lx;
72 figure(1)
73 plot(rV,lx)
74 xlabel('r')
75 ylabel('Intensidad')
76 title('Intensidad frente a x')
77 xlim([0,4])
78 figure(6)
79 [X,Y] = meshgrid(xV,yV);
80 contourf(X,Y,I,'LineStyle','none')

```

```
81 title(['Mapeado de la intensidad para l=', num2str(ele),  
      ' ', p=' ', num2str(p), ' y L=-zR+', num2str(C), ' pi/K' ])  
82 xlabel('X')  
83 ylabel('Y')  
84 xlim([-6,6])  
85 ylim([-6,6])  
86 colormap gray  
  
1 clear all  
2 %haz de laguerre con ngulo de inclinaci n  
3 A=2;  
4 B=1;  
5  
6 longx=8;  
7 longy=8;  
8 K=2*pi*1000;  
9  
10 w0=1;  
11 zR=K*w0^2/2;  
12 z=1*zR;  
13 R=z*(1+zR^2/z^2);  
14 w=2*w0;  
15 C=0;  
16 L=-1*zR+C*pi/K;  
17  
18 x0=-longx/2-0.01 ;  
19 x=x0 ;  
20 y0=-longy/2;  
21 y=y0 ;  
22 l=zeros(longx , longy );  
23 beta=2*0.0012*pi ;  
24  
25 ele=3;
```

```

26 p=1;
27 Am=factorial(p)*sqrt(2/(pi*factorial(p)*factorial((abs(
    ele)+p)))));
28 for m=1:longx*100
29     x=x+0.01;
30     y=y0;
31     for k=1:longy*100
32         y=y+0.01;
33         rlag=sqrt(x^2+y^2);
34         if x<0
35             if y<0
36                 theta=atan(y/x)+pi;
37             else
38                 theta=atan(y/x)-pi;
39             end
40         else
41             if y>0
42                 theta=atan(y/x);
43             else
44                 theta=atan(y/x);
45             end
46         end
47         fidos(k)=K*((z+L)*cos(beta)+x*sin(beta));
48         psidos(k)=B*exp(1i*fidos(k));
49
50         nu=2*rlag^2/w^2;
51         if p==0
52             LL(k)=1;
53         elseif p==1
54             LL(k)=1+abs(ele)-nu;
55         elseif p==2
56             LL(k)=0.5*(nu^2-2*nu*(abs(ele)+2)+(abs(ele)
                +1)*(abs(ele)+2));

```

```

57     end
58
59     psiuno(k)=Am/w*sqrt(nu)^(abs(ele))*LL(k)*exp(-
        rlag^2/w^2)*exp(1i*K*(rlag^2)/2/R)*exp(1i*ele
        *theta);
60
61     psi(k)=psiuno(k)+psidos(k);
62     Id(k)=abs(psi(k))^2; %intensidad
63     yM(m,k)=y;
64     rM(m,k)=rlag;
65     thetaM(m,k)=theta;
66     I(m,k)=Id(k);
67
68     end
69     xV(m)=x;
70
71 end
72 yV=yM(length(xV)/2,:);
73 rV=rM(length(xV)/2,:);
74 thetaV=thetaM(length(xV)/2,:);
75 lx=l(length(xV)/2,:);
76 lx=lx';
77 ly=l(:,length(yV)/2);
78 lr=lx;
79 figure(1)
80 plot(rV,lx)
81 xlabel('r')
82 ylabel('Intensidad')
83 title('Intensidad frente a x')
84 xlim([0,4])
85 figure(6)
86 [X,Y] = meshgrid(xV,yV);
87 contourf(X,Y,I,'LineStyle','none')

```

```
88 title(['Mapeado de la intensidad para l=', num2str(ele),  
      ' ', p=', num2str(p), ' y beta=', num2str(round(beta,4))  
      , ' radianes' ])  
89 xlabel('X')  
90 ylabel('Y')  
91 xlim([-4,4])  
92 ylim([-4,4])  
93 colormap gray
```