CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS EN LA CLASE DE LOS γ-ESPACIOS

por

JUAN MARGALEF ROIG y ENRIQUE OUTERELO DOMINGUEZ

Se introduce una clase de espacios topológicos (γ-espacios) más general que la de los espacios regulares. Un γ-espacio T_2 no es necesariamente regular y existen espacios T_2 que no son γ-espacios.

En la clase de los γ-espacios se prueba el siguiente resultado:

«Sea X un γ-espacio. Supongamos que $1_X \times g$ es una identificación, para toda aplicación g cerrada, compacto-recubridora, con espacio dominio k-espacio paracompacto y T_2. Entonces, para todo $x \in X$ existe un entorno compacto de x en X.»

A partir de este teorema, se generalizan proposiciones de E. Michael (corolario 13 y corolario 15) establecidas en [5].

Definición 1.—Sea X un conjunto. Se dice que $\mathcal{C} = \{C_i \mid i \in I\}$ es una cadena en X si I es un conjunto bien ordenado ($\leqslant$); para todo $i \in I$, C_i es un subconjunto no vacío de X; $\bigcap_{i \in I} C_i = \varnothing$ e $i \leqslant j$ si y solamente si $C_i \supset C_j$.

Si $\mathcal{C}$ es una cadena en X y M es un subconjunto de X, se dice que M corta a $\mathcal{C}$, si $M \cap C \neq \varnothing$ para todo C de $\mathcal{C}$.

Si X es un espacio topológico y $\mathcal{C}$ es una cadena en X tal que para $i \in I$, C_i es cerrado en X, se dice que $\mathcal{C}$ es una cadena de cerrados en X.

Definición 2.—Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que X es localmente compacto en x, si existe una base de entornos de x cuyos elementos son compactos. (Por tanto, un espacio topológico es localmente compacto si y solamente si es localmente compacto en cada uno de sus puntos).

DEFINICIÓN 3.—Un espacio topológico X, se dice que es un γ-espacio, si para todo punto x de X en el que X no es localmente compacto y todo U, entorno abierto de x, existe V entorno de x en X y existe $\mathcal{C}$ cadena de cerrados en $\overline{V}$ (adherencia de V) tal que $\mathcal{C}$ corta a U. Evidentemente todo espacio localmente compacto es un γ-espacio.

LEMA 4 [3].—Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) X es compacto.

b) Para toda familia $\mathcal{H}$ de cerrados no vacíos de X tal que $(\mathcal{H}, \subset)$ es un conjunto totalmente ordenado, se verifica que $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \neq \emptyset$.

LEMA 5 [1].—Sea $(I, \leqslant)$ un conjunto totalmente ordenado. Entonces existe $J \subset I$ tal que $(J, \leqslant)$ es un conjunto bien ordenado y para todo $i \in I$ existe $j \in J$ con $i \leqslant j$. (Es decir, J es un cofinal ordenado.)

PROPOSICIÓN 6 [4].—Sea X un k-espacio y X′ un espacio localmente compacto. Entonces $X \times X'$ es un k-espacio. (X es un k-espacio si: $K \cap M$ es abierto en K para todo K compacto de X, implica que M es abierto en X.)

PROPOSICIÓN 7 [4].—Si $p: X \longrightarrow Y$ es una identificación, donde Y es T_2 y X′ es un espacio T_2 tal que $X' \times Y$ es un k-espacio, se verifica que $1_{X'} \times p$ es una identificación de $X' \times X$ en $X' \times Y$.

PROPOSICIÓN 8.—Si X es un espacio topológico regular, X es un γ-espacio.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $x \in X$ tal que X no es localmente compacto en x y sea U un entorno abierto de x. Como X es regular existe V, entorno abierto de x en X cumpliendo $\overline{V} \subset U$ y $\overline{V}$ no es compacto. Entonces por el lema 4, existe $\mathcal{H}$ familia de cerrados no vacíos de $\overline{V}$ tal que $(\mathcal{H}, \subset)$ es un conjunto totalmente ordenado y $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \neq \emptyset$.

Se considera el conjunto totalmente ordenado $(\mathcal{H}, \leqslant)$, donde $H_1 \leqslant H_2$ si y sólo si $H_2 \subset H_1$.

Por el lema 5, aplicado a $(\mathcal{H}, \leqslant)$, existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{C}$ es cofinal en $(\mathcal{H}, \leqslant)$ y $(\mathcal{C}, \leqslant)$ es un conjunto bien ordenado.

Es claro que $\mathcal{C}$ es una cadena de cerrados en $\overline{V}$ tal que $\mathcal{C}$ corta a U. Así X es un γ-espacio.

Veamos a continuación un ejemplo de un espacio topológico T_2 que es γ-espacio y no es regular.

EJEMPLO 9.

1) Sea $X = R$ y

$$B = \{(a, b) \subset R \ / \ a < b, \quad 0 \notin (a, b)\} \cup \{(a, b) - \{a_n\}_{n \in N} \ /$$
$$/ \ a < 0 < b, \ \{a_n\}_{n \in N} \quad \text{converge a } 0 \text{ en lo topología usual de } R \text{ y}$$
$$a_n \in (a, b) - \{0\} \text{ para todo } n \in N\}.$$

Entonces:

1) B es base de una topología T en R.

2) (X, T) es T_2 y no es regular.

3) (X, T) es localmente compacto en todo punto distinto de cero y no es localmente compacto en 0.

4) (X, T) es un γ-espacio. En efecto:

Sea U un entorno abierto de 0 en (X, T). Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\{a_n\}_{n \in N}$, sucesión en $(-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}$ que converge a 0 en la topología usual y tal que

$$0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{a_n\}_{n \in N} \subset U.$$

Se toma

$$V = (-\varepsilon, \varepsilon) - \{a_n\}_{n \in N},$$

con lo cual $\bar{V} = [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Se considera una sucesión $\{b_n\}_{n \in N}$ en $(-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}$ tal que

$$\lim \{b_n\}_{n \in N} = 0$$

(con la topología usual) y

$$\{a_n \ / \ n \in N\} \cap \{b_n \ / \ n \in N\} = \varnothing.$$

Entonces $\mathcal{C} = \{C_n \ / \ n \in N\}$, donde $C_n = \{b_m \ / \ m \geqslant n\}$ es una cadena de cerrados en $\bar{V}$ que corta a U.

II) Sea $X = R$ y

$$B = \{(a, b) / a, b \in R, a < b\} \cup \{(a, b) \cap Q / a, b \in R, a < b\}.$$

Entonces B es base de una topología T en R y (X, T) es T_2 y no es γ-espacio.

DEFINICIÓN 10 [5].—Sea f una aplicación de un espacio topológico X en un espacio topológico Y. Se dice que f es compacto-recubridora si f es continua y cumple que para todo K, compacto en Y, existe C, compacto en X, tal que $f(C) = K$. (Por tanto f es, en particular, suprayectiva.)

PROPOSICIÓN 11.—Sea X un γ-espacio. Supongamos que $1_X \times g$ es una identificación para toda aplicación g cerrada, compacto-recubridora, con espacio topológico dominio, k-espacio paracompacto y T_2. Entonces para todo $x \in X$, existe un entorno compacto de x en X. (Obsérvese que la hipótesis «$1_X \times g$ es identificación, para toda aplicación g cerrada, compacto-recubridora, con espacio topológico dominio k-espacio paracompacto y T_2» es equivalente a «$1_X \times g$ es identificación, para toda aplicación g cerrada, compacto-recubridora, con espacios topológicos dominio y rango k-espacios paracompactos y T_2».

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que existe un punto x_0 de X, el cual no tiene entornos compactos. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ el sistema de entornos de x_0. Entonces, para todo $\alpha \in A$, $\bar{U}_\alpha$ no es compacto. (Obsérvese que por ser X un γ-espacio, card (A) $\geqslant 2$.)

Así, para todo $\alpha \in A$, por los lemas 4 y 5 existe $\{C_i\}_{i \in I}$ familia de cerrados no vacíos de $\bar{U}_\alpha$ tal que I es un conjunto bien ordenado, $i \leqslant i'$ si y sólo si $C_i \supset C_{i'}$, y $\bigcap_{i \in I} C_i = \varnothing$. Por tanto $\{C_i\}_{i \in I}$ es una cadena de cerrados de $\bar{U}_\alpha$.

Para cada $\alpha \in A$ se considera el conjunto de todas las cadenas de cerrados de $\bar{U}_\alpha$ (existe por lo menos una). A dicho conjunto se le designa por

$$\{C^\alpha_{i_\alpha}\}_{i_\alpha \in I_\alpha} \quad \text{y} \quad C^\alpha_{i_\alpha} = \{C^{i_\alpha}_j / j \in J_{i_\alpha}\}.$$

Para todo $\alpha \in A$ y todo $i_\alpha \in I_\alpha$, se considera

$$\bar{J}_{i_\alpha} = J_{i_\alpha} \cup \{u_{i_\alpha}\},$$

donde u_{i_α} es un último elemento añadido a J_{i_α}, y se supone $\bar{J}_{i_\alpha}$ dotado con la topología del orden. Entonces $\overline{J}_{i_\alpha}$ es compacto y T_2. (Obsérvese que J_{i_α} no tiene último elemento.)

Sea Λ la suma topológica de los espacios $\overline{J}_{i_\alpha}$ variando α en A e i_α en I_α. Se verifica que Λ es un k-espacio paracompacto y T_2. Se considera Y el espacio topológico cociente de Λ al identificar

$$\{u_{i_\alpha} / i_\alpha \in I_\alpha, \quad \alpha \in A\}$$

a un punto y_0. Entonces la proyección natural p de Λ en Y es cerrada y compacto-recubridora.

Por la hipótesis, $1_X \times p$ es una identificación de $X \times \Lambda$ en $X \times Y$.

Sea $\alpha \in A$ e $i_\alpha \in I_\alpha$. Para cada $\lambda \in J_{i_\alpha}$ se considera el cerrado

$$E_\lambda^{i_\alpha} = \bigcap_{\nu < \lambda} C_\nu^{i_\alpha} \subset \overline{U}_\alpha$$

y para $\lambda = u_{i_\alpha}$, $E_\lambda^{i_\alpha} = \emptyset$. Es claro que $E_\lambda^{i_\alpha} \neq \emptyset$ para todo $\lambda \in J_{i_\alpha}$.

Sea

$$S_{i_\alpha} = \bigcup_{\lambda \in J_{i_\alpha}} E_\lambda^{i_\alpha} \times \{\lambda\} \subset \overline{U}_\alpha \times \overline{J}_{i_\alpha} \subset X \times J_{i_\alpha}.$$

Entonces S_{i_α} es cerrado en $X \times \overline{J}_{i_\alpha}$. En efecto, Sea

$$(x, \lambda_0) \in X \times \overline{J}_{i_\alpha} - S_{i_\alpha}.$$

Distinguimos los dos casos siguientes:

1) $\lambda_0 < u_{i_\alpha}$.

2) $\lambda_0 = u_{i_\alpha}$.

Si $\lambda_0 < u_{i_\alpha}$, se tienen a su vez los dos casos siguientes:

a) λ_0 tiene un antecesor.

b) λ_0 no tiene antecesor.

Veamos el caso a). Se tiene que $x \notin E_{\lambda_0}^{i_\alpha}$ y por tanto existe V^x, entorno de x en X tal que

$$V^x \cap E_0^{i_\alpha} = \emptyset.$$

Si $\overline{\lambda}_0$ es el antecesor de λ_0, se tiene que

$$V^x \times (\overline{\lambda}_0, u_{i_\alpha}]$$

es un entorno de (x, λ_0) contenido en

$$X \times \bar{J}_{i_\alpha} - S_{i_\alpha}.$$

Caso b). Se considera el conjunto no vacío

$$I = \{\mu \in \bar{J}_{i_\alpha} / x \notin E_\mu^{i_\alpha}\}, \quad (\lambda_0 \in I)$$

y sea μ' el primer elemento de I. Entonces $x \notin E_{\mu'}^{i_\alpha}$ y por tanto existe V^x, entorno de x en X tal que

$$V^x \cap E_{\mu'}^{i_\alpha} = \varnothing.$$

Se verifica que $\mu' < \lambda_0$. En efecto. Si $\lambda_0 = \mu'$, se tiene que $x \in E_\nu^{i_\alpha}$ para todo $\nu < \lambda_0$ y por consiguiente

$$x \in \bigcap_{\nu < \lambda_0} E_\nu^{i_\alpha} = \bigcap_{\nu < \lambda_0} \left(\bigcap_{\pi < \lambda_0} C_\pi^{i_\alpha} \right) = \bigcap_{\pi < \lambda_0} C_\pi^{i_\alpha} = E_{\lambda_0}^{i_\alpha}, \text{ lo cual es absurdo.}$$

Así $V^x \times (\mu', u_{i_\alpha}]$ es un entorno de (x, λ_0) contenido en

$$X \times \bar{J}_{i_\alpha} - S_{i_\alpha}.$$

Si $\lambda_0 = u_{i_\alpha}$. Se considera el conjunto no vacío

$$I = \{\mu \in \bar{J}_{i_\alpha} / x \notin E_\mu^{i_\alpha}\}, \quad \left(\bigcap_j C_j^{i_\alpha} = \varnothing \right)$$

Sea μ' el primer elemento de I. Es claro que $\mu' < \lambda_0$. Como $x \notin E_{\mu'}^{i_\alpha}$, existe V^x, entorno de x en X tal que

$$V^x \cap E_{\mu'}^{i_\alpha} = \varnothing.$$

Entonces $V^x \times (\mu', u_{i_\alpha}]$ es un entorno de (x, λ_0) contenido en

$$X \times \bar{J}_{i_\alpha} - S_{i_\alpha}.$$

Luego queda demostrado que S_{i_α} es cerrado en $X \times \bar{J}_{i_\alpha}$.

Sea

$$S = \bigcup \{S_{i_\alpha} / \alpha \in A,\ i_\alpha \in I_\alpha\}.$$

Se tiene que S es un cerrado en

$$\Sigma \{X \times \bar{J}_{i_\alpha} / \alpha \in A,\ i_\alpha \in I_\alpha\},$$

que es homeomorfo a $X \times \Lambda$. Además, S es $(1_X \times p)$-saturado.

Veamos que $(1_X \times p)$ (S) no es cerrado en $X \times Y$, lo cual contradice que $1_X \times p$ es una identificación.

El punto (x_0, y_0) no pertenece a $(1_X \times p)$ (S). Sin embargo

$$(x_0, y_0) \in \overline{(1_X \times p)\,(S)}.$$

En efecto. Sea $U^{x_0} \times V^{y_0}$ un entorno abierto de (x_0, y_0) en $X \times Y$. Como X es un γ-espacio, existe $\alpha \in A$ y existe $C^{\alpha}_{i_\alpha}$, $i_\alpha \in I_\alpha$, cadena de cerrados en $\bar{U}_\alpha$ que corta a U^{x_0}. Sea

$$\lambda \in J_{i_\alpha} \cap p^{-1}(V^{y_0}).$$

Entonces $E^{i_\alpha}_{\lambda} \cap U^{x_0}$ es no vacío, ya que $C^{\alpha}_{i_\alpha}$ corta a U^{x_0} y en particular

$$E^{i_\alpha}_{\lambda} \cap U^{x_0} \supset C^{i_\alpha}_{\lambda} \cap U^{x_0} \neq \varnothing.$$

Entonces si $x \in E^{\alpha}_{\lambda} \cap U^{x_0}$, es claro que

$$(x, \lambda) \in S \quad \text{y} \quad (x, p(\lambda)) \in (U^{x_0} \times V^{y}) \cap (1_X \times p)\,(S) \neq \varnothing.$$

PROPOSICIÓN 12.—Sea X un γ-espacio T_2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) X es localmente compacto.

b) $1_X \times g$ es una identificación, para toda identificación g.

c) $1_X \times g$ es una identificación para toda aplicación g cerrada, compacta-recubridora, con espacio topológico dominio k-espacio paracompacto y T_2.

DEMOSTRACIÓN.

a) $\Longrightarrow$ b) Es consecuencia del teorema de Whitehead [2].

b) $\Longrightarrow$ c) Basta tener en cuenta que toda aplicación continua, cerrada y suprayectiva es una identificación.

(Para estas dos implicaciones no se precisa que X sea γ-espacio T_2.)

c) $\Longrightarrow$ a) Es consecuencia de la demostración de la proposición anterior teniendo en cuenta que X es T_2.

COROLARIO 13 (E. Michael, [5]).—Sea X un espacio topológico regular. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) X es localmente compacto.

b) $1_X \times g$ es una identificación, para toda identificación g.

c) $1_X \times g$ es una identificación para toda aplicación g cerrada, compacto-recubridora, con espacio topológico dominio k-espacio paracompacto y T_2.

PROPOSICIÓN 14.—Sea X un γ-espacio T_2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) X es localmente compacto.

b) $X \times Y$ es un k-espacio, para cada k-espacio Y.

c) $X \times Y$ es un k-espacio, para cada k-espacio paracompacto y T_2, Y.

DEMOSTRACIÓN.

a) $\Longrightarrow$ b) Es consecuencia de la proposición 6.

b) $\Longrightarrow$ c) Es evidente.

c) $\Longrightarrow$ a).

Supongamos que X no es localmente compacto. Entonces, por la demostración de la proposición 11, existe una identificación $p\colon \Lambda \longrightarrow Y$, donde Y es k-espacio paracompacto y T_2, ya que p es cerrada, tal que $1_X \times p$ no es una identificación. Así, por la proposición 7, $X \times Y$ no es un k-espacio, lo cual contradice la hipótesis.

COROLARIO 15 (E. Michael, [5]).—Sea X un espacio topológico regular. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) X es localmente compacto.

b) $X \times Y$ es un k-espacio, para todo k-espacio Y.

c) $X \times Y$ es un k-espacio, para todo k-espacio paracompacto y T_2, Y.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BOURBAKI, N.: *Theorie des ensembles*. Hermann, 1970.
[2] GARCÍA-MARGALEF-OLANO-OUTERELO-PINILLA: *Topología*, vol. 1. Alhambra, 1975.
[3] KELLEY, J. L.: *General Topology*. Van Nostrand, 1955.
[4] MARGALEF, J.-OUTERELO, E.-PINILLA, J. L.: *Topología*, vol. 5. Alhambra, 1981.
[5] MICHAEL, E.: *Local Compactness and cartesian products of quotient maps and* k-*spaces*. «Ann. Inst. Fourier», vol. 18, 2, 281-286, 1968.

Instituto «Jorge Juan» de
Matemáticas del C. S. I. C.
Serrano, 123. Madrid-6

Universidad Complutense
Facultad de Ciencias Matemáticas
Madrid-3