PROBABILIDAD Y ECONOMÍA 5
Bonos y opciones sobre bonos

J. Margalef Roig, S. Miret Artés
E. Outerelo Domínguez

*

Prefacio

El objetivo de los autores al escribir este libro, que es el quinto y último volumen de la obra *Probabilidad y Economía*, es el análisis de los bonos y de las opciones sobre bonos, determinando, en el caso de las opciones, su precio y cobertura.

Las estructuras temporales, (una estructura temporal es una función que relaciona una determinada variable financiera o parámetro con su fecha de vencimiento), de los tipos de interés, (precios de los bonos cupón cero), junto con el modelo Black-Scholes-Merton, sobre los precios de opciones sobre acciones, (modelo estudiado con detalle en los volúmenes 1 y 4), constituyen los dos pilares fundamentales sobre los que se ha construido, en los últimos cuarenta años, el impresionante edificio de la Matemática Financiera.

Aunque el origen de la modelización de las estructuras temporales de los tipos de interés se remonta al trabajo de R. C. Merton, [58], (1974), el trabajo pionero en la elaboración de modelos de las estructuras temporales de los tipos de interés con incorporación de variación estocástica de los tipos de interés es el de O. Vasiček, [73], (1977), y a partir de este último trabajo, se han elaborado un buen número de modelos, de las citadas estructuras temporales, debido fundamentalmente a que no se ha encontrado, hasta la fecha, un modelo que se pueda considerar *natural*, en el sentido de cumplir el mayor número de las características fijadas, por ejemplo, en L. C. G. Rogers en, [67], (1995), y que son ampliamente aceptadas en la actualidad:

(i). Ser lo suficientemente *flexible*, como para cubrir la mayoría de las situaciones que surgen en la práctica.

(ii). Ser lo suficientemente *simple*, que permita resolver las cuestiones planteadas en un tiempo razonable.

(iii). Estar *bien determinado*, en el sentido que los *inputs* requeridos puedan ser observados o estimados.

(iv). Ser *realista*, es decir, el modelo no deberá dar resultados absurdos.

(v). Tener una buena *adecuación* a los datos.

En algunos de los modelos que se exponen en el libro, se analizan los inconvenientes que poseen en relación con las características anteriores.

Destacamos que existen dos procedimientos principales de modelización de las estructuras temporales de los tipos de interés. A saber,

(1). Descripción de la evolución de los tipos de interés instantáneos.
Un modelo representativo de este método es el de Vasiček, (véase la sección 6.4).

(2). Descripción de la evolución de los precios de los bonos a partir del interés *forward*.
Un modelo representativo de este método es el de Heath, Jarrow, Morton, (véase la sección 6.11).

El contenido del presente libro es pues el siguiente:
En la primera sección se describen las características esenciales de las cuentas bancarias y de los bonos en los mercados financieros reales, a efectos de que el lector adquiera las ideas básicas para una mejor comprensión de los modelos teóricos abstractos que se desarrollan a continuación. En las secciones segunda y tercera se presentan los aspectos teóricos generales de los modelos de las estructuras temporales de los tipos de interés y el teorema fundamental del precio de las opciones sobre bonos. Las restantes

secciones del libro se dedican al estudio de algunos modelos particulares de las estructuras temporales de los tipos de interés.

Finalmente, se advierte al lector que a lo largo de todo este libro, las referencias de resultados de los volúmenes 1, 2, 3 y 4 llevan asociadas **V. 1**, **V. 2**, **V. 3** y **V. 4**, respectivamente.

Nuestro profundo agradecimiento al Dr. D. Manuel Linares Linares (recientemente fallecido) por las fructíferas discusiones y colaboraciones en estos temas a lo largo de más de veinte años. Como homenaje a Manolo tenemos el propósito de escribir un libro sobre la *Teoría del Riesgo* que tanto le interesaba y de la que nos hizo partícipes en los últimos años.

En otro ámbito, agradecemos al Dr. D. José María Sánchez Abril la autoría de la excelente maquetación del libro.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto: FIS2014-52172-C2-1-P (Ministerio de Economía y Competitividad).

LOS AUTORES

Índice general

Capítulo 6

Bonos y opciones sobre bonos

En este capítulo construiremos modelos de las estructuras temporales de los tipos de interés que utilizaremos, fundamentalmente, para dar precio y cobertura a las opciones sobre bonos.

6.1. Cuentas bancarias y bonos

En esta primera sección, detallamos las características esenciales de las cuentas bancarias y de los bonos en un mercado financiero real, con el objetivo de que el lector adquiera las ideas básicas sobre la operativa de estos activos financieros primarios, que intervienen en las distintas modelizaciones de las estructuras temporales de los tipos de interés.

Cuentas bancarias

Depositar dinero en el Banco, Banco que se obliga (y el Regulador le obliga) a pagar intereses al depositante, y establecer garantías suficientes para todos los intervinientes (también garantías del Regulador) constituyen, básicamente, lo que llamamos una cuenta bancaria (CB) abierta por el depositante en el Banco considerado. Una cuenta bancaria es un activo financiero primario, (**V. 4**, pág. 3), ya que da la medida del precio de muchos otros activos financieros.

Para describir las características de una cuenta bancaria, tomamos la recta real, $\mathbb{R}$, como representación del tiempo. Fijamos un número real positivo, $p \in \mathbb{R}$, que determina un periodo de tiempo (usualmente, en el día a día, p indica un determinado número de años, semestres, trimestres, meses, etc.), y damos un número natural $N \in \mathbb{N}$. Finalmente, consideramos un número real positivo t con $Np < t \leqslant (N+1)p$.

(1). En el tiempo $t_0 = 0$ se constituye un Depósito, C_0, en un Banco, ($C_0 \in \mathbb{R}$ con $C_0 > 0$). A C_0 se le llama *capital inicial*.

(2). El Depósito se mantiene en el banco durante un *plazo* o tramo temporal $[0, t] \subset \mathbb{R}$.

(3). El Depósito produce intereses que el Banco abona: C_0 más los intereses constituyen la *capitalización* del Depósito en el tramo temporal $[0, t]$.

(4). La forma de capitalización que se utiliza es la *compuesta*, es decir, los intereses que se van generando se acumulan al capital; cuando los intereses no se acumulan al capital, se dice que la capitalización es *simple*, (capitalización que consiste en el capital inicial más los intereses).

(5). Ocurre a menudo que los intereses se pagan m, (entero positivo), veces en cada uno de los tramos de tiempo determinados por p, $[kp, (k+1)p]$, $k = 0, 1, ..., N$. Si $[kp + (lp/m), kp + ((l+1)p/m)] \subset [0, t]$, $l = 0, ..., m-1$, es uno de los m tramos temporales determinados por m en $[kp, (k+1)p]$, los intereses correspondientes a ese tramo se agregan al capital (acumulado hasta $kp + (lp/m)$) al final del mismo. En este caso, después de añadir los intereses al capital inicial durante el tramo temporal $[0, t]$ y conformar un nuevo capital en t, y tener bien presente la m utilizada para este proceso de cálculo, se dice que el capital nuevo obtenido es una *m-capitalización* de C_0 al final del tramo temporal $[0, t]$.

(6). *Tipo de interés*: Dados el número real no negativo r y el número real positivo p, se dice que r es un *tipo de interés en el período p* si la unidad monetaria produce la cantidad r al final del período p, es decir, un tanto por 1 en el periodo p.

Es natural suponer:

Hipótesis de homogeneidad. Fijado un tipo de interés r en el período p, cada tramo temporal de cualquier equipartición del período p aporta el mismo interés a la unidad monetaria.

De la hipótesis de homogeneidad se deduce que si r es un tipo de interés en el período p, la capitalización de una cantidad C al final de un tramo de tiempo $[t_1, t_2]$ es $C + C(r/p)(t_2 - t_1)$.

Observación. Sean r un tipo de interés positivo en el período p, $z < u < s$ y C el capital de una CB en el tiempo z. Entonces,

$$C+C\frac{r}{p}(u-z)+\left(C+C\frac{r}{p}(u-z)\right)\frac{r}{p}(s-u) = C+C\frac{r}{p}(s-z)+C\frac{r^2}{p^2}(u-z)(s-u) >$$
$$> C + C\frac{r}{p}(s-z),$$

lo cual expresa que la capitalización compuesta de C en el tramo temporal $[z, s]$ con abono de intereses en u, es mayor que la capitalización simple de C en el tramo temporal $[z, s]$.

(7). Hipótesis de homogeneidad de una m-capitalización: En el caso de una m-capitalización, el tipo de interés r depende de m y se designa por $r(m)$, y, por la hipótesis de homogeneidad, la capitalización de una cantidad C al final de cada tramo temporal $[kp/m, (k+1)p/m] \subset [0, t]$ es,

$$C + C\cdot\frac{r(m)}{p}\cdot\frac{p}{m} = C + C\cdot\frac{r(m)}{m}.$$

(8). Para m fijo, al final del tramo temporal $[0, p/m]$ (en el que el capital inicial, C_0, permanece en Depósito del Banco), la capitalización de C_0 al final de dicho tramo es

$$C_0 + C_0\frac{r(m)}{m} = C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^1.$$

Al final del tramo temporal $[0, 2\cdot(p/m)]$ la capitalización de C_0 es

$$C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^1 + C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^1 \frac{r(m)}{m} =$$
$$C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^1 \left(1+\frac{r(m)}{m}\right) = C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^2.$$

(9). Iterando el proceso descrito en **(8)**, se tiene que la capitalización de C_0 al final del tramo temporal $[0, p]$ es

$$C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^m.$$

Observación. Para $m \geqslant 2$ y $r(m) > 0$, se tiene que

$$C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^m = C_0\left(1+m\cdot\frac{r(m)}{m}+\ldots+\left(\frac{r(m)}{m}\right)^m\right) > C_0(1+r(m)),$$

($C_0(1+r(m))$ es la capitalización simple de C_0 al final del período p con tipo de interés $r(m)$).

De la misma forma, la capitalización en el tramo temporal $[0, N_1 p]$, donde N_1 es un número entero con $N_1 \geqslant 1$ es

$$C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mN_1}.$$

(10). En general, teniendo en cuenta **(8)** y **(9)**, la m-capitalización de C_0 al final del tramo temporal $[0, Np+k\cdot(p/m)] \subset [0, t]$, donde N y m son números enteros con $N \geqslant 0$ y $0 \leqslant k \leqslant m$, viene dada por la fórmula

$$C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mN+k} (= C_{Np+k\cdot\frac{p}{m}}(m)).$$

(11). Capitalización de C_0 al final del tramo temporal $[0, t]$.
Se considera la sucesión finita:

$$Np < Np+1\cdot\frac{p}{m} < Np+2\cdot\frac{p}{m} < \ldots < Np+m\cdot\frac{p}{m} = (N+1)p.$$

Como $Np < t \leqslant (N+1)p$, es claro que existe un único número entero no negativo, $s(m)$, tal que $s(m) < m$ y

$$Np + s(m) \cdot \frac{p}{m} < t \leqslant Np + (s(m)+1) \cdot \frac{p}{m}.$$

Se tiene:

(a). $\lim_{m\to+\infty} \left\{Np + s(m) \cdot \frac{p}{m}\right\} = t.$
En efecto: Basta tener en cuenta que la elección de $s(m)$ implica que

$$0 < t - Np - s(m) \cdot \frac{p}{m} \leqslant \frac{p}{m}$$

y que $\lim_{m\to+\infty}\{p/m\} = 0$.

(b) Suponemos que existe $\lim_{m\to+\infty} r(m)$ y que es finito, en cuyo caso lo denotamos por $r(\infty)$. Entonces, se tienen los siguientes resultados:

(b1).

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} C_{Np+s(m)\cdot\frac{p}{m}}(m) &= \lim_{m\to+\infty} \left\{ C_0 \left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{Nm+s(m)} \right\} = \\ &= C_0 \exp\left(r(\infty)\frac{t}{p}\right) = C_0 \exp(\alpha t) (= C_t(\infty)),\end{aligned}$$

donde $\alpha = r(\infty)/p$.
En efecto: Se verifica que $1 + \frac{r(m)}{m} > 0$, $m \in \mathbb{N}^+$, $\lim_{m\to+\infty}\left\{1 + \frac{r(m)}{m}\right\} = 1 + r(\infty) \cdot 0 = 1$, y

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to+\infty} \left\{ \frac{r(m)}{m} \cdot (Nm + s(m)) \right\} = \\ &\qquad = \lim_{m\to+\infty} \left\{ r(m) \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(Np + s(m) \cdot \frac{p}{m}\right) \right\} = r(\infty) \cdot \frac{1}{p} \cdot t,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado **(a)** para obtener el último límite. Entonces, el resultado sigue de la **Proposición IV.3.8.** de la página 91 de [3].

(b2). Un caso particular interesante de **(b1)**, es

$$\lim_{m\to+\infty} C_{Np}(m) = \lim_{m\to+\infty} C_0 \left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mN} =$$
$$= C_0 \exp((r(\infty)/p)Np) = C_0 \exp(r(\infty)N) = C_{Np}(\infty).$$

(b3). Como se ha dicho anteriormente en **(10)**, la capitalización de C_0 al final del tramo temporal $[0, Np + s(m)\cdot(p/m)]$ es

$$C_0 \left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{Nm+s(m)} = C_{Np+s(m)\cdot\frac{p}{m}}(m).$$

Así, por **(b1)**,

$$\lim_{m\to+\infty} C_{Np+s(m)\cdot\frac{p}{m}}(m) = C_0 \exp\left(\frac{r(\infty)}{p}t\right) = C_0 \exp(\alpha t).$$

Por otro lado, la capitalización de $C_{Np+s(m)\cdot\frac{p}{m}}(m)$ al final del tramo temporal $[Np + s(m)\cdot(p/m), t]$ es, por la hipótesis de homogeneidad, (**(6)**, pág. 2),

$$C_{Np+s(m)\cdot\frac{p}{m}}(m) + C_{Np+s(m)\cdot\frac{p}{m}}(m) r(m)\cdot\frac{1}{p}\cdot\left(t - Np - s(m)\cdot\frac{p}{m}\right) =$$
$$= C_{Np+s(m)\cdot\frac{p}{m}}(m)\left(1+\frac{r(m)}{p}\left(t - Np - \frac{p}{m}\cdot s(m)\right)\right) (= C_t(m)).$$

Así, por **(a)**, se tiene que

$$\lim_{m\to+\infty} C_t(m) = \lim_{m\to+\infty} C_{Np+s(m)\cdot\frac{p}{m}}(m) = C_0 \exp(\alpha t) = C_t(\infty).$$

Los límites anteriores conducen a la expresión $C_0 \exp(\alpha t)$, que ya no depende de m, que es la capitalización compuesta de C_0, con *acumulación continua de intereses*, en el tramo temporal $[0, t]$.

Observación. **(i).** Si $[z, u] \subset [0, t]$, entonces la capitalización compuesta con acumulación continua de intereses de una cantidad C en z, al final del tramo temporal $[z, u]$, es $C\exp(\alpha(u-z))$, (cambio de origen).

(ii). Con las notaciones anteriores, si $z < u < s$, $[z, s] \subset [0, t]$, se tiene que

$$C_z(\infty)\exp(\alpha(u-z)) \cdot \exp(\alpha(s-u)) = C_z(\infty)\exp(\alpha(s-z)),$$

fórmula que no se cumple para capitalizaciones compuestas con abono de un número finito de veces de intereses (véase la **Observación** de la página 3).
La propiedad de la capitalización compuesta con acumulación continua de intereses, expresada por la igualdad anterior, se denomina *propiedad de escisión.*
Es interesante destacar que la propiedad de escisión también se verifica para m-capitalizaciones, siempre que se utilicen tramos temporales completos de capitalización:

$$C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mN_1+k_1}\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{m(N_2-N_1)+(k_2-k_1)} = C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mN_2+k_2},$$

donde $N_1 p + k_1(p/m) < N_2 p + k_2(p/m)$.

(b4). Ponemos $\varphi(t) = \exp(\alpha t)$. Entonces, $\varphi(t)$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \alpha\varphi(t), \text{ con condición inicial } \varphi(0) = 1.$$

Finalmente, por la **Proposición IX.3.17.** y el **Ejemplo IX.3.18.(a)** de la página 293 de [3], la capitalización de C_0 en el tramo temporal $[0, t]$, se puede escribir en forma de serie de potencias

$$C_0\exp(\alpha t) = C_0\left(1+\frac{t\alpha}{1!}+\frac{t^2\alpha^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n\alpha^n}{n!}+\ldots\right),$$

que permite aproximar el valor de $C_0\exp(\alpha t)$ por un polinomio en t, y evaluar el error de la aproximación mediante el resto de la serie.

(12). Forma alternativa de obtener la capitalización en el tramo temporal $[0, t]$.
Sean $p \in \mathbb{R}$ con $p > 0$, $m \in \mathbb{N}^+$, C_0 el capital inicial de una CB y $r(m)$ un tipo de interés de la misma en el período p. Suponemos que los intereses de

la CB se pagan en los tiempos $t_1 = p/m$, $t_2 = 2p/m$,..., $t_{m-1} = (m-1)p/m$, $t_m = p$. Entonces, se tiene que la capitalización de la CB evoluciona con periodos de tiempos de amplitud constante p/m:

$$C_0,\ C_1 = C_0 + C_0 r(m)\frac{1}{m},\ C_2 = C_1 + C_1 r(m)\frac{1}{m}, ...,\ C_m = C_{m-1} + C_{m-1} r(m)\frac{1}{m},$$

y se tiene la ecuación en diferencias

$$\frac{\Delta C_n}{C_n} = \frac{C_{n+1} - C_n}{C_n} = r(m)\frac{1}{m} = \frac{r(m)}{p} \cdot \frac{p}{m} = \frac{r(m)}{p}\Delta t,$$

o bien

$$\frac{\frac{\Delta C_n}{\Delta t}}{C_n} = \frac{r(m)}{p},$$

(para cuestiones relativas a las ecuaciones en diferencias, véase [25] o [65]). Suponemos ahora que $\lim_{m\to+\infty} r(m) = r(\infty)$, ($r(\infty)$ tipo de interés instantáneo), y denotamos por $C(t)$ la capitalización de $C_0(= C(0))$ en el tramo temporal $[0, t]$. Entonces, pasando al límite la ecuación anterior, (es decir, pasamos de lo discreto a lo continuo), se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = \frac{r(\infty)}{p},\ (dC(t) = \frac{r(\infty)}{p}C(t)dt), \text{ con condición inicial } C(0) = C_0.$$

Finalmente, integrando esta ecuación diferencial ordinaria se concluye que

$$\ln(C(t)) - \ln(C(0)) = \frac{r(\infty)}{p}t, \text{ y por tanto, } C(t) = C(0)\exp\left(\frac{r(\infty)}{p}t\right),$$

que es la fórmula de capitalización obtenida en **(11)**, (véase, la página 17 de **V. 4**). Esto último justifica, en este caso, el paso al límite de la ecuación en diferencias a la ecuación diferencial ordinaria, que es el problema esencial en este tipo de técnicas de paso de lo discreto a lo continuo.

(13). Se observa, además, que el interés instantáneo de una cuenta bancaria puede variar con el tiempo. En este caso, suponemos que esta variación viene dada por una función $r : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ no negativa e integrable. Con estas hipótesis, por lo dicho en **(12)**, la capitalización de la CB está regida por la ecuación diferencial ordinaria

$$dC(t) = r(t)C(t)dt, \text{ con condición inicial } C(0) = C_0.$$

La integración de esta ecuación diferencial conduce a:

$$\ln(C(t)) - \ln(C(0)) = \int_0^t r(s)ds, \text{ es decir, } C(t) = C(0)\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right).$$

Observamos que el objetivo principal de este libro es analizar el caso más general en el que los tipos de interés constituyen un proceso estocástico.

(14). Condiciones particulares sobre *r(m)*.

Sean $\bar{r} \in \mathbb{R}$, con $\bar{r} \geqslant 0$, y $r(m) = m\left(\exp\left(\frac{\bar{r}}{m}\right) - 1\right)$ un tipo de interés, $m \in \mathbb{N}^+$, en una CB. Entonces, $\lim_{m\to+\infty} r(m) = \bar{r}$, (con las notaciones de **(11)(b)**, $r(\infty) = \bar{r}$). Con esta elección particular de $r(m)$, $m \in \mathbb{N}^+$, se tienen los siguientes resultados:

(i). $m\ln\left(\frac{r(m)}{m} + 1\right) = \bar{r}$ para todo $m \in \mathbb{N}^+$.

(ii). La capitalización $C_{Np}(m)$ de C_0 al final del tramo temporal $[0, Np]$ es $C_0\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{mN} = C_0\exp(\bar{r}N)$, para todo $m \in \mathbb{N}^+$. Por tanto, en este caso particular, $\lim_{m\to+\infty} C_{Np}(m)$, (véase **(11)(b2)**), es el límite de la sucesión constante $C_0\exp(\bar{r}N)$.

(iii). La capitalización $C_{Np+k\cdot(p/m)}(m)$ de C_0 al final del tramo temporal $[0, Np + k\cdot(p/m)]$ es $C_0\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{mN+k} = C_0\exp(\bar{r}(N + (k/m)))$, para todo $m \in \mathbb{N}^+$ y $0 \leqslant k < m$.

(iv). La capitalización $C_{Np+s(m)\cdot(p/m)}(m)$ de C_0 al final del tramo temporal $[0, Np + s(m)\cdot(p/m)]$ es $C_0\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{mN+s(m)} = C_0\exp(\bar{r}(N+(s(m)/m)))$, para todo $m \in \mathbb{N}^+$. Ahora, por **(11)(a)** y la continuidad de la función exponencial, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} C_{Np+s(m)\cdot(p/m)}(m) &= \lim_{m\to+\infty}\{C_0\exp(\bar{r}(N+(s(m)/m)))\} =\\ &= \lim_{m\to+\infty} C_0\exp\left(\bar{r}\frac{1}{p}\left(Np+s(m)\frac{p}{m}\right)\right) = C_0\exp\left(\frac{\bar{r}}{p}t\right),\end{aligned}$$

lo cual da otra demostración, en este caso particular, del resultado del apartado **(11)(b3)**.

(v). Si $0\leqslant k_m\leqslant m$, entonces la capitalización $C_{Np+k_m\cdot(p/m)}(m)$ de C_0 al final del tramo temporal $[0, Np+k_m\cdot(p/m)]$ es

$$C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mN+k_m} = C_0(\exp(\bar{r}/m))^{m(N+k_m/m)} = C_0\exp(\bar{r}(N+k_m/m)),$$

que converge a $C_0\exp(\bar{r}N)$, cuando $m\to+\infty$, si $\lim_{m\to+\infty}\{k_m/m=0\}$, y converge a $C_0\exp(\bar{r}(N+1))$ si $\lim_{m\to+\infty}\{k_m/m\}=1$, (obsérvese que puede no existir el límite de la sucesión $\{k_m/m\}$).

(vi). Finalmente, para $m=1$ se tiene $r(1)=\exp(\bar{r})-1(=\hat{r})$ y $\bar{r}=\ln(r(1)+1)=\ln(\hat{r}+1)$.

(15). Paralelamente al tipo de interés en el período p, los bancos también consideran el tipo de *descuento*, q, en ese mismo período de tiempo, que se establece de la siguiente forma: Un inversor tiene un pagaré (**V. 4**, **(4d)** de la página 3), que vence al final de un período de tiempo p y tiene de valor nominal D_1. El banco se lo descuenta mediante q, $D_1(1-q)=D_0$, es decir, le paga (ahora en $t=0$) D_0 al inversor, y se queda con el pagaré, cuyo nominal, D_1, cobrará al final del período de tiempo p, (los pagarés, en muchas ocasiones, los pueden emitir los mismos bancos como instrumentos para dotarse de liquidez).
Supongamos que el inversor capitaliza D_0 mediante el tipo de interés r en el período de tiempo p, **(6)**, y que la capitalización de D_0 al final de período de tiempo p, $D_0(1+r)$, es igual a D_1. Bajo esta hipótesis, se tiene,

$$D_1=D_0(1+r),\ \ D_1(1-q)=D_0,\ \text{ y }\ (1-q)(1+r)=1.$$

Por tanto,

$$q = \frac{r}{1+r}.$$

(16). Tipo o tasa anual equivalente (TAE).

Supongamos una m-capitalización de un capital inicial, C_0, en un período p de un año y con tipo de interés $r(m)$. Por lo visto en **(9)**, esta capitalización al cabo del año es $C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^m$. Se define el *tipo de interés anual equivalente*, (TAE), de la capitalización anterior, como el tipo de interés $r_a(m)$ tal que la 1-capitalización de C_0 al final del año con este tipo de interés coincide con la capitalización dada. Entonces, se tiene:

$$C_0 + C_0 r_a(m) = C_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^m,$$

y por tanto, $r_a(m) = \left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^m - 1$.

Análogamente, supongamos una capitalización compuesta, con acumulación continua de intereses, **(11)**, de un capital inicial, C_0, en un período p de un año y con tipo de interés $r(\infty)$. Por lo visto en **(11)**, esta capitalización al cabo del año es $C_0 \exp(r(\infty))$. Se define el *tipo de interés anual equivalente*, (TAE), de la capitalización anterior, como el tipo de interés $r_a(\infty)$ tal que la 1-capitalización de C_0 al final del año con este tipo de interés coincide con la capitalización dada. Entonces, se tiene:

$$C_0 + C_0 r_a(\infty) = C_0 \exp(r(\infty)),$$

y por tanto, $r_a(\infty) = \exp(r(\infty)) - 1$.
Obsérvese que si $\lim_{m\to+\infty} r(m) = r(\infty)$, entonces $\lim_{m\to+\infty} r_a(m) = r_a(\infty)$.

Bonos

Los bonos son activos financieros primarios, (**V. 4**, pág. 3), que emiten los Estados y las Corporaciones, en forma de títulos, para captar capital. Su principal atractivo es su bajo riesgo, (algún Estado ha caído en *default* recientemente), y los índices numéricos asociados a los bonos dan información rápida y precisa de dichos títulos en los Mercados Financieros: El interés sobre los bonos es fijo y abonable en plazos de tiempos regulares, (*cupones*), y con abono del préstamo en una fecha garantizada, (*fecha de vencimiento*).

Se pueden caracterizar los bonos emitidos en un tiempo $t = 0$ por los siguientes índices numéricos:

(1). El *nominal*, $P(T,T)$, es la cantidad que se debe pagar al tenedor del bono en la *fecha de vencimiento*, T, (la fecha de vencimiento es usualmente (en el caso de la Deuda del Estado Español) de 18 meses (*Letras*), de 2 a 10 años (*Bonos*) y $T \geqslant 30$ años (*Obligaciones*)).

(2). El *tipo de interés* del bono, r_c, es un factor usualmente positivo y menor que 1 que afecta al tanto por uno del capital que permanece en un período, dando lugar al valor del cupón: $r_c \cdot P(T,T)$.

(3). El *precio inicial* $P(0,T)$ del bono de fecha de vencimiento T en el tiempo $t=0$.

(4). El *valor de mercado* $P(t,T)$ en el tiempo t, $(0 \leqslant t \leqslant T)$. Aunque en principio es posible que $P(t,T)$ sea mayor que $P(T,T)$, usualmente, $P(t,T) \leqslant P(T,T)$.

(5). El *rendimiento corriente* $r_c(t,T) = \frac{r_c \cdot P(T,T)}{P(t,T)}$, $0 < t < T$.

(6). El *rendimiento al vencimiento*, $\rho = \rho(T-t,T)$, de un bono con pago de cupones en los tiempos $T_1 < T_2 < \ldots < T_n$, con $t \leqslant T_1$ y $T_n = T$, es la solución de la ecuación

$$P(t,T) = \sum_{k=1}^{n} r_c P(T,T) \exp\big(-\rho\,(T_k - t)\big) + P(T,T)\exp(-\rho(T-t)),$$

ecuación, que expresa que la suma de los valores descontados de los intereses abonados (cupones) en el intervalo $(t,T]$ y del valor descontado del nominal, (véase **(15)** de la página 10), es el valor corriente del bono en el tiempo t.

Eventualmente, en algún tipo de bonos se paga una *prima de emisión* (pago, por parte del inversor, de un precio inferior al nominal del bono) o una *prima de amortización* (pago, por el emisor, de un precio superior al nominal del bono). Los bonos sin estos tipos de primas se llaman *bonos estándar*.
En el caso de un bono con una prima de amortización A, el rendimiento al vencimiento viene dado por

$$P(t,T) = \sum_{k=1}^{n} r_c P(T,T) \exp\left(-\rho\,(T_k - t)\right) + (P(T,T) + A)\exp(-\rho(T-t)),$$

A un bono con nominal 1 y vencimiento T, se le llama *bono cupón-cero de vencimiento T*.
El rendimiento al vencimiento, $\rho = \rho(T-t,T)$, de un bono cupón-cero está definido por la fórmula, (véase **(6)**),

$$P(t,T) = \exp\left(-\rho(T-t)\right).$$

Ejercicios y Problemas

1.1. Calcular el tiempo que se necesita para duplicar el capital C_0 de una cuenta bancaria, con acumulación continua de intereses, y tipo de interés $r(\infty) = 0{,}02$.

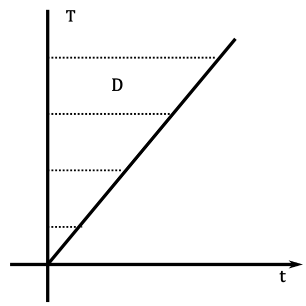
1.2. Calcular el precio inicial de un bono de nominal 1000 Euros y vencimiento a 3 años, que proporciona un cupón anual de 15 Euros, amortiza con una prima de 10 Euros y tiene un rendimiento al vencimiento del 5 por ciento.

1.3. Determinar el rendimiento al vencimiento de un bono estándar de 100 Euros de nominal, fecha de vencimiento a 2 años y que paga un cupón anual del 5 por ciento.

1.4. Un inversor posee un bono estándar con fecha de vencimiento a cinco años con valor nominal de 1000 euros y pago de cupones al final de cada año con tipo de interés del $0{,}05$. Suponiendo que el valor al vencimiento de dicho bono es de $0{,}1$, calcular el valor de mercado del bono a los 30 meses de su vencimiento.

6.2. Estructuras temporales de los tipos de interés

Sea el subconjunto del plano $(D=)\{(t,T): t \geqslant 0,\ T \geqslant t\}$ y sea $R(t,T)$ una función no negativa ($\geqslant 0$) definida en D.



Consideramos la función $F: D \to \mathbb{R}$, dada por $F(t,T) = \exp((T-t)R(t,T))$, $(t,T) \in D$. Obsérvese que para todo $t \in J_\infty = [0,+\infty)$, se verifica que $F(t,t) = 1$.
Interpretación financiera: $R(t,T)$ es el tipo de interés (medio) que se aplica a la petición de préstamos (colocación de depósitos) con inicio en t y vencimiento en T. Por consiguiente, por la fórmula de capitalización (**(13)**, página 8), $F(t,T)$ es lo que habrá que devolver (cobrar) en T, si se ha pedido prestado (colocado) 1 euro en t.

Como todos los tipos de interés medio, $R(t,T)$, son conocidos para todo $(t,T) \in D$, se dice que estamos en un escenario financiero de *certidumbre*. Cuando para cada $(t,T) \in D$, $R(t,T)$ es una variable aleatoria en un espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$, se dice que estamos en un escenario financiero de *incertidumbre*.

Proposición 6.2.1. *Consideramos un escenario financiero de certidumbre y sin arbitrajes (es decir, no existen ganancias sin riesgo, (**V. 4**, pág. 15)). Entonces, se cumple $F(t,s) = F(t,u) \cdot F(u,s)$, siempre que $t < u < s$.*

Demostración. Sean $t < u < s$ tales que $F(t,s) > F(t,u) \cdot F(u,s)$. En el tiempo t pedimos prestada la cantidad C con el compromiso de devolverla en

u. Inmediatamente (es decir, también en t) la colocamos hasta s (es decir, con vencimiento s). Al llegar al tiempo u se toma prestada la cantidad $CF(t,u)$, a devolver en s, y se paga el primer préstamo. Al llegar a s debemos pagar $CF(t,u)F(u,s)$ y debemos cobrar $CF(t,s)$, luego ha habido arbitraje, (es decir, ganancia sin riesgo).
Si $t<u<s$ son tales que $F(t,s)<F(t,u)\cdot F(u,s)$, en el tiempo t pedimos prestada la cantidad C con el compromiso de devolverla en s. También en el tiempo t la colocamos hasta u. En u cobramos $CF(t,u)$ y en ese mismo tiempo colocamos la cantidad cobrada hasta s. Al llegar a s debemos pagar $CF(t,s)$ y debemos cobrar $CF(t,u)\cdot F(u,s)$, luego tenemos de nuevo arbitraje. Por tanto, $F(t,s)=F(t,u)\cdot F(u,s)$. □

Observación. La capitalización utilizada en la proposición anterior es compuesta con acumulación continua de intereses (pág. 6), y por tanto la fórmula obtenida no está en contradicción con lo dicho en la **Observación** de la página 3, (véase la **Observación** de la página 6).

La relación $F(t,s)=F(t,u)\cdot F(u,s)$, para todo $t<u<s$, junto a $F(t,t)=1$, para todo $t\in J_\infty$, y suficiente regularidad para R, implican que existe $r(t)$ tal que para todo $t\in D_T=\{v:\ (v,T)\in D\}$

$$F(t,T)=\exp\left(\int_t^T r(s)ds\right), \tag{6.1}$$

(véase **(13)** de la página 8). En efecto: Como $F(t,T)=F(0,T)/F(0,t)$, basta tomar

$$r(s)=\frac{\partial \ln(F(0,s))}{\partial s}=\frac{1}{F(0,s)}\frac{\partial F(0,s)}{\partial s}=R(0,s)+s\cdot\frac{\partial R(0,s)}{\partial s}.$$

Como consecuencia de (6.1) se tiene que, en un escenario financiero de certidumbre y suficiente regularidad de R, para todo $t\in[0,T)$,

$$R(t,T)=\frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds, \tag{6.2}$$

y por tanto

$$\lim_{T\to t} R(T,t)=r(t).$$

A $r(t)$ se le interpreta como el *tipo de interés instantáneo*. Por consiguiente, $R(t,T)$ es el *tipo de interés medio* como se ha dicho anteriormente.

Como se ha dicho en la página 13, un *bono cupón-cero de vencimiento* T es un título que da derecho a una unidad, de la moneda que se utilice, en el tiempo T. Hemos designado por $P(t,T)$ el valor de mercado del título en el tiempo $t \leqslant T$, (**(4)** de la página 12). En el caso de un escenario financiero de certidumbre, por la fórmula de capitalización, (**(13)**, pág. 8), se tiene que $P(T,T)=1$ y $P(t,T)\exp((T-t)R(t,T))=1$, de donde $P(t,T)=\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)$. En el caso de un escenario financiero de incertidumbre, como veremos más adelante, $P(t,T)$ se determinará a partir de la ecuación diferencial estocástica que, en cada caso, se elija para determinar la evolución de los tipos de interés.

De la igualdad (6.2) se deduce que

$$R(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t}, \quad t\in[0,T). \tag{6.3}$$

A la cantidad $R(t,T)$ se le llama, frecuentemente, *rendimiento (yield)* del bono cupón-cero de vencimiento T en el tiempo $t<T$ (debido a los intereses que genera en el tiempo restante $T-t$). En este caso, a la gráfica de la función, $t\mapsto R(t,T)$, se le llama *curva de rendimiento (yield curve)* del bono cupón-cero de vencimiento T. Teniendo en cuenta la notación de la página 12, de (6.3) se deduce que $R(t,T)=\rho=\rho(T-t,T)$.
Las cantidades $R(t,T)$ son especialmente útiles cuando se consideran bonos cupón-cero con distintos vencimientos $T>t$. En este caso, a la gráfica de la función, $T\mapsto R(t,T)$, se le llama *curva de tipos de interés (o curva de rendimiento de la familia de bonos cupón-cero)* en el tiempo t.

Pasamos al estudio de los escenarios financieros de incertidumbre y a la construcción de los modelos de estructuras temporales de los tipos de interés.
Sean $\left(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T},P\right)$ una base estocástica, (**V. 4**, pág. 11), y $\widetilde{W}=\{W_t\}_{t\in J_T}$ un proceso estocástico de Wiener, (**V. 3**, pág. 83), en el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathscr{F},P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P. Consideramos los siguientes

activos financieros:

(1). Un activo financiero S^0, (activo sin riesgo), tal que su precio en el tiempo t viene dado por

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right), \tag{6.4}$$

donde $\{r(t)\}_{t\in J_T}$ es un proceso estocástico real, en el espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$, medible y adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ con $\int_0^T |r(s)|ds < +\infty$, ($P$-a.s.). Obsérvese que si la variable aleatoria $r(t)$ es constante de valor $r(t) \in \mathbb{R}$, para todo $t \in J_T$, entonces, la fórmula (6.4) nos dice que S^0 se puede considerar como una cuenta bancaria de capital inicial $C_0 = 1$ y tipo de interés instantáneo variable dado por la función $r : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto r(t)$, (véase **(13)**, pág. 8).

(2). Los bonos cupón-cero de vencimiento menor o igual que T, (activos con riesgo).
Para cada $u \leqslant T$ se toma el proceso estocástico real adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$, $\{P(t,u)\}_{t\in J_u}$, tal que $P(u,u) = 1$ y la variable aleatoria $P(t,u)$ es el precio en t del bono cupón-cero de vencimiento en u.

Hacemos la siguiente hipótesis:

(H). Existe una probabilidad P^*, en el espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$, equivalente a P, (**V. 4**, pág. 24), tal que para todo $u \in [0, T]$, el proceso estocástico real

$$\overline{P}(t,u) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) P(t,u),\ t \in J_u \tag{6.5}$$

es una martingala, (**V. 3**, páginas. 58 y 59), en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$ y a P^*, (a $\overline{P}(t,u)$ se le llama precio actualizado en t del bono cupón-cero de vencimiento en u, (**V. 4**, pág. 14)).
A P^* se le llama *probabilidad neutral al riesgo (risk-neutral)* y a P *probabilidad del mundo real (real-world).*

Proposición 6.2.2. *Con las notaciones anteriores, se tiene*

(1). *Para todo* $u \in J_T$, $\overline{P}(t,u) = E^*\left(\overline{P}(u,u)|\mathscr{F}_t\right) = E^*\left(\exp\left(-\int_0^u r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right)$, $t \in J_u$.

(2). *Para todo* $u \in J_T$, $P(t,u) = E^*\left(\exp\left(-\int_t^u r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right)$, $t \in J_u$.

Demostración. **(1).** Las dos igualdades siguen fácilmente de la definición de $\overline{P}(u,u)$ y de ser $\left\{\overline{P}(t,u)\right\}_{t\in J_u}$ una martingala respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$ y a P^*, (**V. 3**, páginas 58 y 59).

(2). La igualdad es consecuencia de **(1)** y la propiedad **(11)** de la esperanza matemática condicionada (**V. 2**, pág. 221).

□

Lema 6.2.3. *Sean* $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P\right)$ *una base estocástica y* Q *una probabilidad en* $(\Omega, \mathscr{F})$ *absolutamente continua con respecto a* P, *(en particular, equivalente a* P*), (*$Q \ll P$*), (**V. 2**, pág. 26), es decir,* $Q(A) = 0$ *siempre que* $P(A) = 0$, $A \in \mathscr{F}$. *Entonces,*

(1). *Se tiene la densidad,* L_T, *de* Q *respecto a* P, *(**Definición 3.4.27.**, (**V. 2**, pág. 188);* L_T *es variable aleatoria, en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, *no negativa (*$L_T \geqslant 0$*), tal que* $dQ = L_T dP$, *o bien* $Q(A) = \int_A L_T dP$, $A \in \mathscr{F}$; L_T *es única (P-a.s.)).*

(2). *Para toda variable aleatoria, en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, *no negativa* ξ, *(*$\xi \geqslant 0$*), se tiene que* $E^Q(\xi) = E(\xi L_T)$. *Además, si* ξ *es* $\mathscr{F}_t$*-medible,* $t \in J_T$, *entonces* $E^Q(\xi) = E(\xi L_t)$, *donde* $L_t = E(L_T|\mathscr{F}_t)$, *(obsérvese que* $E(L_T|\mathscr{F}_T) = L_T$, *(*$\mathscr{F}_T = \mathscr{F}$*)).*

(3). *Para todo* $t \in J_T$, $L_t = E(L_T|\mathscr{F}_t)$ *es la densidad de* $Q|_{\mathscr{F}_t}$ *respecto a* $P|_{\mathscr{F}_t}$, *es decir,* $Q(A) = \int_A L_t dP$, $A \in \mathscr{F}_t$.

(4). *Para todo* $u \in J_T$ *y toda variable aleatoria* ξ, *en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $\mathscr{F}_u$*-medible, se verifica* $E^Q(\xi|\mathscr{F}_t) \cdot L_t = E(\xi L_u|\mathscr{F}_t)$, *para todo* $t \in J_u$.

Demostración. **(1).** Caso particular del **Teorema 3.4.26 (Radon-Nikodym).**, (**V. 2**, pág. 187)).

(2). Por **(1)**, para todo $A \in \mathscr{F}_t$ se tiene que $E^Q(I_A)) = Q(A) = \int_A L_T dP = E(I_A L_T)$ y, por tanto, se verifica que $E^Q(\xi) = E(\xi L_T)$ para toda variable aleatoria simple no negativa. Así, la primera parte de **(2)** es consecuencia del **Teorema 3.4.7 (convergencia monótona; Lebesgue)**, (**V. 2**, pág. 171).

Supongamos, ahora, que ξ es $\mathscr{F}_t$-medible. Entonces, por las propiedades **(11)** y **(7)(a)** de la esperanza matemática condicionada, (**V. 2**, pág. 221),

$$E(\xi L_t) = E(\xi E(L_T|\mathscr{F}_t)) = E(E(\xi L_T|\mathscr{F}_t)) = E(\xi L_T) = E^Q(\xi).$$

(3). Es consecuencia de **(2)**.

(4). Por **(2)** y la definición de esperanza matemática condicionada, para todo $A \in \mathscr{F}_t$,

$$\int_A E^Q(\xi|\mathscr{F}_t) \cdot L_t dP = \int_A E^Q(\xi|\mathscr{F}_t)\, dQ = \int_A \xi dQ = \int_A \xi L_u dP,$$

y, por la definición de esperanza matemática condicionada, se concluye que $E^Q(\xi|\mathscr{F}_t) \cdot L_t = E(\xi L_u|\mathscr{F}_t)$. □

Proposición 6.2.4. *Sean $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P)$ una base estocástica, Q una probabilidad en $(\Omega, \mathscr{F})$ equivalente a P y $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$ un proceso estocástico de Wiener, en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P con $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P$, $t \in J_T$, (página 24 de **V. 2** y página 23 de **V. 3**). Se considera la densidad L_T de Q respecto a P, $dQ = L_T dP$, y el proceso estocástico $\{L_t = E(L_T|\mathscr{F}_t)\}_{t\in J_T}$, (**Lema 6.2.3.**). Entonces, existe un proceso estocástico, $\widetilde{\theta} = \{\theta_t\}_{t\in J_T}$, medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ con $P\left(\int_0^T \theta_s^2 ds < +\infty\right) = 1$, tal que, para todo $t \in J_T$,*

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right), \ (P - a.s.).$$

Además, $\widetilde{W^*} = \left\{W_t^*\right\}_{t\in J_T}$, donde $W_t^* = W_t - \int_0^t \theta_s ds$, $t \in J_T$, es un proceso estocástico de Wiener, en $(\Omega, \mathscr{F}, Q)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a Q.

Demostración. El proceso estocástico $\widetilde{L} = \{L_t\}_{t\in J_T}$ es una martingala, en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P, (**Ejemplo 2**, (**V. 3**, pág. 61)). Como la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ es continua por la derecha, ((**2**) de la página 11 de **V. 4**), se tiene que $\widetilde{L}$ es un proceso estocástico continuo por la derecha, (**V. 3**, pág. 3), (véase el **Problema 2.2**, pág. 26). Además, por **(3)** del lema anterior, $\sup_{t\in J_T} E\left(L_t^2\right) \leqslant 1 < +\infty$. Por tanto, $\widetilde{L}$ es una martingala de cuadrado integrable, (**V. 3**, pág. 175).

Por el **Teorema 4.11.11.**, (**V. 3**, página 183), existe un proceso estocástico $\widetilde{H} = \{H_t\}_{t\in J_T}$, medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ tal que $E\left[\int_0^T H_t^2 dt\right] < +\infty$, y para todo $t \in J_T$,

$$L_t = L_0 + \int_0^t H_s dW_s, \; (P - a.s.).$$

Por otra parte, $E(L_T) = 1$, ya que L_T es una densidad, y por tanto $L_0 = E(L_T|\mathscr{F}_0)) = E(L_T) = 1$, (puesto que $W_0 = 0$, (P-a.s.), se tiene que $\mathscr{F}_0 = \left\{F : F \in \mathscr{F}, \text{ y } P(F) = 0 \text{ o } P(F^c) = 0\right\}$), (véase el **Problema 2.1**, pág. 26).
Como P y Q son probabilidades equivalentes, entonces $P(L_T > 0) = 1$, (**V. 4**, pág. 24). En general, $P(L_t > 0) = 1$, para todo $t \in J_T$. Se prueba que

$$P\left(\left\{\omega : \omega \in \Omega \text{ y para todo } t \in J_T, \left(L_0 + \int_0^t H_s dW_s\right)(\omega) > 0\right\}\right) = 1.$$

Aplicando la fórmula de Itô, (**Teorema 4.8.5.**, (**V. 3**, pág. 128)), al proceso estocástico $\{L_t\}_{t\in J_T}$, tomando $f(t,x) = \ln(x)$, se obtiene:

$$\ln(L_t) = \int_0^t \frac{H_s}{L_s} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{H_s^2}{L_s^2} ds, \; (P - a.s.), \; t \in J_T,$$

y $P\left(\int_0^T \left(H_s^2/L_s^2\right) ds < +\infty\right) = 1$. Para la primera parte de la proposición basta tomar $\theta_t = H_t/L_t$, $t \in J_T$.
Finalmente, que $\widetilde{W^*}$ es un proceso estocástico de Wiener es consecuencia del **Teorema 4.12.5 (Girsanov).**, (**V. 3**, pág. 192). □

Proposición 6.2.5. *Sea el escenario financiero de incertidumbre dado en las páginas 16 y 17, y supongamos que se verifica la hipótesis* **(H)** *y que para todo* $t \in J_T$, $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P$. *Se consideran la densidad de* P^*, *(probabilidad de la hipótesis* **(H)***), respecto a* P, L_T, *y* $L_t = E(L_T|\mathscr{F}_t)$, $t \in J_T$, *(***Lema 6.2.3.***). Entonces, existe un proceso estocástico* $\tilde{q} = \left\{q_t\right\}_{t\in J_T}$ *medible y adaptado a* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *con* $P\left(\int_0^T q_s^2 ds < +\infty\right) = 1$, *tal que*

(1). $L_t = \exp\left(\int_0^t q_s dW_s - (1/2)\int_0^t q_s^2 ds\right)$, *($P$-a.s.).*

(2). $\widetilde{W^*} = \left\{W_t^*\right\}_{t\in J_T}$, *donde* $W_t^* = W_t - \int_0^t q_s ds$, $t \in J_T$, *es un proceso estocástico de Wiener, en* $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, *respecto a* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *y a* P^*.

(3). *Para todo $t,u \in J_T$ con $t \leqslant u$, se tiene*

$$P(t,u) = E\left[\exp\left(-\int_t^u r(s)ds + \int_t^u q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_t^u q_s^2 ds\right)|\mathscr{F}_t\right].$$

Demostración. **(1).** y **(2).** Son consecuencia de la **Proposición 6.2.4.**.
(3). Por **(2)** de la **Proposición 6.2.2.**, (página 17), tenemos que $P(t,u) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^u r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right]$, $t \in J_u$. Así, por **(4)** del **Lema 6.2.3.** y propiedades de la esperanza matemática condicionada (**V. 2**, pág. 221),

$$P(t,u) = E\left[\exp\left(-\int_t^u r(s)ds\right)L_u|\mathscr{F}_t\right]L_t^{-1} = E\left[\exp\left(-\int_t^u r(s)ds\right)L_uL_t^{-1}|\mathscr{F}_t\right]$$

y por **(1)** se concluye que

$$P(t,u) = E\left[\exp\left(-\int_t^u r(s)ds + \int_t^u q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_t^u q_s^2 ds\right)|\mathscr{F}_t\right].$$

□

Observación. En el caso de un escenario financiero de incertidumbre hemos partido de la base estocástica $\left(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T},P\right)$, el proceso de Wiener $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$, en $(\Omega,\mathscr{F},P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P con $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P$, $t \in J_T$, los procesos estocásticos $\{r(t)\}_{t\in J_T}$ y $\{P(t,u)\}_{t\in J_u}$, $u \leqslant T$, y la probabilidad P^*. Entonces, se obtiene la **Proposición 6.2.2.**, (pág. 17), y la **Proposición 6.2.5.** anterior. Veamos una especie de recíproco:
Sean la base estocástica $\left(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T},P\right)$, el proceso estocástico de Wiener $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$, en $(\Omega,\mathscr{F},P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P con $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P$, $t \in J_T$, los procesos estocásticos $\{r(t)\}_{t\in J_T}$ y $\{P(t,u)\}_{t\in J_u}$, $u \leqslant T$, (nada se dice de la probabilidad P^*). Supongamos que existe un proceso estocástico $\tilde{\kappa} = \{\kappa(t)\}_{t\in J_T}$ medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ tal que:
(1). $E\left[\int_0^T \kappa(s)^2 ds\right] < +\infty$ y

$$\exp\left(\int_0^t \kappa(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \kappa(s)^2 ds\right)\left(=\overline{L}_t\right),\ t \in J_T,$$

es una martingala respecto $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P, (para tener esta condición de martingala es suficiente que se cumpla $E\left[\exp\left((1/2)\int_0^T \kappa(t)^2 dt\right)\right] < +\infty$,

(**Teorema 4.12.2.**, (**V. 3**, pág. 190))).
(2). Para todo $t, u \in J_T$ con $t \leqslant u$, se tiene

$$P(t,u) = E\left[\exp\left(-\int_t^u r(s)ds + \int_t^u \kappa(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_t^u \kappa_s^2 ds\right)|\mathscr{F}_t\right].$$

Entonces, $E\left(\overline{L}_T\right) = 1$ y, por tanto, se tiene la probabilidad $\overline{P} = \overline{L}_T dP$ en el espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$. Además,

$$\left(\overline{P}(t,u) =\right)\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)P(t,u) = \overline{E}\left[\exp\left(-\int_0^u r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right], t \leqslant u \leqslant T,$$

y por consiguiente, para todo $u \in J_T$, el proceso estocástico $\left\{\overline{P}(t,u)\right\}_{t\in J_u}$ es una martingala, en $\left(\Omega, \mathscr{F}, \overline{P}\right)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$ y a $\overline{P}$, (**Ejemplo 2**, (**V. 3**, pág. 61)).
En efecto: Como el proceso estocástico $\left\{\overline{L}_t\right\}_{t\in J_T}$ es una martingala respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P, $E\left(\overline{L}_T\right) = E(L_0) = 1$, (**V. 3**, pág. 60), y además $\overline{L}_t = E\left(\overline{L}_T|\mathscr{F}_t\right)$, $t \in J_T$. Por tanto, por el **Lema 6.2.3.(4)**), (pág. 18)), se tiene que

$$\overline{E}\left[\exp\left(-\int_0^u r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right]\cdot \overline{L}_t = E\left[\exp\left(\int_0^u r(s)ds\right)\overline{L}_u|\mathscr{F}_t\right],$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned}\overline{E}\left[\exp\left(-\int_0^u r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right] &= E\left[\exp\left(\int_0^u r(s)ds\right)\overline{L}_u|\mathscr{F}_t\right]\cdot \overline{L}_t^{-1} = \\ &= \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)P(t,u) = \overline{P}(t,u).\end{aligned}$$

Proposición 6.2.6. *Con las hipótesis de la proposición anterior, se verifica que para cada vencimiento u, existe un proceso estocástico* $\widetilde{\sigma^u} = \left\{\sigma_t^u\right\}_{t\in J_u}$, *medible y adaptado a* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$, *tal que en* J_u *se tiene*

$$dP(t,u) = \left(r(t) - \sigma_t^u q_t\right)P(t,u)dt + \sigma_t^u P(t,u)dW_t. \tag{6.6}$$

Demostración. Sabemos que $\left\{\overline{P}(t,u)\right\}_{t\in J_u}$ es una martingala, en $(\Omega,\mathscr{F},P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$ y a P^*, (hipótesis **(H)**, pág. 17). Sean L_T la densidad de P^* respecto a P, $dP^* = L_T dP$, y $L_t = E(L_T|\mathscr{F}_t)$, $t\in J_T$. Entonces, se prueba que $\left\{\overline{P}(t,u)L_t\right\}_{t\in J_u}$ es una martingala, en $(\Omega,\mathscr{F},P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$ y a P. En efecto: Por el **Lema 6.2.3.(2)**, (pág. 18), se tiene que $E\left(\overline{P}(s,u)L_s\right) = E^*\left(\overline{P}(s,u)\right) < +\infty$, $s\in J_u$. Así, basta probar que

$$E\left(\overline{P}(t,u)L_t|\mathscr{F}_s\right) = \overline{P}(s,u)L_s,\ \ s\leqslant t.$$

Por la definición de esperanza matemática condicionada es suficiente probar que

$$\int_A \overline{P}(t,u)L_t dP = \int_A \overline{P}(s,u)L_s dP,\ \ A\in\mathscr{F}_s.$$

Teniendo en cuenta que L_t es la densidad de P^* respecto a P en $\mathscr{F}_t$, es decir, $P^*(A) = \int_A L_t dP$, $A\in\mathscr{F}_t$, (**Lema 6.2.3.(3)**, pág. 18), lo que hay que probar es

$$\int_A \overline{P}(t,u)dP^* = \int_A \overline{P}(s,u)dP^*,\ \ A\in\mathscr{F}_s.$$

Pero esto último es consecuencia directa de que $\left\{\overline{P}(t,u)\right\}_{t\in J_u}$ es martingala respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$ y a P^*.

Además, $\overline{P}(t,u)L_t > 0$, (P-a.s.), para todo $t\in J_u$ (ya que $\xi > 0$, (P-a.s.), implica que $E(\xi|\mathscr{F}_t) > 0$).

Por el **Teorema 4.11.11.**, (**V. 3**, pág. 183), existe un proceso estocástico medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$, $\widetilde{\theta^u} = \left\{\theta_t^u\right\}_{t\in J_u}$, tal que $\int_0^u \left(\theta_t^u\right)^2 dt < +\infty$, ($P$-a.s.), y para todo $t\in J_u$,

$$\overline{P}(t,u)L_t = \overline{P}(0,u)L_0 + \int_0^t \theta_s^u dW_s = P(0,u) + \int_0^t \theta_s^u dW_s,\ \ (P-a.s.).$$

Se prueba que

$$P\left(\left\{\omega:\ \omega\in\Omega\ \text{ y para todo } t\in J_u,\ \left(P(0,u)+\int_0^t \theta_s^u dW_s\right)(\omega) > 0\right\}\right) = 1.$$

Aplicando la fórmula de Itô, (**Teorema 4.8.5.**, (**V. 3**, pág. 128)), al proceso estocástico $\left\{\overline{P}(t,u)L_t\right\}_{t\in J_u}$, tomando $f(t,x)=\ln(x)$, se obtiene

$$\ln\left(\overline{P}(t,u)L_t\right)=\ln(P(0,u))+\int_0^t \frac{\theta_s^u}{\overline{P}(s,u)L_s}dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\left(\theta_s^u\right)^2}{\overline{P}(s,u)^2L_s^2}ds,\ (P-a.s.).$$

Tomando $\gamma_t^u=\theta_t^u/\overline{P}(t,u)L_t$, se tiene la fórmula

$$\overline{P}(t,u)L_t=P(0,u)\cdot\exp\left(\int_0^t \gamma_s^u dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\gamma_s^u\right)^2ds\right),$$

de donde

$$\begin{aligned}&P(t,u)=P(0,u)\cdot\\&\cdot\exp\left(\int_0^t r(s)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\gamma_s^u\right)^2ds+\frac{1}{2}\int_0^t q_s^2ds+\int_0^t\gamma_s^u dW_s-\int_0^t q_s dW_s\right).\end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la fórmula de Itô, (**Teorema 4.8.5.**, (**V. 3**, pág. 128)), al proceso estocástico

$$\ln\left(\frac{P(t,u)}{P(0,u)}\right)=\int_0^t\left[r(s)-\frac{1}{2}\left(\gamma_s^u\right)^2+\frac{1}{2}q_s^2\right]ds+\int_0^t\left[\gamma_s^u-q_s\right]dW_s,\ t\in J_u,$$

tomando $f(t,x)=\exp(x)$, se tiene:

$$\begin{aligned}P(t,u)&=P(0,u)+\\&+\int_0^t\left[P(s,u)\left(r(s)-\frac{1}{2}\left(\gamma_s^u\right)^2+\frac{1}{2}q_s^2\right)+\frac{1}{2}P(s,u)\left(\gamma_s^u-q_s\right)^2\right]ds+\\&\qquad+\int_0^t P(s,u)\left(\gamma_s^u-q_s\right)dW_s,\end{aligned}$$

y poniendo $\sigma_t^u=\gamma_t^u-q_t$ se obtiene finalmente

$$dP(t,u)=P(t,u)\left(r(t)+q_t^2-\gamma_t^u q_t\right)dt+P(t,u)\sigma_t^u dW_t$$

o bien

$$dP(t,u)=P(t,u)\left(r(t)-\sigma_t^u q_t\right)dt+P(t,u)\sigma_t^u dW_t$$

con condición inicial $P(0,u)$, $0\leqslant t\leqslant u$, que es la fórmula (6.6). □

Resumen. A partir de la base estocástica $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P\right)$, el proceso de Wiener $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$, en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$ y a P con $\left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P = \mathscr{F}_t$, $t \in J_u$, el proceso estocástico $\{r(t)\}_{t\in J_T}$ con $\int_0^T |r(t)|dt < +\infty$, ($P$-a.s.), y $\{P(t,u)\}_{t\in J_u}$ para todo $u \leqslant T$, con $P(u,u) = 1$, y de la hipótesis **(H)** sobre la existencia de la probabilidad P^*, se obtienen el proceso estocástico $\tilde{q} = \left\{q_t\right\}_{t\in J_T}$ tal que

$$L_t = \exp\left(\int_0^t q_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t q_s^2 ds\right),\ (P - a.s.),\ t \in J_T,$$

donde $dP^* = L_T dP$ y $L_t = E(L_T|\mathscr{F}_t)$, y para todo $u \in J_T$, el proceso estocástico $\widetilde{\sigma^u} = \left\{\sigma_t^u\right\}_{t\in J_u}$ tal que en J_u se tiene la fórmula (6.6).

Observación. El activo financiero S^0 tiene como precio en el tiempo t a la variable aleatoria $S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$ y el proceso estocástico $\widetilde{S^0} = \left\{S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)\right\}_{t\in J_T}$ es solución de la ecuación diferencial estocástica $dS_t^0 = r(t)S_t^0 dt$ que al compararla con (6.6), nos da la idea intuitiva de que los bonos cupón-cero soportan más riesgo que el activo S^0.
Observamos, también, que $\widetilde{W^*} = \left\{W_t^*\right\}_{t\in J_T}$, donde $W_t^* = W_t - \int_0^t q_s ds$, $t \in J_T$, es un proceso de Wiener, en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$ y a P^*, (teorema de Girsanov, (**Teorema 4.12.5.**, (**V. 3**, pág. 192))), ($dP^* = L_T dP$), y además

$$\int_0^t P(s,u)\sigma_s^u dW_s^* = \int_0^t P(s,u)\sigma_s^u dW_s - \int_0^t P(s,u)\sigma_s^u q_s ds,$$

(invariancia de la integral estocástica respecto al cambio de Girsanov, (véase la **Proposición 5.3.5.**, (**V. 4**, pág. 25))), y la fórmula (6.6) se convierte en

$$dP(t,u) = r(t)P(t,u)dt + P(t,u)\sigma_t^u dW_t^*,\ \text{condición inicial } P(0,u). \quad (6.7)$$

Aplicando la fórmula de integración por partes estocástica, (**V. 3**, pág. 144), a (6.7) y a $\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) = 1 + \int_0^t -r(s)\exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)ds$, se obtiene

$$\overline{P}(t,u) = P(0,u) + \int_0^t \left(-\overline{P}(s,u)r(s) + \overline{P}(s,u)r(s)\right)ds + \int_0^t \overline{P}(s,u)\sigma_s^u dW_s^*,$$

o bien, (la primera integral, en la fórmula anterior, es nula)

$$d\overline{P}(t,u) = \overline{P}(t,u)\sigma_t^u dW_t^*,\ \text{condición inicial } P(0,u). \quad (6.8)$$

Por último sabemos que

$$\int_0^t \overline{P}(s,u)\sigma_s^u dW_s^* = \int_0^t \overline{P}(s,u)\sigma_s^u dW_s - \int_0^t \overline{P}(s,u)\sigma_s^u q_s ds. \tag{6.9}$$

La fórmula $W_t^* = W_t - \int_0^t q_s ds$ se puede poner $W_t^{\tilde{q}} = W_t - \int_0^t q_s ds$, si se quiere enfatizar la dependencia respecto al proceso estocástico $\tilde{q}$.

Ejercicios y Problemas

2.1. Sean $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y ξ una variable aleatoria en este espacio para la cual existe $E(\xi)$. Probar que:

(1). $\mathscr{F}_0 = \left\{A : A \in \mathscr{F} \text{ y } P(A) = 0 \; o \; P(A^c) = 0\right\}$ es una σ-álgebra en Ω.
(2). $E(\xi|\mathscr{F}_0) = E(\xi)$.

2.2. Sean $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P\right)$ base estocástica y ξ variable aleatoria en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con $E(|\xi|) < +\infty$. Probar que la martingala $\{\xi|\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$, en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P, (**V. 3**, pág. 61), es continua por la derecha.

6.3. Opciones sobre bonos cupón-cero

Sean $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P\right)$ una base estocástica, (**V. 4**, pág. 11), y $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$ un proceso de Wiener, en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P, tal que $\left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P = \mathscr{F}_t$, $t \in J_T$. Sean los dos activos financieros primarios, (**V. 4**, pág. 3), S^0 y S^1, siguientes:

(1). Una activo financiero, S^0, (activo sin riesgo), tal que su precio en el tiempo $t \in J_T$ viene dado por la variable aleatoria

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right), \tag{6.10}$$

donde $\{r(t)\}_{r\in J_T}$ es un proceso estocástico medible y adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ con $\int_0^T |r(s)|ds < +\infty$, ($P$-a.s.).
De lo que precede se deduce que el proceso estocástico, $\left\{S_t^0\right\}_{t\in J_T}$, de los

precios del activo financiero S^0 es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t^0 = r(s)S_t^0 ds, \text{ con condición inicial } S_0^0 = 1. \tag{6.11}$$

(2). Un bono cupón-cero, (pág. 13), S^1, de vencimiento T, con precio $P(t,T)$ en $t \in J_T$, siendo $P(T,T) = 1$.

Naturalmente se sigue con la hipótesis **(H)**, (pág. 17), sobre la existencia de la probabilidad neutral al riesgo, P^*, en el espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$. Por tanto, se tienen los procesos estocásticos $\tilde{q} = \{q_t\}_{t\in J_T}$, (**Proposición 6.2.5.**, pág. 20), donde $dP^* = L_T dP$, y $\widetilde{\sigma^T} = \{\sigma_t^T\}_{t\in J_T}$, (**Proposición 6.2.6.**, pág. 22).

Según la **Definición 5.7.1.**, (**(V. 4**, página 107), todo lo que precede constituye un mercado financiero a tiempo continuo (MFC) con base estocástica $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P\right)$, modelizado sobre el proceso de Wiener $\widetilde{W}$, y con dos activos financieros S^0 y S^1 tales que la evolución de sus precios está regida por las ecuaciones diferenciales estocásticas

$$\begin{aligned} &dS_t^0 = r(s)S_t^0 ds,\ S_0^0 = 1 \\ &dP(t,T) = \left(r(t) - \sigma_t^T q_t\right)P(t,T)dt + \sigma_t^T P(t,T)dW_t,\ S_0^1 = P(0,T) \end{aligned} \tag{6.12}$$

Si consideramos la base estocástica $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P^*\right)$ y el cambio de Girsanov, dado por $\tilde{q} = \{q_t\}_{t\in J_T}$, que pasa de la probabilidad P a la probabilidad P^*, las ecuaciones diferenciales estocásticas (6.12) se convierten en

$$\begin{aligned} &dS_t^0 = r(s)S_t^0 ds,\ S_0^0 = 1 \\ &dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + \sigma_t^T P(t,T)dW_t^*,\ S_0^1 = P(0,T), \end{aligned} \tag{6.13}$$

(pág. 25), donde $\widetilde{W^*} = \{W_t^*\}_{t\in J_T}$ es el proceso estocástico de Wiener dado por $W_t^* = W_t - \int_0^t q_s ds,\ t \in J_T$.

A continuación, adaptamos algunas definiciones dadas en el contexto general de los MFC modelizados sobre procesos estocásticos de Wiener a este tipo particular de MFC.

Definición 6.3.1. *Una estrategia de gestión (cartera) es un proceso estocástico medible y adaptado a la filtración* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *con valores en* $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$,

$\tilde{\phi} = \left\{\left(H_t^0, H_t^1\right)\right\}_{t\in J_T}$, siendo H_t^0 la cantidad de activo S^0 (activo sin riesgo) que se tiene en la cartera en el tiempo $t \in J_T$ y H_t^1 la cantidad de activo S^1 (bonos cupón-cero con vencimiento T) que se tiene en la cartera en el tiempo $t \in J_T$.
El valor de la cartera en el tiempo $t \in J_T$ se define por

$$V_t\left(\tilde{\phi}\right) = H_t^0 S_t^0 + H_t^1 P(t,T),$$

*donde, como se sabe, $S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$, $t \in J_T$, (véase página 14 de **V. 4**).*

Observamos que en la definición anterior de estrategia de gestión nos hemos limitado a bonos cupón-cero de vencimiento T. Se puede dar una definición más general considerando bonos con vencimientos cualesquiera $u \leqslant T$, (véase [72]).

Definición 6.3.2. *Una estrategia de gestión $\tilde{\phi} = \left\{\left(H_t^0, H_t^1\right)\right\}_{t\in J_T}$, se dice que es autofinanciada si:*

(1). $\int_0^T \left[\left|H_t^0 r(t)\right| + \left(H_t^1 \sigma_t^T\right)^2\right] dt < +\infty$, *($P$-a.s.).*
(2). $V_t\left(\tilde{\phi}\right) = V_0\left(\tilde{\phi}\right) + \int_0^t H_s^0 S_s^0 r(s)ds + \int_0^t \left(r(s) - \sigma_s^T q_s\right) H_s^1 P(s,T)ds +$
$+ \int_0^t P(s,T)\sigma_s^T H_s^1 dW_s$.

(véase la **Definición 5.7.2.**, (**V. 4**, pág. 110)). Observamos que la fórmula **(2)**, de la definición anterior, se puede escribir así:

$$dV_t\left(\tilde{\phi}\right) = H_t^0 dS_t^0 + H_t^1 dP(t,T).$$

La consistencia de la integral $\int_0^t H_s^1 dP(s,T)$ está asegurada por la condición **(1)** de la definición anterior.

Definición 6.3.3. *Una estrategia de gestión $\tilde{\phi} = \left\{\left(H_t^0, H_t^1\right)\right\}_{t\in J_T}$ se dice que es admisible, si es autofinanciada y*

$$\left(\overline{V}_t\left(\tilde{\phi}\right) =\right) V_t\left(\tilde{\phi}\right)\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$$

(valor actualizado de la cartera) es positivo y de cuadrado integrable respecto a P^*, para todo $t \in J_T$.

Definición 6.3.4. *Se considera el MFC de la página 27.*
(1). *Una opción europea de vencimiento $\theta < T$, en el MFC dado, es una variable aleatoria, h, acotada inferiormente y $\mathscr{F}_\theta$-medible, (**Definición 5.7.11.**, (**V. 4**, pág. 120)). Se dice también, en este caso, que h es una opción europea sobre un bono cupón-cero de vencimiento T, (el activo con riesgo en el mercado dado es un bono cupón-cero).*
(2). *Se dice que una opción europea h de vencimiento $\theta < T$, en el MFC dado, es realizable si existe una estrategia de gestión admisible $\tilde{\phi} = \left\{\left(H_t^0, H_t^1\right)\right\}_{t\in J_\theta}$ tal que $h = V_\theta\left(\tilde{\phi}\right)$. Se dice, también, que $\tilde{\phi}$ cubre a h.*

Casos particulares de opciones europeas sobre bonos cupón-cero, son (véase la página 33 de **V. 4**):
(a). $h = (P(\theta, T) - K)_+$, en cuyo caso la opción se llama *call*. Opción europea de compra de vencimiento $\theta < T$ sobre un bono cupón-cero de vencimiento T, de precio de ejercicio K. El valor de la opción en θ es $(P(\theta, T) - K)_+$.
(b). $h = (K - P(\theta, T))_+$, en cuyo caso la opción se llama *put*. Opción europea de venta de vencimiento $\theta < T$ sobre un bono cupón-cero de vencimiento T, de precio de ejercicio K. El valor de la opción en θ es $(K - P(\theta, T))_+$.

Como se supone la hipótesis **(H)**, por el **Teorema 5.7.8.**, (**V. 4**, pág. 114), el MFC modelizado por las ecuaciones diferenciales estocásticas (6.12), de la página 27, no tiene arbitrajes.

Lema 6.3.5. *Sean $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P\right)$ una base estocástica y Q una probabilidad en $(\Omega, \mathscr{F})$ absolutamente continua respecto a P, ($Q \ll P$). Designamos por L_t la densidad de $Q|_{\mathscr{F}_t}$ respecto a $P|_{\mathscr{F}_t}$, $L_t = E(L_T|\mathscr{F}_t)$, donde $dQ = L_T dP$, $t \in J_T$, (**Lema 6.2.3.**, pág. 18). Sea $\tilde{\mu} = \left\{\mu_t\right\}_{t\in J_T}$ un proceso estocástico, en $(\Omega, \mathscr{F})$, medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$. Entonces, $\tilde{\mu}$ es una martingala, en $(\Omega, \mathscr{F}, Q)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a Q si y sólo si $\left\{\mu_t L_t\right\}_{t\in J_T}$ es una martingala, en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P.*

Demostración. Supongamos que $\tilde{\mu}$ es una martingala, en $(\Omega, \mathscr{F}, Q)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a Q. Entonces, $E^Q\left(\left|\mu_s\right|\right) < +\infty$, $s \in J_T$, y $E^Q\left(\mu_s|\mathscr{F}_t\right) = \mu_t$, $s, t \in J_T$, $t < s$. Por **(2)** del **Lema 6.2.3.**, (pág. 18), $E\left(\left|L_s\mu_s\right|\right) = E\left(\left|\mu_s\right| L_s\right) = E^Q\left(\left|\mu_s\right|\right) < +\infty$, $s \in J_T$. Por otro lado, para todo $s, t \in J_T$ tales que $t < s$, $E\left(L_s\mu_s|\mathscr{F}_t\right) = E^Q\left(\mu_s|\mathscr{F}_t\right) \cdot L_t = \mu_t L_t$, por **(4)** del **Lema 6.2.3.**. Así, $\left\{\mu_t L_t\right\}_{t\in J_T}$ es una martingala, en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\{\mu_t L_t\}_{t\in J_T}$ es una martingala, en $(\Omega,\mathscr{F},P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P. Entonces, por **(2)** del **lema 6.2.3.** y la hipótesis, $E^Q(|\mu_s|) = E(|L_s\mu_s|) < +\infty$. Además, para todo $s, t \in J_T$ con $t < s$, por **(4)** del **Lema 6.2.3.**, $E^Q(\mu_s|\mathscr{F}_t)\cdot L_t = E(\mu_s L_s|\mathscr{F}_t) = L_t\mu_t$, y como L_t es la densidad de $Q|_{\mathscr{F}_t}$ respecto a $P|_{\mathscr{F}_t}$, se concluye que $E^Q(\mu_s|\mathscr{F}_s) = \mu_t$. Por tanto, $\tilde{\mu}$ es una martingala, en $(\Omega,\mathscr{F},Q)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a Q. □

Proposición 6.3.6. *Sean $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T},P)$ una base estocástica, Q una probabilidad en $(\Omega,\mathscr{F})$ equivalente a P y $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$ un proceso estocástico de Wiener, en $(\Omega,\mathscr{F},P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P con $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P$, $t\in J_T$, (página 24 de **V. 2** y página 23 de **V. 3**). Se considera la densidad L_T de Q respecto a P, $dQ = L_T dP$, y el proceso estocástico $\{L_t = E(L_T|\mathscr{F}_t)\}_{t\in J_T}$, (**Lema 6.2.3.**). Sea un proceso estocástico, $\tilde{\theta} = \{\theta_t\}_{t\in J_T}$, medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ con $P\left(\int_0^T \theta_s^2 ds < +\infty\right) = 1$, tal que, para todo $t\in J_T$,*

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right),\ (P-a.s.),$$

*(la existencia de tales procesos estocásticos está asegurada por la **Proposición 6.2.4.**, (pág. 19)). Entonces,*

(1). *$dL_t = L_t\theta_t dW_t$, con condición inicial $L_0 = 1$.*

(2). *$d(1/L_t) = (1/L_t)\theta_t^2 dt - (\theta_t/L_t)\,dW_t$, con condición inicial $1/L_0 = 1$.*

(3). *$\widetilde{W}^{\tilde{\theta}} = \left\{W_t^{\tilde{\theta}} = W_t - \int_0^t \theta_s ds\right\}_{t\in J_T}$ es un proceso de Wiener, en $(\Omega,\mathscr{F},Q)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a Q.*

(4). *Si $\tilde{\mu} = \{\mu_t\}_{t\in J_T}$ es una martingala cuadrado integrable, en $(\Omega,\mathscr{F},Q)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a Q, se verifica que existe un proceso estocástico medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$, $\widetilde{H} = \{H_t\}_{t\in J_T}$, tal que $E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty$ y*

$$\mu_t = \mu_0 + \int_0^t H_s dW_s^{\tilde{\theta}},\ t\in J_T.$$

Demostración. **(1).** Basta aplicar la fórmula de Itô, (**Teorema 4.8.5.**, (**V. 3**, página 128)), al proceso estocástico $\xi_t = \int_0^t (-1/2)\theta_s^2 ds + \int_0^t \theta_s dW_s$, $t\in J_T$,

tomando $f(t,x) = \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
(2). Sigue de la aplicación de la fórmula de Itô, (**Teorema 4.8.5.**, (**V. 3**, página 128)), al proceso estocástico $\xi_t = \int_0^t (1/2)\theta_s^2 ds + \int_0^t (-\theta_s) dW_s$, $t \in J_T$, tomando $f(t,x) = \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
(3). Es consecuencia del Teorema de Girsanov, (**Teorema 4.12.5.**, (**V. 3**, pág. 192)), teniendo en cuenta que $E(L_T) = 1$ y $P\left(\int_0^T \theta_s^2 ds < +\infty\right) = 1$.
(4). Como $\tilde{\mu} = \{\mu_t\}_{t\in J_T}$ es una martingala, en $(\Omega, \mathscr{F}, Q)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a Q, por el lema anterior, se tiene que $\{\mu_t L_t\}_{t\in J_T}$ es una martingala en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P. Además, como $\tilde{\mu}$ es cuadrado integrable, L_t es la densidad de $Q|_{\mathscr{F}_t}$ respecto a $P|_{\mathscr{F}_t}$, $t \in J_T$, y $\{L_t\}_{t\in J_T}$ es un proceso estocástico continuo por la derecha, (la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ es continua por la derecha), se comprueba que $\{\mu_t L_t\}_{t\in J_T}$ es cuadrado integrable. Así, por el **Teorema 4.11.12.**, (**V. 3**, pág. 183), existe un proceso estocástico $\widetilde{K} = \{K_t\}_{t\in J_T}$ medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ con $E\left(\int_0^T K_s^2 ds\right) < +\infty$, y tal que para todo $t \in J_T$,

$$\mu_t L_t = \mu_0 L_0 + \int_0^t K_s dW_s = \mu_0 + \int_0^t K_s dW_s, \ (P - a.s.),$$

y $P\left(\int_0^T \left[-\mu_s\theta_s + K_s/L_s\right] ds < +\infty\right) = 1$. Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes estocástica, (**Ejemplo 6**, (**V. 3**, pág. 144)), a los procesos estocásticos $\{\mu_t L_t\}_{t\in J_t}$ y $\{1/L_t\}$ y se obtiene

$$\mu_t = (\mu_t L_t)(1/L_t) = \mu_0 - \int_0^t \left[-\mu_s\theta_s + \frac{K_s}{L_s}\right]\theta_s ds + \int_0^t \left[-\mu_s\theta_s + \frac{K_s}{L_s}\right] dW_s.$$

Finalmente, por la invariancia de la integral estocástica por el cambio de Girsanov, (**V. 3**, pág. 194), se obtiene

$$\mu_t = \mu_0 + \int_0^t \left[-\mu_s\theta_s + \frac{K_s}{L_s}\right] dW_s^{\tilde{\theta}},$$

lo cual termina la demostración de **(4)** tomando $H_t = -\mu_t\theta_t + K_t/L_t$, $t \in J_T$. □

Observación. Como hay casos en los que $\mathscr{F}_t \neq \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}^{\tilde{\theta}}}\right)^Q$, $t \in J_T$, no se puede aplicar directamente el **Teorema 4.11.12.** al proceso estocástico dado $\tilde{\mu}$ para obtener la tesis de la proposición que precede.

Teorema 6.3.7. *Sea $\theta \in \mathbb{R}$ con $0 < \theta < T$ y supongamos que $\sigma_t^T \neq 0$, (P-a.s.), para todo $t \in J_\theta$. Sea h una opción europea de vencimiento θ, en el MFC dado en la página 27, tal que $h \exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)$ es de cuadrado integrable respecto a P^*. Entonces, existe una estrategia de gestión admisible $\widetilde{\phi^\sharp} = \left\{\left(\left(H^\sharp\right)_t^0, \left(H^\sharp\right)_t^1\right)\right\}_{t\in J_\theta}$ tal que $V_\theta\left(\widetilde{\phi^\sharp}\right) = h$, (h es realizable por $\widetilde{\phi^\sharp}$).*
Además, para toda estrategia de gestión admisible $\tilde{\phi} = \left\{\left(H_t^0, H_t^1\right)\right\}_{t\in J_\theta}$ con $V_\theta\left(\tilde{\phi}\right) = h$, se tiene que

$$V_t\left(\tilde{\phi}\right) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds\right)\cdot h|\mathscr{F}_t\right], \quad t \leqslant \theta. \tag{6.14}$$

Demostración. Sea $\tilde{\phi}$ una estrategia de gestión admisible con $V_\theta\left(\tilde{\phi}\right) = h$. Consideramos la fórmula

$$\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) = 1 + \int_0^t -r(s)\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)ds. \tag{6.15}$$

La fórmula de **(2)** de la **Definición 6.3.2.**, se convierte en

$$V_t\left(\tilde{\phi}\right) = V_0\left(\tilde{\phi}\right) + \int_0^t \left(H_s^0 S_s^0 r(s) + r(s) H_s^1 P(s,T)\right)ds + \\ + \int_0^t P(s,T)\sigma_s^T H_s^1 dW_s^*, \tag{6.16}$$

donde $W_t^* = W_t - \int_0^t q_s ds$, ya que

$$-\int_0^t \sigma_s^T q_s H_s^1 P(s,T)ds + \int_0^t P(s,T)\sigma_s^T H_s^1 dW_s = \int_0^t P(s,T)\sigma_s^T H_s^1 dW_s^*,$$

($\widetilde{W^*} = \left\{W_t^*\right\}_{t\in J_T}$ es un proceso de Wiener respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P^*).
Aplicamos a (6.14) y (6.15) la fórmula de integración por partes estocástica, (**V. 3**, pág. 144), y obtenemos:

$$\overline{V}_t\left(\tilde{\phi}\right) = V_0\left(\tilde{\phi}\right) + \int_0^t \overline{P}(s,T) H_s^1 \sigma_s^T dW_s^*, \tag{6.17}$$

(de hecho esta fórmula caracteriza a la estrategia de gestión autofinanciada).

Como $\overline{V}_t(\tilde{\phi})$, $t \in J_T$ es cuadrado integrable respecto a P^*, se tiene que $E^*\left[\int_0^t \left(\overline{P}(s,T)H_s\sigma_s^T\right)^2 ds\right] < +\infty$ y $\overline{V}(\tilde{\phi})$, $t \in J_\theta$, es una martingala respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\theta}$ y a P^*, (**(4)** de la página 103 de **V. 3**). Así, $\overline{V}_t(\tilde{\phi}) = E^*\left[\overline{V}_\theta(\tilde{\phi})|\mathscr{F}_t\right]$, $t \leqslant \theta$, y por consiguiente

$$V_t(\tilde{\phi}) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)E^*\left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\cdot h|\mathscr{F}_t\right] =$$
$$= E^*\left[\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds\right)\cdot h|\mathscr{F}_t\right],\ t \leqslant \theta.$$

Veamos la existencia de una estrategia de gestión admisible $\widetilde{\phi^\sharp}$, tal que $V_\theta\left(\widetilde{\phi^\sharp}\right) = h$.

Por **Proposición 6.3.6.**, existe un proceso estocástico $\tilde{\zeta} = \{\zeta_t\}_{t\in J_\theta}$ medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\theta}$ tal que $E^*\left[\int_0^\theta \zeta_t^2 dt\right] < +\infty$ y

$$h\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right) = E^*\left[h\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right] + \int_0^\theta \zeta_s dW_s^*. \tag{6.18}$$

Ponemos

$$\left(H^\sharp\right)_t^1 = \frac{\zeta_t}{\overline{P}(t,T)\sigma_t^T}\ \text{ y}$$
$$\left(H^\sharp\right)_t^0 = E^*\left[h\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right] - \frac{\zeta_t}{\sigma_t^T},\ \ t \in J_\theta. \tag{6.19}$$

Entonces,

$$V_t\left(\widetilde{\phi^\sharp}\right) = S_t^0 E^*\left[h\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right] - \frac{\zeta_t S_t^0}{\sigma_t^T} +$$
$$+\frac{\zeta_t}{\sigma_t^T}\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) = E^*\left[h\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right],\ t \in J_\theta,\ \text{ y }\ V_\theta\left(\widetilde{\phi^\sharp}\right) = h.$$

Es claro que $\overline{V}_t\left(\widetilde{\phi^\sharp}\right) \geqslant 0$, $t \in J_\theta$. Además, $\overline{V}_t\left(\widetilde{\phi^\sharp}\right)$ es de cuadrado integrable respecto a P^*, $t \in J_\theta$, ya que $h\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)$ es de cuadrado integrable

respecto a P^*, (**V. 2**, pág. 221).
Por último $\widetilde{\phi^\sharp}$ es autofinanciada. En efecto, basta tener en cuenta (6.9), que $\left\{\int_0^t \zeta_s dW_s^*\right\}_{t\in J_\theta}$ es una martingala respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\theta}$ y a P^*, y la esperanza condicionada de la variable aleatoria (6.10) respecto a $\mathscr{F}_t$. $\square$

En el teorema anterior, hemos visto que se puede cubrir cualquier opción europea h de vencimiento $\theta < T$ tal que $h\exp\left(\int_0^\theta r(s)ds\right)$ es de cuadrado integrable respecto a P^*. Por tanto, por la **Definición 5.7.11.**, (**V. 4**, pág. 120), el MFC modelizado por las ecuaciones diferenciales estocásticas (6.12), de la página 27, es completo.

Naturalmente, $V_t\left(\tilde{\phi}\right)$ de (6.14) no depende de $\tilde{\phi}$ y por esta razón decimos que $V_t\left(\tilde{\phi}\right)$ de (6.14) es el precio, en el tiempo t, de la opción h en el MFC descrito en la página 27, (véase la **Observación (1)** de página 127 de **V. 4**).
Un ejemplo al que se le puede aplicar el teorema anterior es el *call* $h = (P(\theta,T)-K)_+$. Por tanto, en este caso, h es realizable y el valor, en $t\in J_\theta$, de toda cartera $\tilde{\phi}$ que realiza a h es

$$V_t\left(\tilde{\phi}\right) = E^*\left[(P(\theta,T)-K)_+\cdot\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right]. \tag{6.20}$$

Ejercicios y Problemas

3.1. En las hipótesis de la **Proposición 6.3.6.**, (pág. 30), supongamos que $\theta_t = \rho$ para todo $t\in J_T$, $(\rho\in\mathbb{R})$. Probar que $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}^{\tilde{\theta}}}\right)^Q$ para todo $t\in J_T$, (véase la **Observación** de la página 31).

3.2. Probar que las ecuaciones diferenciales estocásticas (6.13) se obtienen de las (6.12), (pág. 27), mediante el cambio de Girsanov, dado por $\tilde{q} = \left\{q_t\right\}_{t\in J_T}$, que pasa de la probabilidad P a la probabilidad P^*.
Indicación: Utilizar la invariancia de la integral estocástica por el cambio de Girsanov.

6.4. Modelo de Vasiček

Nos situamos en el escenario financiero de incertidumbre, de las páginas 16 y 17, con la hipótesis **(H)** y $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P$, $t \in J_T$. Suponemos que el proceso estocástico $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t \in J_T}$ satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW_t, \text{ condición inicial } r(0) = r_0, \tag{6.21}$$

donde r_0, a, b y σ son constantes positivas. Es decir, $\tilde{r}$ es el proceso estocástico de Itô respecto a $\widetilde{W}$, (**V. 3**, pág. 120),

$$r(t) = r(0) + \int_0^t a(b - r(s))ds + \int_0^t \sigma dW_s. \tag{6.22}$$

Suponemos también que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in J_T$, $q_t = -\lambda$, (**Proposición 6.2.5.**, pág. 20). Entonces, $\widetilde{W^*} = \left\{W_t^* = W_t + \lambda t\right\}_{t \in J_T}$, es un proceso de Wiener, en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in J_T}$ y a P^*, y $\int_0^t \sigma dW_s^* = \int_0^t \sigma dW_s + \lambda\sigma t$, (**Observación** de la página 25), y

$$dr(t) = a\left(b^* - r(t)\right)dt + \sigma dW_t^*, \; r(0) = r_0, \; b^* = b - \frac{\lambda\sigma}{a} \tag{6.23}$$

Naturalmente se tiene, también, que $dP^* = L_T dP$ y

$$L_t = E\left[L_T | \mathscr{F}_t\right] = \exp\left(-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right), \; t \in J_T.$$

Ponemos $\xi_t = r(t) - b$, $t \in J_T$. Entonces, por (6.22), se tiene que

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t (-a\xi_s)\, ds + \int_0^t \sigma dW_s,$$

y por tanto, el proceso estocástico $\tilde{\xi} = \{\xi_t\}_{t \in J_T}$ es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$d\xi_t = -a\xi_t dt + \sigma dW_t, \; \xi_0 = r(0) - b, \tag{6.24}$$

es decir, $\tilde{\xi}$ es un proceso estocástico de Ornstein-Uhlenbeck, (**V. 3**, pág. 165). Así, por el **Teorema 4.9.12.**, (**V. 3**, pág. 165), para todo $t \in J_T$,

$$\xi_t = (r(0) - b)\exp(-at) + \sigma \exp(-at)\int_0^t \exp(as)dW_s, \; (P - a.s.). \tag{6.25}$$

Además, por el citado teorema, se tienen las siguientes propiedades de $\tilde{\xi}$:

(a). $E(\xi_t) = (r(0) - b)\exp(-at),\ t \in J_T$.

(b). $V(\xi_t) = (\sigma^2/2a)(1 - \exp(-2at)),\ t \in J_T$.

(c). Para todo $t \in J_T$, la variable aleatoria $\int_0^t \sigma \exp(-at + as)dW_s$ es Gaussiana, (**V. 2**, pág. 299), de media 0 y varianza $\int_0^t \sigma^2 \exp(-2at + 2as)ds = (\sigma^2/2a)(1 - \exp(-2at))$.

(d). Para todo $t \in J_T$, ξ_t es una variable aleatoria Gaussiana de media $(r(0) - b)\exp(-at)$ y varianza $(\sigma^2/2a)(1 - \exp(-2at))$.

(e). El proceso estocástico $\tilde{\xi}$ es Gaussiano, (**Definición 4.3.6.**, (**V. 3**, pág. 35)), lo cual equivale a que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son números reales y $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$, entonces la variable aleatoria $\lambda_1 \xi_{t_1} + \ldots + \lambda_n \xi_{t_n}$ es Gaussiana, (véase el **Teorema 3.12.3.**, (**V. 2**, pág. 303)).

(f). El proceso $\tilde{\xi}$ es un proceso estocástico de Markov respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in J_T}$ y a P con probabilidad de transición, (**V. 3**, pág. 37).

De lo anterior se tiene que, para todo $t \in J_T$, la función característica, (**V. 2**, páginas 273 y 300), de ξ_t es

$$\varphi_{\xi_t}(x) = \exp\left(ixE(\xi_t) - \frac{V(\xi_t)}{2}x^2\right). \tag{6.26}$$

Como para todo $t \in J_T$, $r(t) = b + \xi_t$, se tiene

$$r(t) = r(0)\exp(-at) + b(1 - \exp(-at)) + \sigma \exp(-at)\int_0^t \exp(as)dW_s, \tag{6.27}$$

y por **(1)** de la página 276 de **V. 2**, la función característica de $r(t)$ está dada por $\varphi_{r(t)}(x) = \exp(ixb)\varphi_{\xi_t}(x) = \exp\left(ix(E(\xi_t) + b) - \frac{V(\xi_t)}{2}x^2\right)$, lo cual nos dice que $r(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana con:

(g). $E(r(t)) = E(\xi_t) + b = (r(0) - b)\exp(-at),\ t \in J_T$.

(h). $V(r(t)) = V(\xi_t) = (\sigma^2/2a)(1-\exp(-2at))$, $t \in J_T$.

Estas tres últimas propiedades implican que $P(r(t) < 0) > 0$, lo cual es el principal inconveniente del modelo de Vasiček.

(k). De (6.27) se deduce que, para todo $t, s \in J_T$ con $s \leqslant t$,

$$r(t) = r(s)\exp(-a(t-s)) + b(1-\exp(-a(t-s))) + \sigma\exp(-at)\int_s^t \exp(au)\,dW_u, \tag{6.28}$$

y por tanto,

(k1). $E[r(t)|\mathscr{F}_s] = r(s)\exp(-a(t-s)) + b(1-\exp(-a(t-s)))$, (**(4)** de la página 103 de **V. 3**).

(k2). $V[r(t)|\mathscr{F}_s] = E\left[(r(t) - E[r(t)|\mathscr{F}_s])^2\,|\mathscr{F}_s\right] = \frac{\sigma^2}{2a}[1-\exp(-2a(t-s))]$.

Para calcular el precio de los bonos cupón-cero, en este modelo, consideramos la probabilidad P^* y utilizamos la ecuación (6.23). Por la **Proposición 6.2.2.(2)**, (pág. 17), tenemos

$$P(t,T) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)|\mathscr{F}_t\right] = \exp(-b^*(T-t))E^*\left[\exp\left(-\int_t^T \xi_s^*\,ds\right)|\mathscr{F}_t\right], \tag{6.29}$$

donde $\xi_t^* = r(t) - b^*$, $b^* = b - (\lambda\sigma)/a$, $t \in J_T$. Por otra parte, el proceso estocástico $\widetilde{\xi^*} = \{\xi_t^*\}_{t\in J_T}$ es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$d\eta_t = -a\eta_t\,dt + \sigma\,dW_t^*,\ \eta_0 = r(0) - b^*, \tag{6.30}$$

sin más que tener en cuenta la ecuación (6.23). Por tanto, por la **Observación 1** de la página 171 de **V. 3**, se tiene que

$$E^*\left[\exp\left(-\int_t^T \xi_s^*\,ds\right)|\mathscr{F}_t\right] = E^*\left[\exp\left(-\int_0^{T-t} \xi_s^{0,x}\,ds\right)\right]|_{x=\xi_t^*}, \tag{6.31}$$

donde $\xi_t^{s,x}$, $s \leqslant t$, (flujo estocástico de la ecuación (6.30)), es la solución única de la ecuación diferencial estocástica

$$\xi_t^{s,x} = x + \int_s^t -a\xi_u^{s,x} du + \int_s^t \sigma dW_u^*,\ x \in \mathbb{R}. \tag{6.32}$$

Ponemos

$$F(\theta, x) = E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta \xi_s^{0,x} ds\right)\right],\ x \in \mathbb{R},\ \theta \in J_T. \tag{6.33}$$

Así, tenemos la fórmula $F(T-t, x) = E^* \left[\exp\left(-\int_0^{T-t} \xi_s^{0,x} ds\right)\right]$ y por (6.31) $F\left(T-t, \xi_t^*\right) = E^* \left[\exp\left(-\int_0^{T-t} \xi_s^{0,x} ds\right)\right] |_{x=\xi_t^*},\ x \in \mathbb{R}$.

Calculemos $F(\theta, x)$: $\xi_t^{0,x} (= \xi_t^x)$, $t \in J_T$, es la solución única de la ecuación diferencial estocástica (Ornstein-Ulhenbeck)

$$d\xi_t = -a\xi_t dt + \sigma dW_t^*,\ \xi_0 = x \tag{6.34}$$

y, según se ha dicho anteriormente, $\{\xi_t^x\}_{t \in J_T}$, es un proceso estocástico Gaussiano con trayectorias continuas. Explícitamente, para todo $t \in J_T$,

$$\xi_t^x = x \exp(-at) + \sigma \exp(-at) \int_0^t \exp(as) dW_s^*,$$
$$E^* \left(\xi_t^x\right) = x \exp(-at),\ \ V^* \left(\xi_t^x\right) = \sigma^2 (1 - \exp(-2at)) / (2a),$$

y para $\lambda_1, ..., \lambda_n$, números reales, y $0 \leqslant t_1 < ... < t_n < t$, la variable aleatoria $\lambda_1 \xi_{t_1}^x + ... + \lambda_n \xi_{t_n}^x$ es una variable aleatoria Gaussiana, (**Teorema 3.12.3.**, (**V. 2**, pág. 303)), de hecho esta última variable aleatoria es de la forma $A + \int_0^t B(s) dW_s^*$, siendo A una constante y $B(s)$ una función determinista, y $\int_0^t B(s)^2 ds < +\infty$.

Como consecuencia la variable aleatoria $\int_0^\theta \xi_s^x ds (= \eta)$ es Gaussiana por el **Teorema 3.12.4.(d)**, (**V. 2**, pág. 304), ya que la integral es límite de sumas de Riemann que son variables aleatorias Gaussianas, (**Teorema 3.12.3.**, (**V. 2**, pág. 303)). De donde deducimos que

$$E^* (\exp(-\eta)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x) \frac{1}{q\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-p)^2}{2q^2}\right) dx,$$
$$p = E^* (-\eta),\ q^2 = V^* (-\eta) = V^* (\eta). \tag{6.35}$$

Así, $E^*(\exp(-\eta)) = \exp\left(-p + (1/2)q^2\right)$, sin más que realizar el cambio de variable $y = (x-p)/q$ y tener en cuenta que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\lambda x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right). \tag{6.36}$$

Por otra parte, de $E^*\left(\xi_t^x\right) = x\exp(-at)$, se deduce que

$$E^*(\eta) = E^*\left(\int_0^\theta \xi_s^x ds\right) = \frac{x}{a}(1 - \exp(-a\theta)),$$

sin más que aplicar el teorema de Fubini, (**V. 2**, pág. 204). Además, (**V. 2**, pág. 249),

$$V^*(\eta) = V^*\left(\int_0^\theta \xi_s^x ds\right) = cov^*(\eta,\eta) = \int_0^\theta \int_0^\theta cov^*\left(\xi_t^x, \xi_s^x\right) dsdt, \tag{6.37}$$

teniendo en cuenta que

$$V^*\left(\xi_{t_1}^x + \ldots + \xi_{t_n}^x\right) = \sum_{i=1}^n V^*\left(\xi_{t_i}^x\right) + 2\sum_{i>j} cov^*\left(\xi_{t_i}^x, \xi_{t_j}^x\right),$$

$0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \theta$. Por último,

$$cov^*\left(\xi_t^x, \xi_s^x\right) = \sigma^2 \exp(-a(t+s)) E^*\left(\int_0^t \exp(au) dW_u^* \cdot \int_0^s \exp(au) dW_u^*\right) =$$
$$= \sigma^2 \exp(-a(t+s)) \cdot \int_0^{t\wedge s} \exp(2au) du = \sigma^2 \exp(-a(t+s)) \cdot \frac{\exp(2a(t\wedge s)) - 1}{2a}, \tag{6.38}$$

ya que $\xi_t^x = x\exp(-at) + \sigma\exp(-at)\int_0^t \exp(as) dW_s^*$. Así,

$$V^*(\eta) = \int_0^\theta \int_0^\theta \sigma^2 \exp(-a(t+s)) \cdot \frac{\exp(2a(t\wedge s)) - 1}{2a} dsdt =$$
$$= \frac{\sigma^2\theta}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3}(1 - \exp(-a\theta)) - \frac{\sigma^2}{2a^3}(1 - \exp(-a\theta))^2, \tag{6.39}$$

$P(t,T) = \exp(-b^*(T-t))\, F(T-t, r(t) - b^*)$, y de (6.33)

$$F(\theta, x) = \exp\left(-x \cdot \frac{1-\exp(-a\theta)}{a} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2\theta}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3}(1-\exp(-a\theta)) - \frac{\sigma^2}{2a^3}\cdot(1-\exp(-a\theta))^2\right)\right). \quad (6.40)$$

De todo lo anterior, se concluye que $P(t,T) = \exp(-(T-t)R(T-t, r(t)))$, donde, (6.34),

$$R(\theta, r) = b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2} -$$
$$- \frac{1}{a\theta}\left[(1-\exp(-a\theta))\left(b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r\right) - \frac{\sigma^2}{4a^2}(1-\exp(-a\theta))^2\right]. \quad (6.41)$$

De hecho, $R(T-t, r(t))$ se interpreta como el tipo de interés medio en el periodo $[t,T]$. Como $\lim_{\theta\to+\infty} R(\theta, r) = b^* - \sigma^2/(2a^2)$, $b^* = b - (\lambda\sigma)/a$, $b^* - \sigma^2/(2a^2)$ se interpreta como el tipo de interés a largo plazo.

Resumen del modelo Vasiček

Nos situamos en un escenario financiero de incertidumbre, descrito en las páginas 16 y 17, y suponemos que el proceso estocástico $r(t)$, $t \in J_T$, satisface la ecuación diferencial estocástica (6.21), siendo a, b y σ constantes positivas. Suponemos también que $q(t) = -\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (**Proposición 6.2.5.**, pág. 20). Entonces, $\widetilde{W^*} = \left\{W_t^* = W_t + \lambda t\right\}_{t|inJ_T}$ es un proceso de Wiener, en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P^*, y $r(t)$ cumple (6.23) y, poniendo $\xi_t = r(t) - b$, ξ_t cumple también (6.24).
Se obtiene también que, para todo $t \in J_T$, $r(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana respecto a P con $E(r(t)) = b + (r(0) - b)\exp(-at)$ y $V(r(t)) = \sigma^2(1-\exp(-2at))/(2a)$. Más aún, el proceso estocástico $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$ es Gaussiano respecto a P.

Finalmente, se tiene la fórmula

$$
\begin{aligned}
P(t,T) &= \exp(-(T-t)R(T-t,r(t))) = \\
&= \exp\left(-\frac{1-\exp(-a(T-t))}{a}r(t) + \left[-\left(b-\frac{\lambda\sigma}{a}-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(T-t)+\right.\right. \\
&+\left.\left.\left(b-\frac{\lambda\sigma}{a}-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right)\frac{1-\exp(-a(T-t))}{a}-\frac{\sigma^2}{4a}\left(\frac{1-\exp(-a(T-t))}{a}\right)^2\right]\right),
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

(Véase el **Problema 12.1**, pág. 98). Recordamos que $P(t,T)$ es el precio, en el instante $t \in J_T$, del bono cupón-cero de vencimiento T. En la práctica, para $r(t)$ se escoge el tipo de interés *día a día*. Los parámetros a, b, σ y λ se ajustan dando valores del mercado en la fórmula (6.42) y despejando dichos parámetros.

Ejercicios y Problemas

4.1. Probar que en el modelo de Vasiček el proceso estocástico, $\{P(t,T)\}_{t\in J_T}$, de los precios de los bonos cupón-cero de vencimiento T es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$
\begin{aligned}
&dP(t,T) = \\
&\left(r(t)-\lambda\frac{\sigma(\exp(-a(T-t))-1)}{a}\right)P(t,T)dt+\frac{\sigma(\exp(-a(T-t))-1)}{a}P(t,T)dW_t
\end{aligned}
$$

con condición inicial $P(0,T)$.
Indicación: Aplicar la fórmula de Itô, (**Teorema 4.8.5.**, (**V. 3**, pág. 128)), a la expresión de $P(t,T)$, $t \in J_T$, dada por la fórmula (6.42).

4.2. En el modelo de Vasiček, determinar la ecuación diferencial estocástica en que se transforma la ecuación diferencial estocástica del problema anterior al aplicar el cambio de Girsanov, dado por $\tilde{q} = \left\{q_t = -\lambda\right\}_{q\in J_T}$, que pasa de la probabilidad P a la probabilidad P^*.

6.5. Opciones sobre bonos cupón-cero en el modelo Vasiček

Consideramos un *call* europeo de vencimiento θ y precio de ejercicio K, sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$ en el modelo de Vasiček. Dicho *call* viene representado por $h = (P(\theta, T) - K)_+ = \text{máx}\{P(\theta, T) - K, 0\}$. Se prueba que se cumplen las hipótesis del **Teorema 6.3.7.**, (pág. 32), (véase el **Problema 5.1**, pág. 52). Entonces, el precio de la opción h en el tiempo $t \in J_\theta$ es

$$V_t = E^*\left[\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds\right)\cdot h|\mathscr{F}_t\right] =$$
$$= E^*\left[\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds\right)\cdot\big(\exp(-(T-\theta)R(T-\theta, r(\theta))) - K\big)_+|\mathscr{F}_t\right], \quad (6.43)$$

y para $t = 0$,

$$\begin{aligned} V_0 = E^*\left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\cdot\big(\exp(-(T-\theta)R(T-\theta, r(\theta))) - K\big)_+|\mathscr{F}_0\right] = \\ = E^*\left[I_{\{P(\theta,T)\geqslant K\}}\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)(P(\theta,T) - K)\right] = \\ = E^*\left[I_{\{P(\theta,T)\geqslant K\}}\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)P(\theta,T)\right] - \\ - KE^*\left[I_{\{P(\theta,T)\geqslant K\}}\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right]. \quad (6.44)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $P(\theta, T) = \exp(-(T-\theta)R(T-\theta, r(\theta))) =$
$= K\exp\big((1/a)(1-\exp(-a(T-\theta)))\left(r_\theta^* - r(\theta)\right)\big)$, donde

$$\begin{aligned} r_\theta^* = \left(b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)\left(1 - \frac{a(T-\theta)}{1-\exp(-a(T-\theta))}\right) - \\ \frac{\sigma^2(1-\exp(-a(T-\theta)))}{4a^2} - \ln(K)\cdot\frac{a}{1-\exp(-a(T-\theta))}, \quad (6.45)\end{aligned}$$

se prueba fácilmente que $\{P(\theta, T) \geqslant K\} = \left\{r(\theta) \leqslant r_\theta^*\right\}$, (igualdad de sucesos).

Así, si ponemos $B(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$, $t \in J_T$, se tiene

$$V_0 = E^*\left[I_{\left\{r(\theta)\leqslant r_\theta^*\right\}}B(\theta)P(\theta,T)\right] - KE^*\left[I_{\left\{r(\theta)\leqslant r_\theta^*\right\}}B(\theta)\right]. \tag{6.46}$$

Introducimos las notaciones $L_1 = B(\theta)/P(0,\theta)$, $L_2 = B(T)/P(0,T)$, $dP_1 = L_1 dP^*$ y $dP_2 = L_2 dP^*$, es decir, generamos las probabilidades, en el espacio medible $(\Omega,\mathscr{F})$, P_1 y P_2 a partir de las densidades L_1 y L_2, respectivamente, $(P(0,t) = E^*(B(t))$, pág. 37).
Perfeccionamos la fórmula (6.46): Sabemos, por la hipótesis **(H)**, (pág. 17), que

$$I_{\{P(\theta,T)\geqslant K\}}E^*\left[B(T)P(T,T)|\mathscr{F}_\theta\right] = I_{\{P(\theta,T)\geqslant K\}}B(\theta)P(\theta,T),$$

de donde absorbiendo el factor $I_{\{P(\theta,T)\geqslant K\}}$ y tomando esperanzas, se tiene

$$E^*\left[I_{\{P(\theta,T)\geqslant K\}}B(T)\right] = E^*\left[I_{\{P(\theta,T)\geqslant K\}}B(\theta)P(\theta,T)\right]. \tag{6.47}$$

De esta forma, obtenemos

$$V_0 = E^*\left[I_{\{r(\theta)\leqslant r_\theta^*\}}B(T)\right] - KE^*\left[I_{\{r(\theta)\leqslant r_\theta^*\}}B(\theta)\right]. \tag{6.48}$$

Pasamos (6.48) a esperanzas respecto a P_1 y a P_2, utilizando el **Lema 6.2.3.(2)**, (pág. 18), y obtenemos

$$V_0 = E_2\left[I_{\{r(\theta)\leqslant r_\theta^*\}}P(0,T)\right] - KE_1\left[I_{\{r(\theta)\leqslant r_\theta^*\}}P(0,\theta)\right]. \tag{6.49}$$

Lema 6.5.1. *Sean $(\Omega,\mathscr{F},P)$ un espacio de probabilidad y (ξ,η) un vector de variables aleatorias Gaussiano, (**Definición 3.12.2.**, (**V. 2**, pág. 301)). Entonces,*

(1). *ξ y η son variables aleatorias Gaussianas en $(\Omega,\mathscr{F},P)$.*

(2). *Para todo $c \in \mathbb{R}$, se verifica que: $E[\exp(c\xi)] = \exp\left(cE[\xi] + \frac{1}{2}c^2V[\xi]\right)$ y $V[\exp(c\xi)] = \exp\left(2cE[\xi] + c^2V[\xi]\right)\left(\exp\left(c^2V[\xi]\right) - 1\right)$, (las dos fórmulas son válidas suponiendo solamente que ξ sea variable aleatoria Gaussiana).*

(3). *$E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\exp(-\eta)\right] = \exp\left((1/2)V(\eta) - E(\eta)\right)\Phi(\tilde{x})$, donde, $\tilde{x} = (x - (E(\xi) - cov(\xi,\eta)))/\sqrt{V(\xi)}$, y, (**V. 2**, página 90), $\Phi(z) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^z \exp\left(-y^2/2\right)dy$.*

(4). $E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\xi\exp(-\eta)\right] = \exp\left((1/2)V(\eta) - E(\eta)\right)\left[(E(\xi) - cov(\xi,\eta))\Phi(\tilde{x}) - \right.$
$\left. - \sqrt{V(\xi)}\varphi(\tilde{x})\right]$,
donde, $\tilde{x} = (x - (E(\xi) - cov(\xi,\eta)))/\sqrt{V(\xi)}$, $\varphi(y) = (1/\sqrt{2\pi})\exp\left(-y^2/2\right)$ *y* $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\varphi(y)\,dy$.

(5). *Si* Q *es la probabilidad, en el espacio medible* $(\Omega,\mathscr{F})$, *dada por* $dQ = (\exp(-\lambda\xi))/E[\exp(-\lambda\xi)]\,dP$, $\lambda\in\mathbb{R}$, *se verifica que* η *es variable aleatoria Gaussiana en el espacio de probabilidad* $(\Omega,\mathscr{F},Q)$ *con esperanza matemática, en este espacio,* $E^Q[\eta] = E[\eta] - \lambda cov(\xi,\eta)$ *y con varianza* $V^Q[\eta] = V[\eta]$. *Además,* $E^Q[\eta] = E[\eta\exp(-\lambda\xi)]/E[\exp(-\lambda\xi)]$.

Demostración. **(1).** Es consecuencia del **Teorema 3.12.3.**, (**V. 2**, pág. 303).

(2). Como ξ es Gaussiana, por el **Teorema 3.4.28.**, (**V. 2**, pág. 184),

$$E[\exp(c\xi)] = \int_\Omega \exp(c\xi)\,dP =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi V[\xi]}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(cx)\exp\left(-\frac{(x-E[\xi])^2}{2V[\xi]}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi V[\xi]}}\cdot$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{-1}{2V[\xi]}\left[(x-E[\xi]-cV[\xi])^2 - c^2V[\xi]^2 - 2cE[\xi]V[\xi]\right]\right)dx =$$
$$= \exp\left(cE[\xi] + \frac{1}{2}c^2V[\xi]\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi V[\xi]}}\cdot$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2V[\xi]}\left[(x-E[\xi]-aV[\xi])^2\right]\right)dx = \exp\left(cE[\xi] + \frac{1}{2}c^2V[\xi]\right).$$

La fórmula de la varianza de $\exp(c\xi)$ se obtiene sustituyendo en la igualdad $V[\exp(c\xi)] = E[\exp(2c\xi)] - (E[\exp(c\xi)])^2$ los valores de las esperanzas matemáticas que se han obtenido.
(3). Tenemos,

$$E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\exp(-\eta)\right] = \int_\Omega I_{(\xi,\eta)^{-1}((-\infty,x]\times\mathbb{R})}\exp(-\eta)\,dP =$$
$$= \int_{(\xi,\eta)^{-1}((-\infty,x]\times\mathbb{R})}\exp(-\eta)\,dP = \int_{(\xi,\eta)^{-1}((-\infty,x]\times\mathbb{R})} g((\xi,\eta))\,dP,$$

donde, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(s,t) = \exp(-t)$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, por el **Teorema 3.4.28.**, (**V. 2**, pág. 189), se deduce (véanse el **Ejemplo 4**, (**V. 2**, pág. 207) y las páginas 233, 252, 253 y 255 del citado volumen),

$$E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\exp(-\eta)\right] = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t)P_{(\xi,\eta)}(ds\,dt) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t)f_{\xi\eta}(s,t)\,ds\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(s)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t)f_{\eta|\xi}(t|s)\,dt\right]ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_\xi(s)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi V[\eta](1-\rho^2)}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)V[\eta]}\left[t - E[\eta] - \rho\frac{\sqrt{V[\eta]}}{\sqrt{V[\xi]}}(s - E[\xi])\right]^2\right)dt\right]ds,$$

donde, recordamos, $\rho = cov(\xi,\eta)/\sqrt{V[\xi]V[\eta]}$. Se comprueba fácilmente que la integral en la variable t, del corchete, es igual a, (véase el **Problema 5.3**, pág. 52),

$$\exp\left(-E[\eta] - \rho\frac{\sqrt{V[\eta]}}{\sqrt{V[\xi]}}(s - E[\xi]) + \frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)V[\eta]\right).$$

Así,

$$E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\exp(-\eta)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_\xi(s)\exp\left(-E[\eta] - \rho\frac{\sqrt{V[\eta]}}{\sqrt{V[\xi]}}(s - E[\xi]) + \frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)V[\eta]\right)ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi V[\xi]}}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-E[\eta] - \rho\frac{\sqrt{V[\eta]}}{\sqrt{V[\xi]}}(s - E[\xi]) + \frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)V[\eta] - \frac{1}{2V[\xi]}(s - E[\xi])^2\right)ds =$$

$$= \exp\left(-E[\eta] + \frac{1}{2}V[\eta]\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi V[\xi]}}\cdot\int_{-\infty}^{x}\exp\left(\frac{-1}{V[\xi]}(s - E[\xi] + cov(\xi,\eta))^2\right)ds.$$

Finalmente, haciendo el cambio de variable $z = [s - E[\xi] + cov(\xi,\eta)]/\sqrt{V[\xi]}$, en la última integral, se concluye que

$$E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\exp(-\eta)\right] = \exp\left(-E[\eta] + \frac{1}{2}V[\eta]\right)\Phi\left(\frac{x - E[\xi] + cov(\xi,\eta)}{\sqrt{V[\xi]}}\right).$$

(4). Se tiene

$$E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\xi\exp(-\eta)\right]=\int_{\Omega}I_{(\xi,\eta)^{-1}((-\infty,x]\times\mathbb{R})}\xi\exp(-\eta)\,dP=$$
$$=\int_{(\xi,\eta)^{-1}((-\infty,x]\times\mathbb{R})}\xi\exp(-\eta)\,dP=\int_{(\xi,\eta)^{-1}((-\infty,x]\times\mathbb{R})}h((\xi,\eta))\,dP,$$

donde $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está definida por $h(s,t)=s\exp(-t)$, $(s,t)\in\mathbb{R}^2$. Entonces, por el **Teorema 3.4.28.**, (**V. 2**, pág. 189),

$$E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\xi\exp(-\eta)\right]=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}s\exp(-t)P_{(\xi,\eta)}(ds\,dt)=$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}s\exp(-t)f_{\xi\eta}(s,t)\,ds\,dt=\int_{-\infty}^{x}sf_{\xi}(s)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t)f_{\eta|\xi}(t|s)\,dt\right]ds.$$

Como se ha dicho, en la demostración de **(3)**, la integral en la variable t del corchete es igual a

$$\exp\left(-E[\eta]-\rho\frac{\sqrt{V[\eta]}}{\sqrt{V[\xi]}}(s-E[\xi])+\frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)V[\eta]\right).$$

Por tanto,

$$E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\xi\exp(-\eta)\right]=$$
$$=\int_{-\infty}^{x}sf_{\xi}(s)\exp\left(-E[\eta]-\rho\frac{\sqrt{V[\eta]}}{\sqrt{V[\xi]}}(s-E[\xi])+\frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)V[\eta]\right)ds=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi V[\xi]}}\cdot\int_{-\infty}^{x}s\exp\left(-E[\eta]-\rho\frac{\sqrt{V[\eta]}}{\sqrt{V[\xi]}}(s-E[\xi])+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)V[\eta]-\frac{(s-E[\xi])^2}{2V[\xi]}\right)ds.$$

Como el argumento de la función exponencial, en la fórmula anterior, es:

$$-E[\eta]+\frac{1}{2}V[\eta]-\frac{1}{2V[\xi]}(s-(E[\xi]-cov(\xi,\eta)))^2,$$

se tiene que

$$E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\xi\exp(-\eta)\right]=\exp\left(-E[\eta]+\frac{1}{2}V[\eta]\right)\cdot \\ \cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi V[\xi]}}\int_{-\infty}^{x}s\exp\left(-\frac{1}{2V[\xi]}(s-(E[\xi]-cov(\xi,\eta)))^2\right)ds.$$

Haciendo el cambio de variable $z=[s-(E[\xi]-cov(\xi,\eta))]/\sqrt{V[\xi]}$, en la integral anterior, se obtiene:

$$E\left[I_{\{\xi\leqslant x\}}\xi\exp(-\eta)\right]=\exp\left(-E[\eta]+\frac{1}{2}V[\eta]\right)\cdot \\ \cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\tilde{x}}(z\sqrt{V[\xi]}+E[\xi]-cov(\xi,\eta))\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz= \\ =\exp\left(-E[\eta]+\frac{1}{2}V[\eta]\right)\left[(E[\xi]-cov(\xi,\eta))\Phi(\tilde{x})-\sqrt{E[\xi]}\varphi(\tilde{x})\right].$$

(5). Para probar que η es variable aleatoria Gaussiana en el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathscr{F},Q)$, basta determinar su función de distribución, F_η^Q, en este espacio. Se tiene,

$$F_\eta^Q(y)=Q\left(\eta^{-1}((-\infty,y])\right)=\int_{\eta^{-1}((-\infty,y])}\frac{\exp(-\lambda\xi)}{E[\exp(-\lambda\xi)]}dP= \\ =\frac{1}{E[\exp(-\lambda\xi)]}\int_{\eta^{-1}((-\infty,y])}\exp(-\lambda\xi)dP= \\ =\frac{1}{E[\exp(-\lambda\xi)]}E[I_{\{\eta\leqslant y\}}\exp(-\lambda\xi)].$$

Ahora, por **(3)**, intercambiando los papeles de ξ y η, obtenemos

$$E[I_{\{\eta\leqslant y\}}\exp(-\lambda\xi)]=\exp\left(-\lambda E[\xi]+\frac{1}{2}\lambda^2V[\xi]\right)\Phi(\tilde{y}),$$

donde $\tilde{y}=(y-(E[\eta]-\lambda cov(\xi,\eta)))/\sqrt{V[\eta]}$. Así, por **(2)**, se concluye que

$$F_\eta^Q(y)=\Phi(\tilde{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\tilde{y}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz.$$

Finalmente, haciendo en la última integral el cambio de variable, $z = [t - E[\eta] + \lambda cov(\xi,\eta)]/\sqrt{V[\eta]}$, se tiene

$$F_\eta^Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V[\eta]}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(t - E[\eta] + \lambda cov(\xi,\eta))^2}{V[\eta]}\right) dt,$$

que nos dice que η es variable aleatoria Gaussiana en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, Q)$ con esperanza matemática $E^Q[\eta] = E[\eta] - \lambda cov(\xi,\eta)$ y varianza $V^Q[\eta] = V[\eta]$.
La última igualdad de **(5)** es consecuencia del **Lema 6.2.3.(2)**, (pág. 18). □

Aplicamos el apartado **(5)** del lema anterior tomando el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, el vector aleatorio Gaussiano, $\left(\xi = \int_0^\theta r(s)ds, \eta = r(\theta)\right)$, y $dP_1 = (\exp(-\xi)/E^*[\exp(-\xi)])dP^*$ (como en la página 37, ya que por (6.29) se tiene que $P(t,T) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right]$), y obtenemos que $r(\theta)$ es variable aleatoria Gaussiana en $(\Omega, \mathscr{F}, P_1)$ y

$$\begin{aligned} E_1(r(\theta)) = \int_\Omega r(\theta) dP_1 = \frac{E^*\left[r(\theta)\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right]}{E^*\left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right]} = \\ = \frac{1}{P(0,\theta)} E^*\left[r(\theta)\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right]. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Aplicamos, ahora, el apartado **(5)** del lema anterior tomando el espacio $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, el vector aleatorio Gaussiano, $\left(\xi = \int_0^T r(s)ds, \eta = r(\theta)\right)$ y $dP_2 = (\exp(-\xi)/E^*[\exp(-\xi)])dP^*$ (como en la página 37, ya que por (6.29) se tiene que $P(t,T) = E^*\left[\exp\left(\int_t^T r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right]$), y obtenemos que $r(\theta)$ es variable aleatoria Gaussiana en $(\Omega, \mathscr{F}, P_2)$ y

$$E_2(r(\theta)) = \frac{1}{P(0,T)} E^*\left[r(\theta)\exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right)\right]. \tag{6.51}$$

Por otro lado, la fórmula (6.49) se escribe así:

$$V_0 = P(0,T)\int_{-\infty}^{r_\theta^*} f_2(x)dx - KP(0,\theta)\int_{-\infty}^{r_\theta^*} f_1(x)dx, \tag{6.52}$$

donde $f_2(x)$ es la densidad de $r(\theta)$ respecto a P_2 y $f_1(x)$ es la densidad de $r(\theta)$ respecto a P_1. Como $r(\theta)$ es una variable aleatoria Gaussiana respecto a P_1 y P_2, para determinar estas densidades es suficiente calcular la esperanza matemática y la varianza de $r(\theta)$ respecto a P_1 y a P_2, puesto que por la propia definición de variable aleatoria Gaussiana, la fórmula (6.52) se puede poner de la siguiente forma:

$$V_0 = P(0,T)\Phi\left(\frac{r_\theta^* - m_2}{\sigma_2}\right) - KP(0,\theta)\Phi\left(\frac{r_\theta^* - m_1}{\sigma_1}\right), \tag{6.53}$$

donde $m_1 = E_1[r(\theta)]$, $\sigma_1^2 = V_1[r(\theta)]$, $m_2 = E_2[r(\theta)]$, $\sigma_2^2 = V_2[r(\theta)]$ y $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}(1/\sqrt{2\pi})\exp\left(-y^2/2\right)dy$.

De (6.50) y (6.51), teniendo en cuenta que $P(0,T) = E^*\left[\exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right)\right]$ y $P(0,\theta) = E^*\left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right]$, se deduce que:

(1). $m_1 = E[r(\theta)] = (1/P(0,\theta))E^*\left[r(\theta)\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right] =$
$E^*[r(\theta)] - cov^*\left(r(\theta), \int_0^\theta r(s)ds\right)$.

(2). $m_2 = E[r(\theta)] = (1/P(0,T))E^*\left[r(\theta)\exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right)\right] =$
$E^*[r(\theta)] - cov^*\left(r(\theta), \int_0^T r(s)ds\right)$.

(3). $\sigma_1^2 = V_1[r(\theta)] = E_1[(r(\theta)-m_1)^2] = E_1\left[r(\theta)^2\right] - m_1^2 = V^*[r(\theta)]$.

(4). $\sigma_2^2 = V_2[r(\theta)] = E_2[(r(\theta)-m_2)^2] = E_2\left[r(\theta)^2\right] - m_2^2 = V^*[r(\theta)]$.

Así, (6.53) se convierte en

$$\begin{aligned} V_0 = P(0,T)\Phi&\left(\frac{r_\theta^* - E^*[r(\theta)] + cov^*\left(r(\theta), \int_0^T r(s)ds\right)}{\sqrt{V^*[r(\theta)]}}\right) - \\ &KP(0,\theta)\Phi\left(\frac{r_\theta^* - E^*[r(\theta)] + cov^*\left(r(\theta), \int_0^\theta r(s)ds\right)}{\sqrt{V^*[r(\theta)]}}\right). \end{aligned} \tag{6.54}$$

Para calcular las esperanzas matemáticas, varianzas y covarianzas de la fórmula (6.54), basta tener en cuenta que el proceso estocástico en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, $\xi_t^* = r(t) - b^*$, $t \in J_T$, donde $b^* = b -$

$(\lambda\sigma)/a$, es solución de la ecuación diferencial estocástica (6.30), (pág. 37) y aplicar el **Teorema 4.9.12 (Proceso estocástico continuo de Ornstein-Ulhenbeck).**, (**V. 3**, pág. 165). Pues entonces, para todo $t \in J_T$, la variable aleatoria $\xi_t^* = r(t) - b^*$ es $(r(0) - b^*)\exp(-at) + \sigma\exp(-at)\int_0^t \exp(au)dW_u$ que es Gaussiana con esperanza matemática $E^*\left[\xi_t^*\right] = (r(0) - b^*)\exp(-at)$ y varianza $V^*\left[\xi_t^*\right] = \left(\sigma^2/2a\right)\cdot(1 - \exp(-2at))$. Así,

(5). $r(t) = b^* + (r(0) - b^*)\exp(-at) + \sigma\exp(-at)\int_0^t \exp(au)dW_u,\ t \in J_T.$

(6). $E^*[r(t)] = b^* + (r(0) - b^*)\exp(-at),\ t \in J_T.$

(7). $V^*[r(t)] = \left(\sigma^2/2a\right)\cdot(1 - \exp(-2at)),\ t \in J_T,$ (**V. 2**, pág. 249).

(8). $cov^*(r(t), r(s)) = E^*(r(t)r(s)) - E^*(r(t))E^*(r(s)) = \sigma^2\exp(-a(s+t))\cdot$
$\cdot E^*\left[\left(\int_0^t \exp(au)dW_u\right)\left(\int_0^s \exp(au)dW_u\right)\right] = ((\sigma^2)/2a)\exp(-a(s+t))\cdot$
$\cdot(\exp(2a(t\wedge s)) - 1)$, ((**5**) de la página 103 de **V. 2**).

A partir de estas fórmulas, y teniendo en cuenta el teorema de Fubini (**V. 2**, pág. 202), se tiene

(9). $E^*\left[\int_0^t r(s)ds\right] = \int_0^t E^*[r(s)]ds = -((r(0) - b^*)/a)(\exp(-at) - 1) + b^*t.$

(10). $V^*\left[\int_0^t r(s)ds\right] = \int_0^t\int_0^t cov^*(r(u), r(v))dudv =$
$= \left(\sigma^2/a\right)\int_0^t\left[\int_0^v (\exp(a(u-v)) - \exp(u+v))du\right]dv =$
$= \left(\sigma^2 t\right)/a^2 - \left(\sigma^2/\left(2a^3\right)\right)(1 - \exp(-at))^2 - \left(\sigma^2/a^3\right)(1 - \exp(-at)).$

(11). Para todo $s, t \in J_T$ con $s \leqslant t$, se tiene

$$cov^*\left(r(s), \int_0^t r(u)du\right) = \int_0^t cov^*(r(s), r(u))du = \frac{\sigma^2}{2a^2}\cdot$$
$$\cdot\left((1 - \exp(-as))^2 + 1 - \exp(as - at) + \exp(-as - at) - \exp(-2as)\right).$$

Así, la fórmula (6.54) se escribe de la siguiente manera:

$$V_0 = P(0,T)\Phi(d_+) - KP(0,\theta)\Phi(d_-), \tag{6.55}$$

donde

$$
\begin{aligned}
d_+ = {} & \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1-\exp(-2a\theta))}} \cdot [r^*_\theta - (r(0)\exp(-a\theta) - b^*\exp(-a\theta) + b^* + \\
& + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-\exp(-2a))^2 - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-\exp(-2a\theta))(1-\exp(-a(T-\theta))))], \\
d_- = {} & \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1-\exp(-2a\theta))}} \cdot [r^*_\theta - (r(0)\exp(-a\theta) - b^*\exp(-a\theta) + b^* + \\
& + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-\exp(-2a))^2)], \; P(0,T) = E^*\left[\exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right)\right], \\
& P(0,\theta) = E^*\left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right].
\end{aligned}
$$

***Put* europeo sobre un bono cupón-cero**

Consideremos ahora un *put* europeo de vencimiento θ y precio de ejercicio K, sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$, en el modelo de Vasiček. Dicho *put* viene representado por $h = (K - P(\theta,T))_+ = \text{máx}\{K - P(\theta,T), 0\}$. Se prueba que se cumplen las hipótesis del **Teorema 6.3.7.**, (pág. 32). Entonces, $V_t = E^*\left[\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds\right)\cdot h|\mathscr{F}_t\right]$ es el precio de la opción h en el tiempo $t \in J_\theta$ y

$$
\begin{aligned}
V_0 &= KE^*\left[I_{\{P(\theta,T)<K\}}B(\theta)\right] - E^*\left[I_{\{P(\theta,T)<K\}}B(\theta)P(\theta,T)\right] = \\
&= KE^*\left[I_{\{P(\theta,T)<K\}}B(\theta)\right] - E^*\left[I_{\{P(\theta,T)<K\}}B(T)\right]. \quad (6.56)
\end{aligned}
$$

Se prueba fácilmente que $\{P(\theta,T) < K\} = \left\{r(\theta) > r^*_\theta\right\}$. Así, la fórmula 6.56 se convierte en

$$V_0 = KE^*\left[I_{\left\{r(\theta)>r^*_\theta\right\}}B(\theta)\right] - E^*\left[I_{\left\{r(\theta)>r^*_\theta\right\}}B(T)\right]. \quad (6.57)$$

Aplicando el **Lema 6.5.1.**, (pág. 43), a (6.57), nos queda:

$$V_0 = KP(0,\theta)\Phi\left(\frac{-r_\theta^* - E^*[r(\theta)] + cov^*\left(r(\theta), \int_0^\theta r(s)ds\right)}{\sqrt{V^*[r(\theta)]}}\right) - \\ - P(0,T)\Phi\left(\frac{-r_\theta^* - E^*[r(\theta)] + cov^*\left(r(\theta), \int_0^T r(s)ds\right)}{\sqrt{V^*[r(\theta)]}}\right), \quad (6.58)$$

que es el precio del *put* europeo h, en el tiempo 0, en el modelo Vasiček.

Ejercicios y Problemas

5.1. Probar que, en el modelo de Vasiček, un *call* europeo, $h = (P(\theta, T) - K)_+$ de vencimiento θ y precio de ejercicio K sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$ cumple las hipótesis del **Teorema 6.3.7.**, (pág. 32).
Indicación: Utilizar el **Problema 4.1**, (pág. 41).

5.2. Probar que, en el modelo de Vasiček, un *put* europeo, $h = (K - P(\theta, T))_+$ de vencimiento θ y precio de ejercicio K sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$ cumple las hipótesis del **Teorema 6.3.7.**, (pág. 32).
Indicación: Utilizar el **Problema 4.1**, (pág. 41).

5.3. Probar la afirmación de la página 46:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t) f_{\eta|\xi}(t|s)dt = \exp\left[-E[\eta] - \rho\frac{\sqrt{V[\eta]}}{\sqrt{V[\xi]}}(s - E[\xi]) + \frac{1}{2}\left(1-\rho^2\right)V[\eta]\right].$$

6.6. El modelo de Hull-White

En 1990 J. Hull y A. White, [33], generalizan el modelo de Vasicek considerando el caso en que los coeficientes a, b^* y σ de la ecuación (6.23) sean funciones deterministas en lugar de constantes. Para el estudio del modelo de Hull-White se necesitan resultados más generales que los de Ornstein-Ulhenbeck, que se establecen a continuación.

Teorema 6.6.1. *Sean* $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\infty}, P\right)$ *una base estocástica y* $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_\infty}$ *un proceso estocástico de Wiener, en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, *respecto a* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\infty}$ *y a* P. *Sean* $a, b, \sigma : J_\infty \to J_\infty$ *funciones localmente acotadas (es decir, acotadas en cualquier intervalo acotado). Entonces, para todo* $T > 0$, *la ecuación diferencial estocástica*

$$dr_t = (a(t) - b(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t, \text{ con condición inicial } r_0,\ t \in J_T, \quad (6.59)$$

(r_0 constante real), tiene como solución única

$$r_t = \exp\left(-\int_0^t b(s)ds\right)\left[r_0 + \int_0^t a(s)\exp\left(\int_0^s b(u)du\right)ds\right] + \exp\left(-\int_0^t b(s)ds\right)\int_0^t \exp\left(\int_0^s b(u)du\right)\sigma(s)dW_s,\ t \in J_T. \quad (6.60)$$

Además,

(a). *Para todo* $t \in J_T$, r_t *es una variable aleatoria Gaussiana, en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, *tal que*

(a1). $E[r_t] = \exp\left(-\int_0^t b(s)ds\right)\left[r_0 + \int_0^t a(s)\exp\left(\int_0^s b(u)du\right)ds\right]$.

(a2). $V[r_t] = cov(r_t, r_t) =$
$= \exp\left(-2\int_0^t b(u)du\right)\int_0^t \exp\left(2\int_0^s b(u)du\right)\sigma(s)^2 ds =$
$= \int_0^t \sigma(s)^2\left[\exp\left(-\int_0^t b(u)du + \int_0^s b(u)du\right)\right]^2 ds.$

(a3). $cov(r_s, r_t) =$
$= \exp\left(-\int_0^t b(u)du - \int_0^s b(u)du\right)\int_0^{t\wedge s}\exp\left(2\int_0^u b(v)dv\right)\sigma(u)^2 du.$

(b). *El proceso estocástico* $\tilde{r} = \{r_t\}_{t\in J_T}$ *es Gaussiano.*

(c). $\tilde{r} = \{r_t\}_{t\in J_T}$ *es un proceso de Markov, en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, *respecto a* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ *y a* P.

(d). *Para todo* $t \in J_T$, *la variable aleatoria, en* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $\zeta_t = \int_0^t r_s ds$ *es Gaussiana con*

$$E[\zeta_t] = r_0\int_0^t \exp\left(-\int_0^s b(y)dy\right)ds + \int_0^t\left[\int_0^s a(u)\exp\left(-\int_0^s b(y)dy + \int_0^u b(y)dy\right)du\right]ds, \quad (6.61)$$

$$V[\zeta_t] = 2\int_0^t \int_0^u \int_0^s \sigma(y)^2 \cdot$$
$$\cdot \exp\left(-\int_0^s b(v)dv - \int_0^u b(v)dv + 2\int_0^y b(v)dv\right) du ds dy. \quad (6.62)$$

Demostración. Que para todo $T > 0$ la ecuación (6.59) tiene solución única es consecuencia de la **Proposición 4.9.11.**, (**V. 3**, pág. 163).
Para determinar la solución de (6.59) procedemos de la siguiente forma:
Para cada $t \in J_T$, tomamos $\kappa_t = \int_0^t b(u)du$ y $\xi_t = \exp(\kappa_t) = \exp\left(\int_0^t b(u)du\right)$.
Entonces, $d\xi_t = \xi_t b(t)dt$, $t \in J_T$, y por la fórmula de integración por partes estocástica, (**V. 3**, pág. 144):

$$d(r_t\xi_t) = [\xi_t(a(t) - b(t)r_t) + r_t b(t)\xi_t]\, dt + \xi_t\sigma(t)dW_t,$$

es decir,

$$d(r_t\xi_t) = a(t)\xi_t dt + \sigma(t)\xi_t dW_t$$

o bien

$$r_t\xi_t = r_0\xi_0 + \int_0^t \xi_s a(s)ds + \int_0^t \sigma(s)\xi_s dW_s.$$

Así, para todo $t \in J_T$,

$$r_t = \exp\left(-\int_0^t b(s)ds\right) \cdot$$
$$\cdot \left[r_0 + \int_0^t a(s)\exp\left(\int_0^s b(u)du\right)ds + \int_0^t \sigma(s)\exp\left(\int_0^s b(u)du\right)dW_s\right],$$

lo cual prueba la primera parte del teorema.

(a). Por lo demostrado anteriormente, tenemos que para todo $t \in J_T$,

$$r_t = g(t) + \exp\left(-\int_0^t b(u)du\right)\int_0^t h(s)dW_s,$$

donde

$$g(t) = \exp\left(-\int_0^t b(u)du\right)\left[r_0 + \int_0^t a(s)\exp\left(\int_0^s b(u)du\right)ds\right] \text{ y}$$
$$h(s) = \sigma(s)\exp\left(\int_0^s b(u)du\right).$$

Por el **Ejemplo 2** de la página 160 de **V. 3**, para todo $t \in J_T$,

$$\eta_t = \exp\left(-\int_0^t b(u)du\right)\int_0^t h(s)dW_s$$

es una variable aleatoria Gaussiana con esperanza matemática $E\left[\eta_t\right] = 0$ y varianza $\overline{\sigma}^2 = V\left[\eta_t\right] = \exp\left(-2\int_0^t b(u)du\right)\int_0^t h(s)^2 ds$. Así, por lo dicho en la página 300 de **V. 2**, para todo $t \in J_T$, la función característica de η_t es

$$\varphi_{\eta_t}(s) = E\left[\exp\left(is\eta_t\right)\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\overline{\sigma}^2\right),\ s \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, por **(1)** de la página 276 de **V. 2**, la función característica de $r_t = g(t) + \eta_t$ es

$$\varphi_{r_t}(s) = \exp(isg(t))\varphi_{\eta_t}(s) = \exp\left(isg(t) - \frac{1}{2}s^2\overline{\sigma}^2\right).$$

Así, por la **Definición 3.12.1.**, (**V. 2**, pág. 300), r_t es una variable aleatoria Gaussiana con $E\left[r_t\right] = g(t)$ y $V\left[r_t\right] = \overline{\sigma}^2$.

(a1). En **(a)** se ha probado que, para todo $t \in J_T$,

$$E\left[r_t\right] = g(t) = \exp\left(-\int_0^t b(u)du\right)\left[r_0 + \int_0^t a(s)\exp\left(\int_0^s b(u)du\right)ds\right].$$

(a2). En **(a)** se ha probado que, para todo $t \in J_T$,

$$V\left[r_t\right] = \overline{\sigma}^2 = \exp\left(-2\int_0^t b(u)du\right)\int_0^t \sigma(s)^2\exp\left(2\int_0^s b(u)du\right)ds,$$

es decir,

$$V\left[r_t\right] = \int_0^t \sigma(s)^2\left[\exp\left(-\int_0^t b(u)du + \int_0^s b(u)du\right)\right]^2 ds.$$

(a3). Con las notaciones de **(a)** y teniendo en cuenta **(a1)**:

$$
\begin{aligned}
cov(r_s, r_t) &= E[(r_s - E[r_s]) \cdot (r_t - E[r_t])] = \\
&= E[r_s r_t] - E[r_s]E[r_t] = E\left[\left(g(s)+\eta_s\right)\left(g(t)+\eta_t\right)\right] - g(s)g(t) = \\
&= g(s)g(t) + g(s)E\left[\eta_t\right] + g(t)E\left[\eta_s\right] + E\left[\eta_s\eta_t\right] - g(s)g(t) = \\
&= E\left[\eta_s\eta_t\right] = \exp\left(-\int_0^s b(u)du - \int_0^t b(u)du\right) \cdot \\
&\cdot E\left[\left(\int_0^s \sigma(u)\exp\left(\int_0^u b(v)dv\right)dW_u\right) \cdot \right. \\
&\left. \cdot \left(\int_0^t \sigma(u)\exp\left(\int_0^u b(v)dv\right)dW_u\right)\right] = \\
&= \exp\left(-\int_0^s b(u)du - \int_0^t b(u)du\right)\int_0^{s\wedge t}\sigma(u)^2\exp\left(2\int_0^u b(v)dv\right)du,
\end{aligned}
$$

donde para obtener la última igualdad se ha utilizado **(5)** de la página 103 de **V. 3**, el **Teorema 3.4.18.**, (**V. 2**, pág. 178), y la propiedad de proceso estocástico con incrementos independientes y estacionario de $\widetilde{W}$, (**V. 3**, páginas 78 y 83).

(b). $\tilde{r} = \{r_t\}_{t\in J_T}$ es un proceso estocástico Gaussiano. En efecto:
Sean $\lambda_1,...,\lambda_n$ números reales y $0 \leqslant t_1 < ... < t_n \leqslant T$. Entonces, para todo $i \in \{1,...,n\}$,

$$
r_{t_i} = E\left[r_{t_i}\right] + \int_0^T I_{\{s\leqslant t_i\}}\exp\left(-\int_0^t b(u)du\right)h(s)dW_s = E\left[r_{t_i}\right] + \int_0^T f_i(s)dW_s.
$$

Por tanto,

$$
\lambda_1 r_{t_1} + ... + \lambda_n r_{t_n} = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i E\left[r_{t_i}\right] + \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(s)\right)dW_s = m + \int_0^T f(s)dW_s,
$$

lo cual implica, como se ha visto en la demostración de **(a)**, que $\lambda_1 r_{t_1} + ... + \lambda_n r_{t_n}$ es una variable aleatoria con esperanza matemática $m = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i E\left[r_{t_i}\right]$ y varianza $\int_0^T f(s)^2 ds$.

(c). Es consecuencia del **Teorema 4.9.13.**, (**V. 3**, pág. 170).

(d). Que ζ_t, $t \in J_T$ es una variable aleatoria Gaussiana es consecuencia del **Teorema 3.12.4.(d)**, (**V. 2**, pág. 304), ya que la integral que la define es límite de sumas de Riemann que son variables aleatorias Gaussianas, (**Teorema 3.12.3.**, (**V. 2**, pág. 303)). Para el cálculo de la esperanza matemática de ζ_t utilizamos el teorema de Fubini, (**Teorema 3.4.36.**, (**V.2**, pág. 202)):

$$\begin{aligned}
E[\zeta_t] &= \int_\Omega \left(\int_0^t r_s ds \right) dP = \int_0^t \left(\int_\Omega r_s dP \right) ds = \int_0^t E[r_s]\, ds = \\
&= \int_0^t \exp\left(-\int_0^s b(y)dy \right) \left(r_0 + \int_0^s \exp\left(\int_0^u b(y)dy \right) a(u)du \right) ds = \\
&= r_0 \int_0^t \exp\left(-\int_0^s b(y)dy \right) ds + \\
&+ \int_0^t \left[\int_0^s a(u) \exp\left(-\int_0^s b(y)dy + \int_0^u b(y)dy \right) du \right] ds.
\end{aligned}$$

Finalmente, para todo $t \in J_T$,

$$\begin{aligned}
V[\zeta_t] &= cov(\zeta_t, \zeta_t) = \int_0^t \int_0^t cov(r_u, r_s)\, duds = \\
&= \int_0^t \int_0^t \left(\exp\left(-\int_0^u b(v)dv - \int_0^s b(v)dv \right) \cdot \right. \\
&\left. \cdot \int_0^{u\wedge s} \exp\left(2\int_0^y b(v)dv \right) \sigma(y)^2 dy \right) duds = \\
&= 2\int_0^t \int_0^u \int_0^s \sigma(y)^2 \exp\left(-\int_0^u b(v)dv - \int_0^s b(v)dv + 2\int_0^y b(v)dv \right) dudsdy.
\end{aligned}$$

□

A continuación describimos el modelo de Hull-White (o modelo generalizado de Vasiček) de las estructuras temporales de los tipos de interés. Nos situamos en el escenario de incertidumbre, de las páginas 16 y 17, con la hipótesis **(H)** y $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}} \right)^P$, $t \in J_T$. Consideramos el proceso estocástico $\tilde{q} = \{q_t\}_{t\in J_T}$ de la **Proposición 6.2.5.**, (pág. 20), y el proceso de Wiener $\widetilde{W^*} = \left\{ W_t^* = W_t - \int_0^t q_s ds \right\}_{t\in J_T}$, en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P^*, (véase la **Observación** de la página 25). Finalmente, suponemos que el proceso estocástico $\tilde{r} = \{r_t\}_{t\in J_T}$ es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dr_t = (a(t) - b(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t^*, \text{ con condición inicial } r_0,\ t \in J_T, \quad (6.63)$$

donde, $a(t)$, $b(t)$ y $\sigma(t)$ son funciones localmente acotadas de J_∞ en J_∞, y r_0 es una constante real.

Por la **Proposición 6.2.2.(2)**, (pág. 17), se tiene que, para todo $u \in J_T$,

$$P(t,u) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^u r_s ds\right)|\mathscr{F}_t\right]. \quad (6.64)$$

En particular, para todo $u \in J_T$,

$$P(0,u) = E^*\left[\exp\left(-\int_0^u r_s ds\right)|\mathscr{F}_0\right] = E^*\left[\exp\left(-\int_0^u r_s ds\right)\right]. \quad (6.65)$$

Ponemos $\zeta_u = \int_0^u r_s ds$. Entonces, por el teorema anterior, sabemos que ζ_u es una variable aleatoria Gaussiana en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$ con esperanza matemática, $E^*[\zeta_u]$, dada por la fórmula (6.61) y varianza, $V^*[\zeta_u]$, dada por la fórmula (6.62). Entonces, por la **Proposición 3.4.30.**, (**V. 2**, pág. 191), se tiene

$$E^*\left[\exp\left(-\int_0^u r_s ds\right)\right] = E^*\left[\exp(-\zeta_u)\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi V^*[\zeta_u]}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x) \exp\left(-\frac{(x + E^*[\zeta_u])^2}{2V^*[\zeta_u]}\right) dx.$$

En la última integral se hace el cambio $x = -E^*[\zeta_u] + y\sqrt{V^*[\zeta_u]}$, y se obtiene

$$E^*\left[\exp(-\zeta_u)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(y\sqrt{V^*[\zeta_u]} - E^*[\zeta_u]\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

Así, por la fórmula (6.36), (pág. 39), se deduce

$$P(0,u) = E^*\left[\exp(-\zeta_u)\right] = \exp\left(-E^*[\zeta_u] + \frac{V^*[\zeta_u]}{2}\right). \quad (6.66)$$

Se introduce la siguiente notación: Para todo $u \in J_T$, con $0 < u$, y todo $t \in J_u$,

$$B(t,u) = \int_t^u \exp\left(-\int_0^v b(z)dz + \int_0^t b(z)dz\right)dv \tag{6.67}$$

$$\begin{aligned} A(t,u) = &\int_t^u \left(\int_t^v a(s)\exp\left(\int_0^s b(z)dz - \int_0^v b(z)dz\right)ds\right)dv - \\ &- \int_t^u \left(\int_t^v \left[\int_t^s \sigma(y)^2 \exp\left(-\int_0^s b(z)dz - \int_0^v b(z)dz + \right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left. +2\int_0^y b(z)dz\right)dy\right]ds\right)dv. \end{aligned} \tag{6.68}$$

Entonces, teniendo en cuenta las fórmulas (6.61) y (6.62), el valor en $t = 0$ del bono cupón-cero de vencimiento u, $P(0,u)$, en el modelo Hull-White dado por (6.66), se escribe de la siguiente forma:

$$P(0,u) = \exp\left(-r_0 B(0,u) - A(0,u)\right), \quad u \in J_T. \tag{6.69}$$

Para el caso general de determinación de $P(t,u)$, $t \in J_u$, $(u \in J_T)$, precio en el tiempo t de un bono cupón-cero de vencimiento u (en el modelo Hull-White), seguimos las pautas marcadas en la sección **6.4** (modelo de Vasiček).
Por lo dicho en la página 58, tenemos que

$$P(t,u) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^u r_s ds\right)|\mathscr{F}_t\right],$$

donde $\tilde{r} = \{r_t\}_{t\in J_T}$ es solución única de la ecuación diferencial estocástica (6.63),

$$dr_t = (a(t) - b(t)r_t)\,dt + \sigma(t)dW_t^*, \text{ con condición inicial } r_0.$$

Por tanto, por la **Observación 1** de la página 171 de **V. 3**, se tiene que

$$P(t,u) = E^*\left[\exp\left(-\int_0^{u-t} r_s^{0,x} ds\right)\right]|_{x=r_t}, \; x \in \mathbb{R}, \tag{6.70}$$

donde $r_s^{v,x}$, $v \leqslant s$, (flujo estocástico de la ecuación diferencial estocástica (6.63)), es la solución única de la ecuación diferencial estocástica

$$r_s^{v,x} = x + \int_v^s \left(a(z) - b(z)r_z^{v,x}\right)dz + \int_v^s \sigma(z)dW_z^*, \; v \leqslant s, \; x \in \mathbb{R}. \tag{6.71}$$

Ponemos $F(\theta,x) = E^*\left[\exp\left(-\int_0 r_s^{0,x} ds\right)\right]$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in J_u$. Así, tenemos la fórmula $F(u-t,x) = E^*\left[\exp\left(-\int_0^{u-t} r - s^{0,x} ds\right)\right]$, y por (6.70)

$$F(u-t,r_t) = E^*\left[\exp\left(-\int_0^{u-t} r_s^{0,x} ds\right)\right]|_{x=r_t} = P(t,u). \tag{6.72}$$

Calculemos $F(\theta,x)$: $r_s^{0,x}\left(=r_s^x\right)$, $s \in J_u$, es la solución única de la ecuación diferencial estocástica

$$d\xi_t = (a(t)-b(t)\xi_t)\,dt + \sigma_t dW_t^* \text{ con condición inicial } \xi_0 = x. \tag{6.73}$$

Por el **Teorema 6.6.1.**, (pág. 53), $\widetilde{r^x} = \left\{r_s^x\right\}_{s\in J_u}$ es un proceso estocástico Gaussiano (con trayectorias continua). Explícitamente, para todo $t \in J_u$,

$$\begin{aligned} r_s^x = {} & \exp\left(-\int_0^s b(y)dy\right)\left[x + \int_0^s a(z)\exp\left(\int_0^z b(y)dy\right)dz\right] + \\ & + \exp\left(-\int_0^s b(y)dy\right)\int_0^s \sigma(z)\exp\left(\int_0^z b(y)dy\right)dW_z^*,\ s\in J_u, \end{aligned} \tag{6.74}$$

$$E^*\left[r_s^x\right] = \exp\left(-\int_0^s b(y)dy\right)\left[x + \int_0^s a(z)\exp\left(\int_0^z b(y)dy\right)dz\right] \tag{6.75}$$

$$V^*\left[r_s^x\right] = \exp\left(-2\int_0^s b(y)dy\right)\int_0^s \sigma(z)^2\exp\left(2\int_0^z b(y)dy\right)dz, \tag{6.76}$$

y para $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, números reales, y $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant u$, la variable aleatoria $\lambda_1 r_{t_1}^x + \ldots + \lambda_n r_{t_n}^x$ es una variable aleatoria Gaussiana, (apartado **(b)** del teorema).
Además, por el apartado **(c)** de dicho teorema $\zeta_\theta^x = \int_0^\theta r_s^x ds$ es una variable aleatoria Gaussiana con

$$E^*\left[\zeta_\theta^x\right] = \int_0^\theta \exp\left(-\int_0^s b(y)dy\right)\left[x + \int_0^s a(z)\exp\left(\int_0^z b(y)dy\right)dz\right]ds, \tag{6.77}$$

$$\begin{aligned} V^*\left[\zeta_\theta^x\right] = {} & 2\int_0^\theta\int_0^z\int_0^v \sigma(y)^2\cdot \\ & \cdot\exp\left(-\int_0^v b(s)ds - \int_0^z b(s)ds + 2\int_0^y b(s)ds\right)dz\,dv\,dy. \end{aligned} \tag{6.78}$$

Así, por lo dicho en la página 38,

$$F(\theta, x) = E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r_s^x ds\right)\right] = \exp\left(-E^*\left[\zeta_\theta^x\right] + \frac{1}{2}V^*\left[\zeta_\theta^x\right]\right), \tag{6.79}$$

y sustituyendo la esperanza matemática y la varianza por sus valores dados por las fórmulas (6.77) y (6.78), respectivamente,

$$\begin{aligned} P(t,u) = F(u-t, r_t) = \exp\Bigg(-r_t \int_0^{u-t} \exp\left(-\int_0^s b(y)dy\right) ds + \\ -\int_0^{u-t}\int_0^s a(z)\exp\left(-\int_0^s b(y)dy + \int_0^z b(y)dy\right) dzds + \\ + \int_0^{u-t}\int_0^z\int_0^v \sigma(y)^2 \exp\left(-\int_0^v b(\tau)d\tau - \int_0^z b(\tau)d\tau + 2\int_0^y b(\tau)d\tau\right) dzdvdy\Bigg). \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo el cambio de variable $\bar{s} = s + t$ en la fórmula anterior y teniendo en cuenta las fórmulas (6.67) y (6.68), se obtiene

$$P(t,u) = \exp\left(-r_t B(t,u) - A(t,u)\right), \ t \in J_u, \ u \in J_T. \tag{6.80}$$

Los modelos de estructuras temporales de tipos de interés que cumplen una ecuación del tipo de la (6.80) se les llaman *afines*, (véase el **Problema 12. 1**, pág. 98).

Ejercicios y Problemas

6.1. Probar que el modelo de Vasiček es un caso particular del modelo de Hull-White, y obtener la ecuación (6.21) a partir de la ecuación (6.63) particularizada para obtener el primer modelo.

6.2. Probar que a partir de la ecuación (6.80) y la fórmula de Itô, (**Teorema 4.8.5.**, (**V. 3**, pág. 128)), se obtiene la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dP(t,u) = P(t,u)\Bigg[-\frac{\partial A(t,u)}{\partial t} - \frac{\partial B(t,u)}{\partial t} r_t - B(t,u)(a(t) - b(t)r_t) + \\ \frac{1}{2}B(t,u)^2\sigma(t)^2\Bigg] dt - P(t,u)B(t,u)\sigma(t)dW_t^*, \ t \in J_u. \end{aligned}$$

6.7. Opciones sobre bonos en el modelo de Hull-White

Consideramos un *call* europeo de vencimiento θ y precio de ejercicio K, sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$ en el modelo Hull-White. Dicho *call* viene representado por $h = (P(\theta, T) - K)_+$.
Se prueba que se cumplen las hipótesis del **Teorema 6.3.7.**, (pág. 32). Entonces, el precio de la opción h en el tiempo $t \in J_\theta$ es

$$\begin{aligned} V_t &= E^*\left[\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds\right)\cdot h|\mathscr{F}_t\right] = \\ &= E^*\left[\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds\right)(\exp(-r(\theta)B(\theta,T) - A(\theta,T)) - K)_+|\mathscr{F}_t\right], \end{aligned} \tag{6.81}$$

y para $t = 0$

$$\begin{aligned} V_0 = E^*&\left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)(\exp(-r(\theta)B(\theta,T) - A(\theta,T) - K))_+|\mathscr{F}_0\right] = \\ &= E^*\left[I_{\{P(\theta,T)>K\}}\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)(P(\theta,T) - K)\right] = \\ &= E^*\left[I_{\{P(\theta,T)>K\}}\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)P(\theta,T)\right] - \\ &- KE^*\left[I_{\{P(\theta,T)>K\}}\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right], \end{aligned} \tag{6.82}$$

donde, como sabemos, $P(\theta, T) = \exp(-r(\theta)B(\theta, T) - A(\theta, T))$, ((6.80)). Evidentemente, se tiene la igualdad de sucesos,

$$\{P(\theta,T) > K\} = \{-r(\theta)B(\theta,T) < -A(\theta,T) > \ln(K)\} = \left\{r(\theta) < r_\theta^*\right\}, \tag{6.83}$$

donde

$$r_\theta^* = \frac{\ln(K) + A(\theta,T)}{B(\theta,T)}. \tag{6.84}$$

Así, si ponemos $B(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$, $t \in J_T$, se tiene que

$$V_0 = E^*\left[I_{\{r(\theta)<r_\theta^*\}}B(\theta)P(\theta,T)\right] - KE^*\left[I_{\{r(\theta)<r_\theta^*\}}B(\theta)\right]. \tag{6.85}$$

Perfeccionamos la fórmula (6.85): Sabemos que

$$I_{\{r(\theta)<r_\theta^*\}} E^* \left[B(T) P(T,T) | \mathscr{F}_\theta \right] = I_{\{r(\theta)<r_\theta^*\}} B(\theta) P(\theta, T),$$

de donde, absorbiendo el factor $I_{\{r(\theta)<r_\theta^*\}}$ y tomando esperanzas matemáticas, se tiene

$$E^* \left[I_{\{r(\theta)<r_\theta^*\}} B(T) \right] = E^* \left[I_{\{r(\theta)<r_\theta^*\}} B(\theta) P(\theta, T) \right].$$

De esta forma, la fórmula (6.85) se convierte en

$$V_0 = E^* \left[I_{\{r(\theta)<r_\theta^*\}} B(T) \right] - K E^* \left[I_{\{r(\theta)<r_\theta^*\}} B(\theta) \right]. \tag{6.86}$$

Entonces, aplicando el **Lema 6.5.1.**, (pág. 43), se obtiene

$$\begin{aligned} V_0 = \exp\left(\frac{1}{2} V^* \left[\int_0^T r(s)ds\right] - E^* \left[\int_0^T r(s)ds\right]\right) \Phi(\tilde{x}) - \\ - K \exp\left(\frac{1}{2} V^* \left[\int_0^\theta r(s)ds\right] - E^* \left[\int_0^\theta r(s)ds\right]\right) \Phi(\tilde{y}), \end{aligned} \tag{6.87}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{r_\theta^* - \left(E^*[r(\theta)] - cov^*\left(r(\theta), \int_0^T r(s)ds\right)\right)}{\sqrt{V^*[r(\theta)]}}, \\ \tilde{y} &= \frac{r_\theta^* - \left(E^*[r(\theta)] - cov^*\left(r(\theta), \int_0^\theta r(s)ds\right)\right)}{\sqrt{V^*[r(\theta)]}}, \\ \Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta la fórmula (6.66),

$$V_0 = P(0,T)\Phi(\tilde{x}) - K P(0,\theta)\Phi(\tilde{y}). \tag{6.88}$$

Para abreviar la escritura de las fórmulas que nos darán expresiones más explícitas de $\tilde{x}$ y de $\tilde{y}$, escribimos

$$k(t) = \exp\left(-\int_0^t b(u)du\right), \quad t \in J_T.$$

Con esta notación:

(1). $E^*[r(\theta)] = k(\theta)\left[r_0 + \int_0^\theta \frac{a(s)}{k(s)} ds\right]$, ((**a1**), pág. 53).

(2). $V^*[r(\theta)] = \int_0^\theta \sigma(s)^2 \left(\frac{k(\theta)}{k(s)}\right)^2 ds$, ((**a2**), pág. 53).

(3). $cov^*\left(r(\theta), \int_0^\theta r(u)du\right) =$
$= E^*\left[r(\theta)\int_0^\theta r(u)du\right] - E^*[r(\theta)]E^*\left[\int_0^\theta r(u)du\right] =$
$= \int_0^\theta cov^*(r(\theta), r(u))du = \int_0^\theta \left[\int_0^u \sigma(s)^2 \frac{k(\theta)k(u)}{k(s)^2} ds\right] du$, ((**a3**), pág. 53).

(4). $cov^*\left(r(\theta), \int_0^T r(u)du\right) = cov^*\left(r(\theta), \int_0^\theta r(u)du + \int_\theta^T r(u)du\right) =$
$= cov^*\left(r(\theta), \int_0^\theta r(u)du\right) + cov^*\left(r(\theta), \int_\theta^T r(u)du\right) =$
$= cov^*\left(r(\theta), \int_0^\theta r(u)du\right) + \int_\theta^T cov^*(r(\theta), r(u))du =$
$= cov^*\left(r(\theta), \int_0^\theta r(u)du\right) + \int_\theta^T \left[\int_0^\theta \sigma(s)^2 \frac{k(\theta)k(u)}{k(s)^2} ds\right] du.$

A partir de estas fórmulas, se obtiene finalmente

$$V_0 = P(0,T)\Phi(d_+) - KP(0,\theta)\Phi(d_-), \tag{6.89}$$

donde

$$d_\pm = \frac{\ln\left(\frac{P(0,T)}{KP(0,\theta)}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma^2(\theta,T)B(\theta,T)^2}{\sigma(\theta,T)B(\theta,T)},$$

$$\sigma(\theta,T) = \sqrt{\int_\theta^T \left[\int_s^T \sigma(s)\frac{k(u)}{k(s)} du\right]^2 ds},$$

$$B(\theta,T) = \int_\theta^T \frac{k(v)}{k(\theta)} dv, \text{ (véase (6.67))}.$$

Put **europeo sobre un bono cupón-cero en el modelo Hull-White**

Consideramos ahora un *put* europeo de vencimiento θ y precio de ejercicio K, sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$, en el modelo Hull-White. Dicho *put* viene representado por $h = (K - P(\theta,T))_+ = (P(\theta,T) - K)_+ - P(\theta,T) + K$.

En este caso, el precio del *put* europeo en el tiempo $t = 0$ está dado por la fórmula

$$V_0 = E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) \cdot h \right] = E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) (P(\theta,T) - K)_+ \right] -$$
$$- E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) P(\theta,T) \right] + KE^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) \right] =$$
$$= P(0,T)\Phi(d_+) - KP(0,\theta)\Phi(d_-) - P(0,T) + KP(0,\theta) = P(0,T)\left(\Phi(d_+) - 1\right) -$$
$$- KP(0,\theta)\left(\Phi(d_-) - 1\right) = KP(0,\theta)\Phi(-d_-) - P(0,T)\Phi(-d_+).$$

Opciones americanas en el modelo Hull-White

En el MFC definido por el modelo de Hull-White consideramos una opción americana $\tilde{h} = \{h_t\}_{t\in J_\theta}$, (proceso estocástico en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, medible, adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\theta}$ y acotado inferiormente P-a.s.), con tiempo de ejercicio θ sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$, es decir, un contrato que da derecho, a su poseedor, a comprar o vender un bono cupón-cero de vencimiento T por la cantidad $h_{\tau(\omega)}(\omega)$, donde τ es un tiempo de parada en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\theta}$, (**Definición 4.5.7.**, (**V. 3**, pág. 65)), con $\tau(\omega) \leqslant \theta$, $\omega \in \Omega$, elegido por el poseedor de la opción.

Como el MFC definido por el modelo de Hull-White no tiene arbitrajes y es completo, (pág. 34), por el **Teorema 5.7.20.**, (**V. 4**, pág. 136), el precio de opción americana $\tilde{h}$ en el tiempo $t = 0$ es

$$q_a\left(\tilde{h}\right) = \sup_{\tau\in\mathscr{P}_{0,\theta}} E^* \left[\exp\left(-\int_0^\tau r(s)ds \right) \tilde{h}_\tau \right], \tag{6.90}$$

donde $\mathscr{P}_{0,\theta} = \{\tau :\ \tau$ es tiempo de parada en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\theta}$ con $0 \leqslant \tau(\omega) \leqslant \theta,\ \omega \in \Omega\}$.

Casos particulares:
(I). *Call* americano. En el caso de un *call* americano, con tiempo de ejercicio θ y precio K, se tiene

$$\tilde{h} = \{h_t = (P(t,T) - K)_+\}_{t\in J_\theta}.$$

Por la hipótesis **(H)**, (pág. 17), se verifica que

$$\left\{\overline{P}(t,T) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)P(t,T)\right\}_{t\in J_\theta}$$

es una martingala en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$ respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\theta}$ y a P^*. Por tanto,

$$\left\{\exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)(P(t,T)-K)\right\}_{t\in J_\theta}$$

es una submartingala en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$ respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\theta}$ y a P^*. En efecto: Para todo $t, s \in J_\theta$ con $s < t$ y todo $A \in \mathscr{F}_s$,

$$\begin{aligned}
&\int_A \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)(P(t,T)-K)dP = \\
&\quad = \int_A \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)P(t,T)dP - K\int_A \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)dP = \\
&\quad = \int_A \exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)P(s,T)dP - K\int_A \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)dP \geqslant \\
&\quad \geqslant \int_A \exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)P(s,T)dP - K\int_A \exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)dP = \\
&\qquad\qquad = \int_A \exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)(P(s,T)-K)dP,
\end{aligned}$$

(véase la página 59 de **V. 3**). Ahora, por la desigualdad de Jensen, (**V. 2**, pág. 180), se concluye que

$$\left\{\exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)(P(t,T)-K)_+\right\}_{t\in J_\theta}$$

es una submartingala en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$ respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\theta}$ y a P^*.
Finalmente, por el **Teorema 4.5.18.**, (**V. 3**, pág 76), se tiene

$$\begin{aligned}
q_a\left(\tilde{h}\right) = \sup_{\tau\in\mathscr{P}_{0,\theta}} E^*\left[\exp\left(-\int_0^\tau r(s)ds\right)(P(\tau,T)-K)_+\right] = \\
= E^*\left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)(P(\theta,T)-K)_+\right] = V_0, \quad (6.91)
\end{aligned}$$

que es valor en $t = 0$ del *call* europeo de vencimiento θ y precio de ejercicio K sobre un bono cupón-cero de vencimiento T, (véase la página 64). Así, el *call* americano coincide con el *call* europeo, (resultado análogo al establecido en el **V. 4**, en el modelo BSM, para opciones sobre acciones).

***Put* americano.** La fórmula (6.90) nos dice que el problema de dar precio a una opción americana sobre un bono cupón-cero es un *problema de tiempo de parada óptimo*. En el caso de un *call* americano se ha resuelto fácilmente como se ha visto anteriormente, pero en el caso de un *put* americano la obtención de una solución analítica es muy complicada y posiblemente imposible. Sin embargo, existen resultados parciales y buenos procedimientos de aproximación. A continuación se expone uno de estos resultados, sin demostraciones (la prueba detallada puede verse en [41]).

Consideramos las variables aleatorias

$$Y^*(t,r) = \sup_{\tau\in\mathscr{P}_{t,\theta}} E^*_{t,r}\left[\exp\left(-\int -t^{\tau} r(u)du\right)(K-P(\tau,T))_+\right],$$

donde $E^*_{t,s}$ es la esperanza condicionada de la variable aleatoria del corchete, respecto de la condición $r(t) = r$, y $\mathscr{P}_{t,\theta}$ es el conjunto de los tiempos de parada, τ en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$ respecto a $\{\mathscr{F}_s\}_{s\in J_\theta}$ y a P^*, tales que $t \leqslant \tau(\omega) \leqslant \theta$, $\omega\in\Omega$.
Ponemos

$$C^T = \left\{(t,r):\ Y^*_{t,r} > (K-P(t,T))_+,\ 0\leqslant t<T,\ r>0\right\}$$

y

$$D^T = \left\{(t,r):\ Y^*_{t,r} = (K-P(t,T))_+,\ 0\leqslant t<T,\ r>0\right\}.$$

Se prueba que existe una función $r^*(t)$ tal que

$$\begin{aligned} C^T &= \left\{(t,r):\ r(t)<r^*(t),\ 0\leqslant t<T,\ r>0\right\}, \\ D^T &= \left\{(t,r):\ r(t)\geqslant r^*(t),\ 0\leqslant t<T,\ r>0\right\}. \end{aligned}$$

Se verifica

$$V_0^a = V_0^e + K\int_0^\theta P(0,s)\left[\Phi\left(-v^*(0,s)\right)f(0,s)+\sigma(0,s)\varphi\left(v^*(0,s)\right)\right]ds, \quad (6.92)$$

donde,

V_0^a es el precio de la opción americana en $t = 0$,
V_0^e es el precio de la opción europea en $t = 0$,
$f(s,t) = -\frac{\partial \ln(P/t,s)}{\partial s}$,
$v^*(t,s) = \frac{r^*(s)-f(s,t)}{\sigma(t,s)}$,
$\sigma^2(t,s) = V^*[r(s)|r(t) = r] = E^*\left[r(s)^2|r(t) = r\right] - (E^*[t(s)|r(t) = r])^2$,
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicios y Problemas

7.1. Probar las igualdades (6.83) de la página 62.

7.2. En el modelo de Hull-White $b(t) = 0,04$ y $\sigma(t) = 0,01$. Calcular el precio de un *call* europeo de vencimiento $\theta = 1$ año y precio de ejercicio 60 Euros, sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T = 5$ años y valor nominal 100 Euros, suponiendo que la estructura temporal de los tipos de interés es *plana* con tipo de interés constante del $0,1$.

6.8. Modelo de Ho-Lee

En el año 1986, T. Ho y S. Lee estudiaron, en [31], el caso particular del modelo de Hull-White en el que la ecuación (6.63) se reduce a

$$dr(t) = a(t)dt + \sigma dW_t^*, \text{ condición inicial } r(0) = r_0, \tag{6.93}$$

con r_0 y σ números reales positivos y $a(t)$ función determinista.
Como consecuencia de los resultados obtenidos para el modelo de Hull-White, se tienen las siguientes fórmulas y propiedades del modelo de Ho-Lee:

(1). $r(t) = r_0 + \int_0^t a(u)du + \sigma W_t^*$, $t \in J_T$,
$r(t) = r(s) + \int_s^t a(u)du + \sigma\left(W_t^* - W_s^*\right)$, $t, s \in J_T$.
(**Teorema 6.6.1.**, (pág. 53) y **Ejemplo 1**, (**V. 3**, pág. 102)).

(2). $\tilde{r} = \{r_t\}_{t\in J_T}$ es un proceso estocástico Gaussiano tal que $E^*[r(t)] = r_0 + \int_0^t a(u)du$ y $V^*[r(t)] = \sigma^2 t$, $t \in J_T$, (**Teorema 6.6.1.**, pág. 53).

(3). $E^*[r(t)|\mathscr{F}_s] = r(s) + \int_s^t a(u)du$, $s, t \in J_T$ con $s < t$, ((**1**); **V. 2**, página 221; y **V. 3**, página 83).

(4). Para todo $s, t \in J_T$ con $s < t$, ((**3**); (**1**); **V. 2**, página 221; y **V. 3**, pág. 83),

$$V^*[r(t)|\mathscr{F}_s] = E^*\left[\left(r(t) - E^*[r(t)|\mathscr{F}_s]\right)^2 |\mathscr{F}_s\right] =$$
$$= \sigma^2 E^*\left[\left(W_t^* - W_s^*\right)^2 |\mathscr{F}_s\right] = \sigma^2(t-s).$$

(5). $P(t,u) = \exp\left(-r(t)(u-t) + \frac{\sigma^2}{6}(u-t)^3 - \int_t^u \left(\int_t^v a(s)ds\right)dv\right)$, $t \in J_u$, $u \in J_T$, (véase (6.80)). Esta igualdad también se escribe como: $P(t,u) =$ $= \exp\left(-r(t)(u-t) + \frac{\sigma^2}{6}(u-t)^3 - \int_t^u \left(\int_0^v a(s)ds\right)dv + (u-t)\int_0^t a(s)ds\right)$.

(6). En J_u, $u \in J_T$, se tiene la ecuación diferencial estocástica

$dP(t,u) = r(t)P(t,u)dt - \sigma(u-t)P(t,u)dW_t^*$, condición inicial $P(0,u)$.

En efecto: Se tiene que $P(t,u) = \exp(\xi_t)$, $t \in J_u$, donde

$$\xi_t = -r(t)(u-t) + \frac{\sigma^2}{6}(u-t)^3 - \int_t^u \left(\int_0^v a(s)ds\right)dv + (u-t)\int_0^t a(s)ds =$$
$$= -r_0(u-t) - \sigma(u-t)W_t^* + \frac{\sigma^2}{6}(u-t)^3 - \int_t^u \left(\int_0^v a(s)ds\right)dv,$$

(para obtener la última igualdad, se ha utilizado (**1**)). Entonces, teniendo en cuenta la igualdad

$$\int_0^t s dW_s^* = tW_t^* - \int_0^t W_s^* ds,$$

(véase [63], pág. 37), se deduce que, para $t \in J_u$,

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \left[r_0 - \frac{\sigma^2}{2}(u-s)^2 + \int_0^s a(v)dv + \sigma W_s^*\right] ds - \int_0^t \sigma(u-s)dW_s^*.$$

Ahora, se aplica el **Teorema 4.8.5. (Fórmula de Itô)**, (**V. 3**, pág. 128), al proceso estocástico $\{\xi_t\}_{t \in J_u}$, tomando $f(t,x) = \exp(x)$, y se obtiene

$$dP(t,u) =$$
$$= \left[P(t,u)\left(r_0 - \frac{\sigma^2}{2}(u-t)^2 + \int_0^t a(v)dv + \sigma W_t^* + \frac{1}{2}\sigma^2(u-t)^2\right)\right] dt -$$
$$- P(t,u)\sigma(u-t)dW_t^* = P(t,u)r(t)dt - P(t,u)\sigma(u-t)dW_t^*.$$

(7). En J_u, $u \in J_T$, se tiene la ecuación diferencial estocástica

$$d\left(\frac{1}{P(t,u)}\right) = \frac{\sigma^2(u-t)^2 - r(t)}{P(t,u)} dt + \frac{\sigma(u-t)}{P(u,t)} dW_t^*,$$

(basta aplicar el **Teorema 4.8.5. (Fórmula de Itô)**, (**V. 3**, pág. 128), a la ecuación diferencial estocástica de **(6)**, tomando $f(t,x) = \frac{1}{x}$).

Ejercicios y Problemas

8.1. Probar que en el modelo de Ho-Lee se verifica

$$P(t,u) = \frac{P(0,u)}{P(0,t)} \exp\left(-(u-t)\frac{\partial ln(P(0,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t(u-t)^2 - r_t(u-t)\right),\ t \in J_u.$$

6.9. El modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Suponemos que estamos en el escenario financiero de incertidumbre de las páginas 16 y 17, y que

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t, \text{ condición inicial } r(0) \tag{6.94}$$

donde $r(0)$, σ y a son constantes no negativas y $b \in \mathbb{R}$. Es decir, el tipo de interés instantáneo evoluciona con (6.94). Suponemos también que $q(t) = -\alpha\sqrt{r(t)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, (**Proposición 6.2.5.**, pág. 20).

Para la existencia de solución de (6.94) no podemos recurrir a la teoría general, ya que la función raíz cuadrada no es de Lipschitz. Se tiene, no obstante, el siguiente teorema, [34].

Teorema 6.9.1. *Sean $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\infty}, P\right)$ una base estocástica y $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_\infty}$ un proceso estocástico de Wiener, en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\infty}$ y a P. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x \geqslant 0$, existe un único proceso estocástico continuo y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\infty}$, $\tilde{\xi} = \{\xi_t\}_{t\in J_\infty}$, con valores en $\mathbb{R}^+$ tal que*

$$d\xi_t = (a - b\xi_t)\,dt + \sigma\sqrt{\xi_t}dW_t, \text{ con condición inicial } \xi_0 = x \tag{6.95}$$

Ponemos $\xi_t^x = \xi_t^{0,x}$, (la solución de la ecuación diferencial estocástica (6.95) con condición inicial $\xi_0 = x$), y τ_0^x el tiempo de parada, (**V. 3**, pág. 65), en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_\infty}$, definido por:

$$\tau_0^x = \text{ínf}\left\{t : \ t \geqslant 0, \ \xi_t^x = 0\right\}, \text{ con ínf}(\emptyset) = +\infty.$$

Proposición 6.9.2. *En las hipótesis del teorema anterior se tiene:*

(1). *Si* $a \geqslant \sigma^2/2$, *entonces* $P\left(\left\{\tau_0^x = +\infty\right\}\right) = 1$, *para todo* $x > 0$.

(2). *Si* $0 \leqslant a < \sigma^2/2$ *y* $b \geqslant 0$, *entonces* $P\left(\left\{\tau_0^x < +\infty\right\}\right) = 1$, *para todo* $x > 0$.

(3). *Si* $0 \leqslant a < \sigma^2/2$ *y* $b < 0$, *entonces* $P\left(\left\{\tau_0^x < +\infty\right\}\right) \in (0,1)$, *para todo* $x > 0$.

(véase [45]).

Teorema 6.9.3. *Para* λ, μ, *números reales no negativos, se tiene:*

$$E\left[\exp\left(-\lambda\xi_t^x\right)\exp\left(-\mu\int_0^t \xi_s^x ds\right)\right] = \exp\left(-a\phi_{\lambda,\mu}(t)\right)\exp\left(-x\psi_{\lambda,\mu}(t)\right), \tag{6.96}$$

donde

$$\phi_{\lambda,\mu}(t) = -\frac{2}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma\exp\left(\frac{t(\gamma+b)}{2}\right)}{\sigma^2\lambda(\exp(\gamma t)-1)+\gamma-b+(\gamma+b)\exp(\gamma t)}\right) \tag{6.97}$$

$$\psi_{\lambda,\mu}(t) = \frac{\lambda(\gamma+b+(\gamma-b)\exp(t\gamma))+2\mu(\exp(t\gamma)-1)}{\sigma^2\lambda(\exp(\gamma t)-1)+\gamma-b+(\gamma+b)\exp(\gamma t)}, \tag{6.98}$$

siendo en (6.97) y en (6.98), $\gamma = \sqrt{b^2+2\sigma^2\mu}$.

Demostración. Sea $F(t,x)$, $0 \leqslant t$, $0 \leqslant x$, una función con derivadas parciales, $\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}$, continuas tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = \frac{\sigma^2 x}{2}\cdot\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2} + (a-bx)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} - \mu x F(t,x) \\ F(0,x) = \exp(-\lambda x). \end{cases} \tag{6.99}$$

Entonces, por la fórmula de Itô, (**Teorema 4.8.5.**, (**V. 3**, pág. 128)), se tiene

$$\begin{aligned}
&F\left(s,\xi_s^x\right) = \\
&= F(0,x) + \int_0^s \left[\frac{\partial F\left(t,\xi_t^x\right)}{\partial t} + \frac{\partial F\left(t,\xi_t^x\right)}{\partial x}\left(a - b\xi_t^x\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F\left(t,\xi_t^x\right)}{\partial x^2}\sigma^2\xi_t^x\right] dt + \\
&+ \int_0^s \frac{\partial F\left(t,\xi_t^x\right)}{\partial x}\sigma\sqrt{\xi_t^x}\, dW_t = F(0,x) + \int_0^s \left[2\frac{\partial F\left(t,\xi_t^x\right)}{\partial t} + \mu\xi_t^x F\left(t,\xi_t^x\right)\right] dt + \\
&\qquad + \int_0^s \frac{\partial F\left(t,\xi_t^x\right)}{\partial x}\sigma\sqrt{\xi_t^x}\, dW_t.
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Itô a $G(t,x) = F(T-t,x)$, (T constante arbitraria con $T \geqslant t$), se tiene

$$F\left(T-s,\xi_s^x\right) = F(T,x) + \int_0^s \mu\xi_t^x F\left(T-t,\xi_t^x\right) dt + \int_0^s \frac{\partial F\left(T-t,\xi_t^x\right)}{\partial x}\sigma\sqrt{\xi_t^x}\, dW_t, \tag{6.100}$$

donde $\left\{\xi_t^x\right\}_{t\in J_T}$ es la solución de (6.95), es decir

$$\xi_t^x = x + \int_0^t \left(a - b\xi_s^x\right) ds + \int_0^t \sigma\sqrt{\xi_s^x}\, dW_s.$$

Ponemos $\eta_t = \int_0^t \mu\xi_s^x ds$, $t \in J_T$, y $g(y) = \exp(-y)$ y aplicamos la fórmula de Itô. Obtenemos:

$$\exp(-\eta_t) = 1 + \int_0^t -\exp(-\eta_s)\mu\xi_s^x ds. \tag{6.101}$$

Aplicamos la integración por partes estocástica, (**V. 3**, pág. 144), a (6.100) y (6.101), y se tiene:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\int_0^t \mu\xi_s^x ds\right) F\left(T-t,\xi_t^x\right) = \\
&\qquad = F(T,x) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^t \mu\xi_u^x du\right)\frac{\partial F\left(T-s,\xi_s^x\right)}{\partial x}\sigma\sqrt{\xi_s^x}\, dW_s.
\end{aligned} \tag{6.102}$$

Así, $\exp\left(-\int_0^t \mu\xi_s^x ds\right)\cdot F\left(T-t,\xi_t^x\right)\left(=\mu_t\right)$, $t \in J_T$, es una martingala, en el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathscr{F},P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P, y por tanto,

$E\left(\mu_T\right) = E\left(\mu_0\right)$ o bien $E\left(\mu_T\right) = E(F(T,x)) = F(T,x)$, de donde $F(T,x) = E\left(\exp\left(-\int_0^T \mu\xi_s^x ds\right)\exp\left(-\lambda\xi_T^x\right)\right)$, ya que $F(0,x) = \exp(-\lambda x)$, (6.99), y como T es arbitrario, se tiene

$$F(t,x) = E\left(\exp\left(-\int_0^t \mu\xi_s^x ds - \lambda\xi_t^x\right)\right). \tag{6.103}$$

Se prueba (es una propiedad del flujo estocástico de (6.95)) que efectivamente se tiene (6.96), sin precisar todavía las funciones $\phi_{\lambda,\mu}$, $\psi_{\lambda,\mu}$, es decir, lo que se demuestra con la propiedad del flujo es que el segundo miembro de (6.103) es del tipo $\exp(-a\phi(t) - x\psi(t))$, (véase [34]). Lo que hemos probado es que si $F(t,x)$, con derivadas continuas, es solución de (6.99), entonces

$$F(t,x) = \exp(-a\phi(t) - x\psi(t)),$$

y de esta última expresión se pasa a

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, \;\; \psi(0) = \lambda \\ -\psi'(t) = \frac{\sigma^2}{2}\psi(t)^2 + b\psi(t) - \mu \\ \phi'(t) = \psi(t). \end{cases} \tag{6.104}$$

La resolución de (6.104) da las fórmulas (6.97) y (6.98), lo que termina la demostración. □

El **Teorema 6.9.3.** para $\mu = 0$ nos da:

$$(p(\lambda) =) E\left(\exp\left(-\lambda\xi_t^x\right)\right) = \frac{1}{(2\lambda L + 1)^{2a/\sigma^2}} \exp\left(\frac{-\lambda L\zeta}{2\lambda L + 1}\right), \tag{6.105}$$

donde $L = \left(\sigma^2/4b\right)(1 - \exp(-bt))$, $\zeta = (4xb)/\left(\sigma^2(\exp(bt) - 1)\right)$, (recordamos que $p(\lambda)$ es la transformada de Laplace de ξ_t^x), y

$$E\left(\exp\left(-\frac{\lambda}{L}\xi_t^x\right)\right) = \frac{1}{(2\lambda + 1)^{2a/\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda\zeta}{2\lambda + 1}\right) = g_{4a/\sigma^2,\zeta}(\lambda), \tag{6.106}$$

donde $g_{\delta,\eta}(\lambda) = 1/(2\lambda + 1)^{\delta/2} \cdot \exp((-\lambda\eta)/(2\lambda + 1))$, (véase, en la página 83, la **Definición 6.10.1.**).

Por la **Proposición 6.2.5.**, (pág. 20), $\widetilde{W}^{\tilde{q}} = \left\{W_t^* = W_t - \int_0^t q(s)ds\right\}_{t\in J_T}$ es un proceso de Wiener, en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P^*, donde $P^*(A) = \int_A L_T dP$, $A \in \mathscr{F}$, $L_T = \exp\left(\int_0^T q(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T q(s)^2 ds\right)$. Además,

$$\int_0^t \sigma\sqrt{r(s)}dW_s + \int_0^t \sigma\sqrt{r(s)}(-q(s))ds = \int_0^t \sigma\sqrt{r(s)}dW_s^*,$$

(invariancia de la integral estocástica por el cambio de Girsanov), y por consiguiente, aplicando el teorema de Girsanov tomando, para todo $t \in J_T$, $\theta_t = -q(t) = \alpha\sqrt{r(t)}$,

$$dr(t) = [a - (b + \alpha\sigma)r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t^*. \qquad (6.107)$$

De la **Proposición 6.2.2.(2)**, (página 17), se deduce la igualdad $P(0,T) = E^*\left[\exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right)\right]$, (precio del bono cupón-cero de vencimiento, T, en 0).

Aplicamos el **Teorema 6.9.1.** y el **Teorema 6.9.3.** en el escenario: Base estocástica $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P^*\right)$, proceso de Wiener $\widetilde{W^*} = \{W_t\}_{t\in J_T}$, en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P^*, y la ecuación diferencial estocástica (6.107). Entonces,

$$E^*\left[\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)\right] = \exp\left(-a\phi_{0,1}(t)\right)\exp\left(-r(0)\psi_{0,1}(t)\right),\ \lambda = 0,\ \mu = 1$$
$$\phi_{0,1}(t) = -\frac{2}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\sqrt{b^{*2}+2\sigma^2}\cdot\exp\left(t(\gamma^*+b^*)/2\right)}{\gamma^*-b^*+(\gamma^*+b^*)\exp(\gamma^* t)}\right),$$
$$\psi_{0,1}(t) = \frac{2(\exp(\gamma^* t)-1)}{\gamma^*-b^*+(\gamma^*+b^*)\exp(\gamma^* t)},$$
$$\gamma^* = \sqrt{b^{*2}+2\sigma^2},\ \ b^* = b + \alpha\sigma.$$

Así,

$$P(0,T) = \exp\left(-a\phi_{0,1}(T) - r(0)\psi_{0,1}(T)\right). \qquad (6.108)$$

De nuevo por la **Proposición 6.2.2.(2)**, (pág. 17), se tiene:

$$P(t,T) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right]$$

y por (6.31), (pág. 37),

$$P(t,T) = E^*\left[\exp\left(-\int_0^{T-t} r_u^{0,x}du\right)\right]|_{x=r(t)},$$

donde $r_u^{0,x}$ es la solución de (6.107) con condición inicial x, y por el **Teorema 6.9.3.**, (pág. 71),

$$E^*\left[\exp\left(-\int_0^{T-t} r_u^{0,x}\,du\right)\right] = \exp\left(-a\phi_{0,1}(T-t) - x\psi_{0,1}(T-t)\right)$$

y

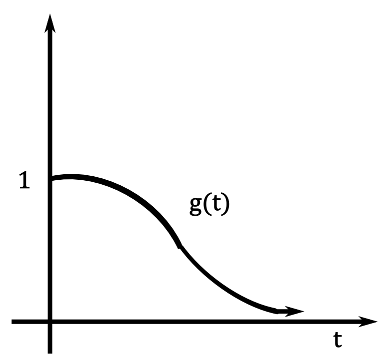
$$P(t,T) = \exp\left(-a\phi_{0,1}(T-t) - r(t)\psi_{0,1}(T-t)\right). \tag{6.109}$$

Observamos que para $t > 0$, $\psi_{0,1}(t) > 0$ y $\psi_{0,1}(0) = 0$. Naturalmente para $t \geqslant 0$, $\gamma^* - b^* + \exp\left(\gamma^* t\right)(\gamma^* + b^*) > 0$, ya que $\gamma^* + b^* > 0$.
Ponemos $\phi_{0,1} = \phi$ y $\psi_{0,1} = \psi$. Entonces, (6.109) se convierte en

$$P(t,T) = \exp\left(-a\phi(T-t) - r(t)\psi(T-t)\right). \tag{6.110}$$

La igualdad anterior nos dice que el modelo CIR es un modelo de estructura temporal de tipos de interés afín, (véase el **Problema 12.1**, (pág. 98)).

Adoptamos la notación:
$g(t) = \left(2\gamma^* \exp\left((t/2)\left(\gamma^* + b^*\right)\right)\right) / \left(\gamma^* - b^* + \left(\gamma^* + b^*\right)\exp\left(\gamma^* t\right)\right)$.



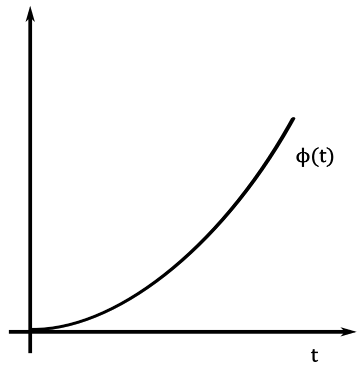
Entonces, $g(0) = 1$, $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$, $g(t) \geqslant 0$ para todo $t \geqslant 0$,

$$g'(t) = \frac{1}{D^2}\cdot$$

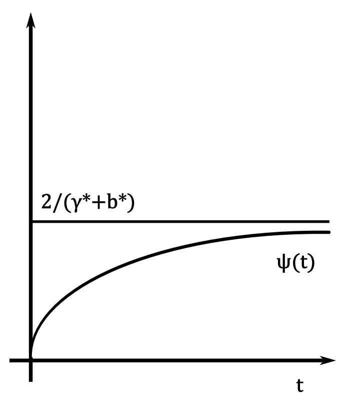
$$\cdot\left[\gamma^*\left(\gamma^* + b^*\right)\left(D\exp\left(\frac{t}{2}\left(\gamma^* + b^*\right)\right) - 2\exp\left(\frac{t}{2}\left(\gamma^* + b^*\right)\right)\gamma^*\exp\left(\gamma^* t\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[\gamma^*\left(\gamma^* + b^*\right)\exp\left(\frac{t}{2}\left(\gamma^* + b^*\right)\right)\left(D - 2\gamma^*\exp\left(\gamma^* t\right)\right)\right],$$

donde D es el denominador de la expresión de $g(t)$, $g'(0) = 0$ y $g'(t) < 0$ para todo $t > 0$, $\lim_{t\to+\infty} g'(t) = 0$.
Así, como $\phi(t) = -2/\sigma^2 \ln(g(t))$, se tiene que $\phi(0) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = +\infty$ y $\phi(t) > 0$, para todo $t > 0$, $\phi'(0) = 0$, $\phi'(t) > 0$ para todo $t > 0$.



Por último, $\psi'(t) > 0$ para $t \geqslant 0$, $\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = 2/\left(\gamma^* + b^*\right)$, $\psi'(0) = 1$, $\psi'(t) = \left(1/D^2\right) \cdot 4\gamma^* \exp\left(\gamma^* t\right)$, $\lim_{t\to+\infty} \psi'(t) = 0$, y para todo $t \geqslant 0$, $\psi(t) < 2/\left(\gamma^* + b^*\right)$.



Ejercicios y Problemas

9.1. Probar que si en el modelo CIR se tiene que $2a \geqslant \sigma^2$ y $r(0) > 0$, entonces $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$ es un proceso estocástico positivo.

9.2. Probar las propiedades de las funciones g, ϕ y ψ establecidas en las páginas 75 y 76.

6.10. Precio de las opciones en el modelo CIR

Consideremos un *call* europeo de vencimiento θ y precio de ejercicio K, sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$ en el modelo Cox-Ingersoll-Ross. Dicho *call* viene representado por $h = (P(\theta, T) - K)_+$.
Calculemos el precio de h en el tiempo $t = 0$.
Se prueba que se cumplen las hipótesis del **Teorema 6.3.7.**, (pág. 32). Entonces,

$$\begin{aligned} V_0 = E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) \cdot h \right] &= E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) \cdot (P(\theta, T) - K)_+ \right] = \\ = E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) (\exp(-a\phi(T-\theta) - r(\theta)\psi(T-\theta)) - K)_+ \right] &= \\ = E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) P(\theta, T) I_{\{r(\theta)<r^*\}} \right] &- \\ - KE^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) I_{\{r(\theta)<r^*\}} \right], & \quad (6.111) \end{aligned}$$

donde $r^* = \left(-a\phi(T-\theta) - ln(K)\right) / \psi(T-\theta)$, y teniendo en cuenta la igualdad $\left\{r(\theta) < r^*\right\} = \{P(\theta, T) > K\}$.
Por la **Proposición 6.2.2**, (pág. 17), sabemos que:

$$E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) P(\theta, T) \right] = P(0, T) \text{ y } E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) \right] = P(0, \theta).$$

Además,

$$I(P(\theta, T) > K) E^* \left[B(T) P(T, T) | \mathscr{F}_\theta \right] = I(P(\theta, T) > K) B(\theta) P(\theta, T), \quad (6.112)$$

donde se ha introducido la notación $I(P(\theta, T) > K) = I_{\{P(\theta,T)>K\}}$, $B(T) = \exp\left(-\int_0^T r(s)ds \right)$ y $B(\theta) = \exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right)$. Si en (6.112) se absorbe el factor $I(P(\theta, T) > K)$ y se toman esperanzas matemáticas, se tiene

$$E^* [I(P(\theta, T) > K) B(T)] = E^* [I(P(\theta, T) > K) B(\theta) P(\theta, T)].$$

Así, de (6.111),

$$V_0 = E^* \left[I\left(r(\theta) < r^*\right) B(T) \right] - KE^* \left[B(\theta) I\left(r(\theta) < r^*\right) \right]. \tag{6.113}$$

Consideramos las probabilidades P_1, P_2, en $(\Omega, \mathscr{F})$, dadas por: $dP_1 = ((B(\theta)P(\theta,T))/P(0,T))dP^*$, $dP_2 = (B(\theta)/P(0,\theta))dP^*$. Entonces, de (6.113), se tiene

$$V_0 = P(0,T)P_1\left(r(\theta) < r^*\right) - KP(0,\theta)P2\left(r(\theta) < r^*\right). \tag{6.114}$$

Sean:

$$L_1 = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\exp(\gamma^*\theta)-1}{\gamma^*(\exp(\gamma^*\theta)+1)+(\sigma^2\psi(T-\theta)+b^*)(\exp(\gamma^*\theta)-1)}$$
$$L_2 = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\exp(\gamma^*\theta)-1}{\gamma^*(\exp(\gamma^*\theta)+1)+b^*(\exp(\gamma^*\theta)-1)},$$

(ya hemos visto que $\gamma^* - b^* + \exp\left(\gamma^* t\right)\left(\gamma^* + b^*\right) > 0$).
Si $f^{(1)}_{r(\theta)/L_1}(x)$ es función de densidad de $\frac{r(\theta)}{L_1}$ respecto a P_1 y $f^{(2)}_{r(\theta)/L_2}(x)$ es función de densidad de $\frac{r(\theta)}{L_2}$ respecto a P_2, entonces de (6.114) se obtiene

$$V_0 = P(0,T)\int_{-\infty}^{r^*/L_1} f^{(1)}_{r(\theta)/L_1}(x)dx - KP(0,\theta)\int_{-\infty}^{r^*/L_2} f^{(2)}_{r(\theta)/L_2}(x)dx. \tag{6.115}$$

Se prueba que $f^{(1)}_{r(\theta)/L_1}(x) = f_{4a/\sigma^2,\zeta_1}(x)$, (6.125), y $f^{(2)}_{r(\theta)/L_1}(x) = f_{4a/\sigma^2,\zeta_2}(x)$, (6.126), donde

$$\zeta_1 = \frac{8r(0)\gamma^{*2}\exp(\gamma^*\theta)}{\sigma^2(\exp(\gamma^*\theta)-1)(\gamma^*(\exp(\gamma^*\theta)+1)+(\sigma^2\psi(T-\theta)+b^*)(\exp(\gamma^*\theta)-1))}.$$
$$\zeta_2 = \frac{8r(0)\gamma^{*2}\exp(\gamma^*\theta)}{\sigma^2(\exp(\gamma^*\theta)-1)(\gamma^*(\exp(\gamma^*\theta)+1)+b^*(\exp(\gamma^*\theta)-1))}.$$

En efecto:

$$E_1\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)\right] = E^*\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)\right]. \tag{6.116}$$

Por otra parte, por la **Proposición 6.2.2.**, (pág. 17),

$$\frac{1}{P(0,T)}\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)E^*\left[\overline{P}(T,T)|\mathscr{F}_\theta\right] = \frac{1}{P(0,T)}\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)\overline{P}(\theta,T). \tag{6.117}$$

De (6.116) y (6.117), se obtiene

$$E_1\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)\right]=E^*\left[\frac{1}{P(0,T)}\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)B(T)\right]=$$
$$=E^*\left[\frac{1}{P(0,T)}\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)B(\theta)\exp\left(-\int_\theta^T r(s)ds\right)\right]. \quad (6.118)$$

Por la **Proposición 6.2.2.**, (pág. 17), $E^*\left[\exp\left(-\int_\theta^T r(s)ds\right)|\mathscr{F}_\theta\right]=P(\theta,T)$. Así, de (6.111) y (6.118),

$$E_1\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)\right]=\frac{1}{P(0,T)}E^*\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)B(\theta)P(\theta,T)\right]=\frac{1}{P(0,T)}\cdot$$
$$\cdot E^*\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\exp\big(-a\phi(T-\theta)-r(\theta)\psi(T-\theta)\big)\right]=$$
$$=\frac{1}{P(0,T)}\exp(-a\phi(T-\theta)E^*\left[\exp\left(-r(\theta)\left(\frac{\lambda}{L_1}+\psi(T-\theta)\right)\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right]=RE^*\left[\exp\left(-\Lambda r(\theta)-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right], \quad (6.119)$$

donde $R=(1/P(0,T))\exp(-a\phi(T-\theta))$ y $\Lambda=(\lambda/L_1)+\psi(T-\theta)$.

Por el **Teorema 6.9.3.**, (pág. 71), aplicado a la probabilidad P^* y el proceso de Wiener $\widetilde{W^*}$, se tiene

$$E^*\left[\exp\left(-\Lambda r(\theta)-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right]=\exp\big(-a\phi_{\Lambda,1}(\theta)-r(0)\psi_{\Lambda,1}(\theta)\big), \quad (6.120)$$

donde

$$\phi_{\Lambda,1}(\theta)=-\tfrac{2}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma^*\exp\left(\frac{\theta}{2}(\gamma^*+b^*)\right)}{\sigma^2\Lambda(\exp(\gamma^*\theta)-1)+\gamma^*-b^*+\exp(\gamma^*\theta)(\gamma^*+b^*)}\right)$$
$$\psi_{\Lambda,1}(\theta)=\frac{\Lambda(\gamma^*+b^*+\exp(\gamma^*\theta)(\gamma^*-b^*))+2(\exp(\gamma^*\theta)-1)}{\sigma^2\Lambda(\exp(\gamma^*\theta)-1)+\gamma^*-b^*+\exp(\gamma^*\theta)(\gamma^*+b^*)}.$$

Así, de (6.119) y (6.120),

$$E_1\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_1}\right)\right]=\exp\big(-a\phi(T-\theta)\big)\frac{1}{P(0,T)}\cdot$$
$$\cdot\exp\big(-a\phi_{\Lambda,1}(\theta)-r(0)\psi_{\Lambda,1}(\theta)\big)=\frac{1}{(2\lambda+1)^{\frac{2a}{\sigma^2}}}\exp\left(-\frac{\lambda\zeta_1}{2\lambda+1}\right). \quad (6.121)$$

Para probar la última igualdad se requiere un laborioso cálculo. Por lo visto en la página 75, se tiene que $\phi(T-\theta) = \phi_{0,1}(T-\theta)$, $\psi(T) = \psi_{0,1}(T)$ y $P(0,T) = \exp(-a\phi(T) - r(0)\psi(T))$. Probar la igualdad mencionada es equivalente, tomando logaritmos neperianos, a probar la igualdad:

$$a\left(-\phi(T-\theta)+\phi(T)-\phi_{\Lambda,1}(\theta)\right)+r(0)\left(\psi(T)-\psi_{\Lambda,1}(\theta)\right) = \\ = (-2a/\sigma^2)\ln(2\lambda+1)-(\lambda\zeta_1)/(2\lambda+1).$$

De hecho se prueba que $a\left(-\phi(T-\theta)+\phi(T)-\phi_{\Lambda,1}(\theta)\right) = (-2a/\sigma^2)\ln(2\lambda+1)$ y $r(0)\left(\psi(T)-\psi_{\Lambda,1}(\theta)\right) = (-\lambda\zeta_1)/(2\lambda+1)$.
Se obtiene (en el proceso de cálculo) que:

$$\phi_{\Lambda,1}(\theta) = -\frac{\theta}{\sigma^2}\left(\gamma^*+b^*\right)+\frac{2}{\sigma^2}\left(\ln(2\lambda+1)+\ln\left(\overline{D}\right)\right),$$

donde:
$\overline{D} = (1/2\gamma^*)\left(A_\theta + 2\sigma^2\hat{\theta}\widehat{T-\theta}/D\right)$,
$A_\theta = \gamma^* - b^* + \exp\left(\gamma^*\theta\right)\left(\gamma^*+b^*\right)$,
$\hat{\theta} = \exp\left(\gamma^*\theta\right)-1$, $\widehat{T-\theta} = \exp\left(\gamma^*(T-\theta)\right)$,
$D = \gamma^* - b^* + \exp\left(\gamma^*(T-\theta)\right)\left(\gamma^*+b^*\right)$,
$\phi(T-\theta) = (-2/\sigma^2\left(((T-\theta)/2)\left(\gamma^*+b^*\right)-\ln\left(D/(2\gamma^*)\right)\right)$,
$\phi(T) = (-2/\sigma^2\left((T/2)\left(\gamma^*+b^*\right)-\ln\left(A_T/(2\gamma^*)\right)\right)$,
$A_T = \gamma^* - b^* + \exp\left(\gamma^* T\right)\left(\gamma^*+b^*\right)$.

Notas. (1). Distribución *gamma*. La función $\Gamma(p)$ es (definición) $\Gamma(p) = \int_0^\infty \exp(-x)x^{p-1}dx$, integral que converge para $p>0$. Se prueba que $\Gamma(p)$ es continua; $\Gamma(1)=1$; $\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)$, $p>1$; $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$; $\Gamma(p) = (p-1)!$, p entero mayor o igual que 1. Si a es el número complejo $b+ic$ con $b>0$, entonces $\Gamma(a) = \int_0^\infty \exp(-x)x^{a-1}dx$.
Sea $\xi \geqslant 0$ una variable aleatoria no negativa en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathscr{F},P)$ y F_ξ su función de distribución, (**V. 2**, pág 151). Si F_ξ tiene densidad

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}\exp(-\lambda x), & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases}$$

se dice que la distribución F_ξ es *gamma* con parámetros (p,λ), ($p>0$, $\lambda>0$). En este caso, $E(\xi)=p/\lambda$, $V(\xi)=p/\lambda^2$, y la función característica de ξ es, (**V. 2**, pág. 275),

$$\begin{aligned}\varphi_\xi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)dF_\xi(x) = \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(itx) f_\xi(x)dx = \int_0^{+\infty} \exp(itx)\frac{\exp(-\lambda x)x^{p-1}\lambda^p}{\Gamma(p)}dx = \\ &= \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} \exp(-x(-it+\lambda)x^{p-1}dx = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)}\frac{\Gamma(p)}{(\lambda-it)^p} = \left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-p}.\end{aligned}$$

Además, por **(1)** de página 276 de **V. 2**, $\varphi_{\xi/a}(t) = \varphi_\xi(t/a) = (1-(it)/(\lambda a))^{-p}$, $(a>0)$, (la variable aleatoria ξ/a tiene por función densidad

$$f_{\xi/a}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1}\exp(-a\lambda x), & x>0 \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases})$$

Caso particular. Si $p=1$, entonces

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases}$$

y a F_ξ se le llama *distribución exponencial de parámetro* λ.

Ejemplo. Sea ξ una variable aleatoria Gaussiana, en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, con $E(\xi)=0$ y $V(\xi)=1$. Entonces, $\xi^2/2$ tiene distribución gamma de parámetros $(1/2, 1)$. En efecto:
Tomamos $\eta = \xi^2$. Entonces, por la **Observación** de la página 81 de **V. 2** y teniendo en cuenta que la función de distribución de ξ, F_ξ, es una función continua, se tiene que $F_\eta(x) = 0$ para todo $x<0$, y para $y \geqslant 0$

$$\begin{aligned}F_\eta(y) = P(\{\omega : \omega\in\Omega,\ \eta(\omega)\leqslant y\}) = P\left(\{\omega : \omega\in\Omega,\ -\sqrt{y}\leqslant \xi(y)\leqslant +\sqrt{y}\}\right) = \\ = F_\xi\left(\sqrt{y}\right) - F_\xi\left(-\sqrt{y}\right). \quad (6.122)\end{aligned}$$

Por otro lado, como ξ es variable aleatoria Gaussiana normal, tiene densidad f_ξ, dada por $f_\xi(t) = 1/\sqrt{2\pi}\cdot\exp\left(-t^2/2\right)$, $t\in\mathbb{R}$, y por tanto, por la **Proposición 3.2.9.**, (**V. 2**, (pág. 87)), y (6.122), se obtiene

$$f_\eta(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_\xi\left(\sqrt{y}\right) + f_\xi\left(-\sqrt{y}\right)\right),\ y>0,\ f_\eta(y)=0,\ y\leqslant 0 \qquad (6.123)$$

y en definitiva,

$$f_{\xi^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right), & y > 0 \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases} \tag{6.124}$$

Así, de (6.124),

$$F_{\xi^2}(z) = \int_0^{z/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x) x^{-1/2} dx$$

y por tanto,

$$F_{\xi^2/2}(z) = F_{\xi^2}(2z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x) x^{-1/2} dx = \int_0^z \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \exp(-x) x^{1/2-1} dx,$$

($\lim_{z\to+\infty} F_{\xi^2/2}(z) = 1$). Por consiguiente, la variable aleatoria $\xi^2/2$ tiene distribución *gamma* de parámetros $(1/2, 1)$.

(2). Distribución χ^2. Sea ξ una variable aleatoria en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Se dice que la distribución de ξ, F_ξ, es χ^2 con n grados de libertad, si es *gamma* con parámetros $(n/2, 1/2)$. Por tanto, si F_ξ es χ^2, tiene densidad f_ξ dada por:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(\frac{n}{2}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

su función característica es $\varphi_\xi(t) = (1-2it)^{-n/2}$, $E(\xi) = n$ y $V(\xi) = 2n$.

Las aplicaciones de la distribución χ^2 en la teoría de probabilidades se fundamentan en el siguiente resultado:
Sean $\xi_1, \ldots, \xi_n$ variables aleatorias independientes, cada una de las cuales es Gaussiana de media 0 y varianza 1. Entonces, la función de densidad de $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ es:

$$f_{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \tag{6.125}$$

lo cual se puede probar a partir de (6.124), mediante inducción, teniendo en cuenta lo dicho en la página 262 de **V. 2** y que $\xi_1^2, \ldots, \xi_n^2$, son variables aleatorias independientes, (**Proposición 3.3.11.**, (**V. 2**, pág. 159)). Por tanto, la función de distribución de $\xi_1^2 + ... + \xi_n^2$ es χ^2 con n grados de libertad.

(3). Distribución χ^2 descentralizada. Sea la función

$$f_{\delta,\zeta}(x) = \frac{\exp(-\zeta/2)}{2\zeta^{\delta/4-(1/2)}} \exp(-x/2) x^{\delta/4-(1/2)} I_{(\delta/2)-1}(\sqrt{x\zeta}),\ x > 0, \tag{6.126}$$

donde

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)},$$

(función de Bessel modificada de orden ν). La función $f_{\delta,\zeta}(x)$ es una función de densidad (es decir, es no negativa, integrable y $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\delta,\zeta}(x)dx = 1$, (**V. 2**, página 86)) que da lugar a la función de distribución $F_{\delta,\zeta}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\delta,\zeta}(y)dy$, (**Proposición 3.2.10.**, (**V. 2**, pág. 88).

Definición 6.10.1. *Sea ξ una variable aleatoria en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ tal que*

$$E(\exp(-\lambda\xi)) = \frac{1}{(2\lambda+1)^{\delta/2}} \exp\left(-\frac{\lambda\zeta}{2\lambda+1}\right) \big(= g_{\delta,\zeta}(\lambda)\big).$$

Entonces, se dice que ξ es (o sigue la ley) χ^2 descentrada con δ grados de libertad y parámetro de descentralización ζ. *En tal caso ξ tiene densidad f_ξ y $f_\xi(x) = f_{\delta,\zeta}(x)$.*

Sea d un número entero con $d > 0$ y sean $\xi_1, ..., \xi_d$ variables aleatorias Gaussianas independientes de varianza 1 y medias $m_1, ..., m_d$, respectivamente. Entonces, $\xi = \xi_1^2 + ... + \xi_d^2$ tiene por función de densidad $f_{d,\zeta}(x)$, donde $\zeta = m_1^2 + ... + m_d^2$, (6.125). Se dice que ξ sigue la ley χ^2 descentralizada con d grados de libertad y parámetro de descentralización $\zeta = m_1^2 + ... + m_d^2$. Además, la transformada de Laplace de ξ cumple

$$E(\exp(-\lambda\xi)) = g_{d,\zeta}(\lambda) = \frac{1}{(2\lambda+1)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\lambda\zeta}{2\lambda+1}\right). \tag{6.127}$$

(4). Distribución χ. Sean $\xi_1, ..., \xi_n$ variables aleatorias independientes, cada una de las cuales es Gaussiana de media 0 y varianza 1. Entonces, la función de densidad de $+\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}$ es:

$$f_{+\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}}(x)=\begin{cases}\frac{2x^{n-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{6.128}$$

La función de distribución de esta función de densidad se llama χ *con n grados de libertad.* □

Así, de (6.121) y la **Definición 6.10.1.**, (pág. 83), $r(\theta)/L_1$ es χ^2 descentralizada con $4a/\sigma^2$ grados de libertad y parámetro de descentralización ζ_1. Por consiguiente, la densidad de $r(\theta)/L_1$ respecto a la probabilidad P_1 existe y es $f^{(1)}_{r(\theta)/L1}(x)=f_{4a/\sigma^2,\zeta_1}(x)$, (pág. 78), como se quería probar.

Para la función de densidad de $r(\theta)/L_2$ respecto a la probabilidad P_2 ponemos:

$$E_2\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_2}\right)\right]=E^*\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_2}\right)\cdot\frac{B(\theta)}{P(0,\theta)}\right]=$$
$$=\frac{1}{P(0,\theta)}\cdot E^*\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_2}\right)\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)\right]=$$
$$\frac{1}{P(0,\theta)}\exp\left(-a\phi_{\Lambda,1}(\theta)-r(0)\psi_{\Lambda,1}(\theta)\right), \tag{6.129}$$

donde
$\Lambda=\lambda/L_2$,
$\phi_{\Lambda,1}(\theta)=-\frac{2}{\sigma^2}\ln\frac{2\gamma^*\exp\left(\frac{\theta}{2}(\gamma^*+b^*)\right)}{\sigma^2\Lambda\hat{\theta}+A_\theta}$,
$\psi_{\Lambda,1}(\theta)=\frac{\Lambda A_\theta^-+2\hat{\theta}}{\sigma^2\Lambda\hat{\theta}+A_\theta}$,
$A_\theta^-=\gamma^*+b^*+\exp\left(\gamma^*\theta\right)\left(\gamma^*-b^*\right)$,
$\hat{\theta}=\exp\left(\gamma^*\theta\right)-1$,
$A_\theta=\gamma^*-b^*+\exp\left(\gamma^*\theta\right)\left(\gamma^*+b^*\right)$,
$P(0,\theta)=\exp\left(-a\phi(\theta)-r(0)\psi(\theta)\right)$,
(hemos aplicado el **Teorema 6.9.3.**, (pág. 71), y (6.110), (pág. 75).
Veamos que

$$E_2\left[\exp\left(-\lambda\frac{r(\theta)}{L_2}\right)\right]=\frac{1}{(2\lambda+1)^{\frac{1}{2}\frac{4a}{\sigma^2}}}\exp\left(-\frac{\lambda\zeta_2}{2\lambda+1}\right). \tag{6.130}$$

Se prueba sin dificultad que $a\left(-\phi_{\Lambda,1}(\theta)+\phi(\theta)\right) = ((-2a)/\sigma^2)\ln(2\lambda+1)$ y $r(0)\left(-\psi_{\Lambda,1}(\theta)+\psi(\theta)\right) = -(\lambda\zeta_2)/(2\lambda+1)$. Así, de (6.130), $r(\theta)/L_2$ es *chi*-2 con $(4a)/\sigma^2$ grados de libertad y parámetro de descentralización ζ_2. Luego la función de densidad de $r(\theta)/L_2$ respecto a P_2, $f^{(2)}_{r(\theta)/L2}$, existe y cumple: $f_{(4a)/\sigma^2,\zeta_2}(x) = f^{(2)}_{r(\theta)/L2}(x)$, (pág. 78).

Una vez probado lo que se plantea en la página 78, la ecuación (6.115), (pág. 78), se convierte en

$$V_0 = P(0,T)\int_{-\infty}^{r^*/L_1} f_{(4a)/\sigma^2,\zeta_1}(x)dx - KP(0,\theta)\int_{-\infty}^{r^*/L_2} f_{(4a)/\sigma^2,\zeta_2}(x)dx, \tag{6.131}$$

que es el precio, en $t=0$, del *call* europeo de vencimiento θ y precio de ejercicio K sobre el bono cupón-cero de vencimiento $T>\theta$, (pág. 77).
Hay tablas para aproximar las integrales de (6.131), (véase [66]).

Observación. Del **Teorema 6.9.3.**, (pág. 71), aplicado al escenario: Base estocástica $\left(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T},P\right)$, probabilidad P^*, en $(\Omega,\mathscr{F})$, equivalente a P, el proceso de Wiener $\widetilde{W^*}$, en $(\Omega,\mathscr{F},P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P^*, y (6.94), se tiene:

$$\begin{aligned}
&E^*\left[\exp(-\lambda r(t))\right] = \exp\left(-a\phi_{\lambda,0}(t) - r(0)\psi_{\lambda,0}(t)\right),\\
&\phi_{\lambda,0}(t) = (-2/\sigma^2)\ln\left(\frac{2b^*\exp(tb^*)}{\lambda\sigma^2\left(\exp(b^*t)-1\right)+2\exp(b^*t)b^*}\right),\\
&\psi_{\lambda,0}(t) = \frac{2\lambda b^*}{\lambda\sigma^2\left(\exp(b^*t)-1\right)+2\exp(b^*t)b^*}.
\end{aligned}$$

De hecho, (pág. 79),

$$E^*\left[\exp(-\lambda r(t))\right] = \frac{1}{(2\lambda L+1)^{2a/\sigma^2}}\cdot\exp\left(\frac{-\lambda\zeta L}{2\lambda L+1}\right),$$

donde $L = (\sigma^2/4b^*)\left(1-\exp(-b^*t)\right)$, $\zeta = (4r(0)b^*)/\left(\sigma^2\left(\exp(b^*t)-1\right)\right)$, y

$$E^*\left[\exp\left(-\frac{\lambda}{L}r(t)\right)\right] = \frac{1}{(2\lambda+1)^{2a/\sigma^2}}\cdot\exp\left(\frac{-\lambda\zeta}{2\lambda+1}\right).$$

Así, $r(t)/L$ es *chi*-2 descentralizada con $4a/\sigma^2$ grados de libertad y parámetro de descentralización ζ. La función de densidad de $r(t)/L$ respecto a P^* existe y es $f_{r(t)/L}(x) = F_{4a/\sigma^2,\zeta}(x)$, (pág. 78). Con esta fórmula no podemos operar directamente en (6.113).

Seguimos con el precio de las opciones sobre bonos cupón-cero en el modelo de estructura temporal de tipos de interés CIR. Consideramos, ahora, un *put* europeo de vencimiento θ y precio de ejercicio K, sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$, en el modelo CIR. Dicho *put* viene representado por $h = (K - P(\theta, T))_+$.

Calculemos el precio de h en el tiempo $t = 0$. Se prueba que se cumplen las hipótesis del **Teorema 6.3.7.**, (pág. 32). Entonces,

$$\begin{aligned} V_0 = E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right) \cdot h \right] &= E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right) (K - P(\theta, T))_+ \right] = \\ = E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right) \left(K - \exp(-a\phi(T-\theta) - r(\theta)\psi(T-\theta))\right)_+ \right] &= \\ = E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right) I_{\{r(\theta)>r^*\}}(K - P(\theta, T)) \right] &= \\ KE^* \left[B(\theta) I_{\{r(\theta)>r^*\}} \right] - E^* \left[B(\theta) I_{\{r(\theta)>r^*\}} P(\theta, T) \right], \quad (6.132) \end{aligned}$$

donde $B(\theta) = \exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)$, $r^* = \left(-\ln(K) - a\phi(T-\theta)\right)/\psi(T-\theta)$. Se ha hecho uso, naturalmente, de la equivalencia: $r(\theta) > r^*$ si y sólo si $K > P(\theta, T) = \exp(-a\phi(T-\theta) - r(\theta)\psi(T-\theta))$.

Consideramos las probabilidades P_1 y P_2, en el espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$, dadas por $dP_1 = (B(\theta)P(\theta, T))/P(0, T)dP^*$, $dP_2 = (B(\theta)/P(0,\theta))dP^*$. Entonces, de (6.132), se obtiene

$$\begin{aligned} V_0 = KP(0,\theta)E_2 \left[I_{\{r(\theta)>r^*\}} \right] - P(0, T)E_1 \left[I_{\{r(\theta)>r^*\}} \right] &= \\ = KP(0,\theta) \int_{r^*/L_2}^{+\infty} f^{(2)}_{r(\theta)/L_2}(x)dx - P(0, T) \int_{r^*/L_1}^{+\infty} f^{(1)}_{r(\theta)/L_1}(x)dx &= \\ = KP(0,\theta) \int_{r^*/L_2}^{+\infty} f_{(4a)/\sigma^2,\zeta_2}(x)dx - P(0, T) \int_{r^*/L_1}^{+\infty} f_{(4a)/\sigma^2,\zeta_1}(x)dx. \quad (6.133) \end{aligned}$$

Así, (6.133) da el precio, en $t = 0$ del *put* europeo de vencimiento θ y precio de ejercicio K, sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$, en el modelo CIR.

Ejercicios y Problemas

10.1. En el modelo CIR de la página 70, se supone que $2a \geqslant \sigma^2$ y $r(0) > 0$. Entonces, está definido el proceso estocástico real $\tilde{\xi} = \left\{\xi_t = 2\sqrt{r(t)}\right\}_{t\in J_T}$, (véase el **Problema 9.1**, pág. 76). Utilizar la fórmula de Itô, (**V. 3**, pág. 128), para probar que $\tilde{\xi}$ es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$d\xi_t = \left[\frac{2}{\xi_t}\left(a - \frac{\sigma^2}{4} - \frac{b}{4}\xi_t^2\right)\right] dt + \sigma dW_t, \text{ condición inicial } 2\sqrt{r(0)}.$$

6.11. Modelo Heath-Jarrow-Morton (HJM)

Nos situamos el escenario financiero de incertidumbre, (páginas 16 y 17), con la hipótesis **(H)**, (pág. 17), y consideramos el subconjunto D del plano de la página 14. Se define el tipo de interés *forward* $f : D \to \mathbb{R}$, mediante la fórmula

$$P(t,u) = \exp\left(-\int_t^u f(t,s)ds\right), \quad (t,u) \in D, \tag{6.134}$$

para todos los vencimientos u. Se supone que para cada u, $\{f(t,u)\}_{t\in J_u}$ es un proceso estocástico medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$ y $f(t,t) = r(t)$, $t \in J_T$. Se supone también que f es una función continua.

El modelo consiste en suponer que, para cada vencimiento u, el proceso estocástico $\{f(t,u)\}_{t\in J_u}$ verifica una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$f(t,u) = f(0,u) + \int_0^t \alpha(v,u)dv + \int_0^t \sigma(f(v,u))dW_v, \tag{6.135}$$

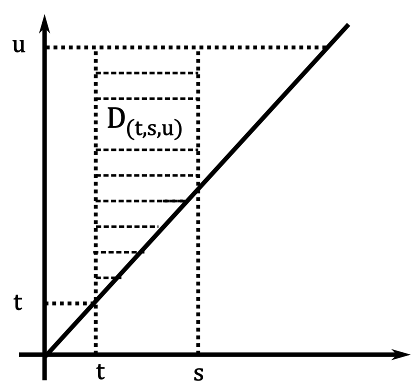
donde $\{\alpha(t,u)\}_{t\in J_u}$ es un proceso estocástico medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$, la aplicación $\alpha : D \to \mathbb{R}$ es continua y σ es una aplicación continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Veamos las condiciones que deben cumplir α y σ para que el modelo sea compatible con la hipótesis **(H)**, (pág. 17). Para ello calculamos $dP(t,u)$ y la comparamos con (6.6) de la página 22.

Ponemos $\xi_t = -\int_t^u f(t,s)ds$. Entonces, $P(t,u) = \exp(\xi_t)$ y

$$\begin{aligned}\xi_t &= \int_t^u [-f(t,s) + f(s,s) - f(s,s)]ds = \\ &= -\int_t^u f(s,s)ds + \int_t^u \left(\int_t^s \alpha(v,s)dv\right)ds + \int_t^u \left(\int_t^s \sigma(f(v,s))dW_v\right)ds = \\ &= -\int_t^u f(s,s)ds + \int_t^u \left(\int_v^u \alpha(v,s)ds\right)dv + \int_t^u \left(\int_v^u \sigma(f(v,s))ds\right)dW_v,\end{aligned} \tag{6.136}$$

donde se ha aplicado el teorema de Fubini, (**Teorema 3.4.38.**, (**V. 2**, pág. 204)), a la integral $\int_t^u \left(\int_t^s \alpha(v,s)dv\right)ds$, (obsérvese que esta integral está definida en el subconjunto de D, $D_{(t,s,u)} = \{(x,y) : x \leqslant y,\ x \in [t,s],\ y \in [t,u]\}$), y el teorema de Fubini para integrales de Itô (que se recuerda a continuación) a la integral $\int_t^u \left(\int_t^s \sigma f(v,s)dW_v\right)ds$.



Teorema 6.11.1. *Sean $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P\right)$ una base estocástica y $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$ un proceso estocástico de Wiener, en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P. Sea $\{H(t,s)\}_{(s,t)\in J_T\times J_T}$ un proceso estocástico en $(\Omega, \mathscr{F})$ con dominio del parámetro $J_T \times J_T$, (**V. 3**, pág. 3), tal que para todo $\omega \in \Omega$, la aplicación $(t,s) \mapsto H(t,s)(\omega)$ es continua, y para todo $s \in J_T$, el proceso estocástico $\{H(t,s)\}_{t\in J_T}$ es medible y adaptado a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$. Entonces,*

$$\int_0^T \left(\int_0^T H(t,s)dW_t\right)ds = \int_0^T \left(\int_0^T H(t,s)ds\right)dW_t.$$

(véase [24], pág. 99)

De (6.136) se deduce

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t f(s,s)ds - \int_0^t \left(\int_v^u \alpha(v,s)ds\right)dv - \int_0^t \left(\int_v^u \sigma(f(v,s))ds\right)dW_v.$$

que se escribe como ecuación diferencial estocástica

$$d\xi_t = \left(f(t,t) - \int_t^u \alpha(t,s)ds\right)dt - \left(\int_t^u \sigma(f(t,s)ds\right)dW_t.$$

Así, por la fórmula de Itô, (**Teorema 4.8.5.**, (**V. 3**, pág. 128)),

$$\begin{aligned} P(t,u) &= P(0,u) + \\ &+ \int_0^t \left[P(s,u)\left(f(s,s) - \int_s^u \alpha(s,h)dh\right) + \frac{1}{2}P(s,u)\left(\int_s^u \sigma(f(s,h))dh\right)^2\right]ds - \\ &- \int_0^t P(s,u)\left(\int_s^u \sigma(f(s,h))dh\right)dW_s. \end{aligned}$$

que se escribe como ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dP(t,u) = P(t,u)&\left[f(t,t) - \int_t^u \alpha(t,h)dh + \frac{1}{2}\left(\int_t^u \sigma(f(t,h))dh\right)^2\right]dt - \\ &- P(t,u)\left(\int_t^u \sigma(f(t,h))\right)dW_t. \end{aligned}$$

Entonces, comparando con (6.6) debe ser

$$\int_s^u \alpha(s,h)dh - \frac{1}{2}\left(\int_s^u \sigma(f(s,h))dh\right)^2 = \sigma_s^u q(s)$$

$$\sigma_s^u = -\int_s^u \sigma(f(s,h))dh,$$

de donde

$$\int_s^u \alpha(s,h)dh = \frac{1}{2}\left(\int_s^u \sigma(f(s,h))dh\right)^2 - q(s)\int_s^u \sigma(f(s,h))dh,$$

y derivando respecto a u, se obtiene:

$$\alpha(s,u) = \sigma(f(s,u))\left(-q(s) + \int_s^u \sigma(f(s,h))\,dh\right).$$

Por último,

$$f(t,u) = f(0,u) + \int_0^t \sigma(f(s,u))\left(\int_s^u \sigma(f(s,h))\,dh\right)ds + \int_0^t \sigma(f(s,u))\,dW_s^*$$

(véase la **Observación** de la página 25: $W_t^* = W_t - \int_0^t q(s)\,ds$), que puesta en forma de ecuación diferencial estocástica se tiene

$$df(t,u) = \sigma(f(t,u))\left(\int_t^u \sigma(f(t,h))\,dh\right)dt + \sigma(f(t,u))\,dW_t^*. \tag{6.137}$$

Luego la hipótesis **(H)**, (página 17), y los supuestos de la sección **6.11** aceptados hasta aquí, nos llevan a (6.137) y efectivamente (6.137) tiene solución.

Teorema 6.11.2. *Si σ es Lipschitciana y acotada, entonces para toda función continua $\phi : J_T \to \mathbb{R}^+$ existe un único proceso estocástico continuo en $(\Omega, \mathscr{F})$ con dominio del parámetro $J_T \times J_T$, (**V. 3**, pág. 2), $\{f(t,u)\}_{(t,u)\in J_T\times J_T}$, tal que para todo $u \in J_T$ el proceso estocástico $\{f(t,u)\}_{t\in J_u}$ es medible y adaptado a la filtración $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_u}$, verifica la ecuación diferencial estocástica (6.137) y $f(0,u) = \phi(u)$.*

Luego tomando una solución $f(t,u)$ de (6.137) y poniendo

$$\alpha(s,u) = \sigma(f(s,u))\left(-q(s) + \int_s^u \sigma(f(s,h))\,dh\right),$$

se tiene que $f(t,u)$ es una solución de (6.135).

La faceta más llamativa del modelo HJM es que el tipo de interés *forward* f únicamente depende de σ, como se aprecia inmediatamente de la ecuación (6.137). Esto es análogo, como hemos visto en el volumen 4, al modelo BSM.

Precio de una opción europea en el modelo HJM

Vamos a calcular el precio del *call* (*put*) europeo en el caso σ constante positiva (>0).

Consideramos un *call* europeo de vencimiento $\theta < T$ y precio de ejercicio K, sobre un bono cupón-cero de vencimiento $T > \theta$. Dicho *call* viene representado por $h = (P(\theta, T) - K)_+$.
Se prueba que se cumplen las hipótesis del **Teorema 6.3.7.**, (pág. 32). Entonces,

$$\begin{aligned} V_t &= E^* \left[\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds \right) \cdot h | \mathscr{F}_t \right] = \\ &= E^* \left[\exp\left(-\int_t^\theta r(s)ds \right) \left(\exp\left(-\int_\theta^T f(\theta, s)ds \right) - K \right)_+ | \mathscr{F}_t \right] \end{aligned} \tag{6.138}$$

y

$$\begin{aligned} V_0 &= E^* \left[\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right) \left(\exp\left(-\int_\theta^T f(\theta, s)ds \right) - K \right)_+ | \mathscr{F}_t \right] = \\ &= E^* \left[B(\theta) \left(\exp\left(-\int_\theta^T f(\theta, s)ds \right) - K \right) I(P(\theta, T) > K) \right], \end{aligned} \tag{6.139}$$

donde $B(\theta) = \exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds \right)$.

La solución de (6.137) es

$$f(t, u) = f(0, u) + \sigma^2 t(u - t/2) + \sigma W_t^*.$$

En efecto: Con σ constante, (6.137) toma la forma

$$f(t, u) = f(0, u) + \int_0^t \sigma^2 (u - s)ds + \sigma \int_0^t dW_s^*.$$

Así,

$$P(\theta, T) = \exp\left(-\int_\theta^T f(\theta, s)ds \right) = \frac{P(0, T)}{P(0, \theta)} \exp\left(-\sigma(T - \theta)W_\theta^* - \frac{\sigma^2 \theta T(T - \theta)}{2} \right), \tag{6.140}$$

ya que

$$-\frac{\partial \ln(P(\theta,h))}{\partial T} = f(\theta,h) = f(0,h) + \sigma^2\theta\left(h - \frac{\theta}{2}\right) + \sigma W_\theta^*,$$

(fórmula que por integración respecto a T, da la fórmula (6.140)). Observamos que

$$\begin{aligned} P(\theta,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,\theta)} \exp\left(-\sigma(T-\theta)(r(\theta) - f(0,\theta) - \frac{\sigma^2\theta^2}{2})\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma^2\theta T(T-\theta)\right) = \\ = \frac{P(0,T)}{P(0,\theta)} \exp\left((T-\theta)\left(-r(\theta) + f(0,\theta) + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\theta T\right)\right) \end{aligned}$$

y $\{P(\theta,T) > K\} = \left\{r^* > r(\theta)\right\}$, donde

$$r^* = f(0,\theta) - \frac{1}{2}\sigma^2\theta(T-\theta) - \frac{1}{T-\theta}\ln\left(K\frac{P(0,\theta)}{P(0,T)}\right).$$

Así, (6.139) se escribe

$$V_0 = E^*\left[B(\theta)I\left(r^* > r(\theta)\right)\exp\left(-\int_\theta^T f(\theta,s)ds\right)\right] - KE^*\left[B(\theta)I\left(r^* > r(\theta)\right)\right]$$

y análogamente

$$V_0 = E^*\left[B(\theta)I\left(r^{**} > W_\theta^*\right)\exp\left(-\int_\theta^T f(\theta,s)ds\right)\right] - KE^*\left[B(\theta)I\left(r^{**} > W_\theta^*\right)\right], \tag{6.141}$$

donde

$$r^{**} = -\frac{1}{\sigma(T-\theta)}\ln\left(K\frac{P(0,\theta)}{P(0,T)}\right) - \frac{1}{2}\sigma\theta T.$$

Introducimos las probabilidades

$$dP_1 = \frac{\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)P(\theta,T)}{P(0,T)}dP^*,\ dP_2 = \frac{\exp\left(-\int_0^\theta r(s)ds\right)}{P(0,\theta)}dP^*.$$

Con estas probabilidades (6.141) se escribe

$$V_0 = P(0,T)E_{P_1}\left[I\left(r^{**} > W_\theta^*\right)\right] - KP(0,\theta)E_{P_2}\left[I\left(r^{**} > W_\theta^*\right)\right]. \tag{6.142}$$

El objetivo es hallar la función de densidad de W_θ^* respecto a P_1, (**V. 2**, pág. 152), $f_{W_\theta^*}^{P_1}$, y la función de densidad de W_θ^* respecto a P_2, (**V. 2**, pág. 152), $f_{W_\theta^*}^{P_2}$, ya que con estas densidades

$$V_0 = P(0,T)\int_{-\infty}^{r^{**}} f_{W_\theta^*}^{P_1}(x)dx - KP(0,\theta)\int_{-\infty}^{r^{**}} f_{W_\theta}^{P_2}(x)dx. \tag{6.143}$$

Finalmente, de (6.143) se obtiene que el precio del *call* europeo en el tiempo 0 está dado por

$$V_0 = P(0,T)\Phi(d) - KP(0,\theta)\Phi\left(d - \sigma\sqrt{\theta}(T-\theta)\right), \tag{6.144}$$

donde Φ es la función de distribución normal estándar, (**V. 2**, pág. 90), y

$$d = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\theta}(T-\theta) - \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}(T-\theta)}\ln\left(K\frac{P(0,\theta)}{P(0,T)}\right).$$

Ejercicios y Problemas

11.1. Probar que si en (6.136) σ es constante, el modelo HJM correspondiente es el modelo de Ho-Lee, (pág. 68).

11.2. Probar que $-\frac{\partial \ln(P(\theta,h))}{\partial T} = f(\theta,h)$, (pág. 92).
Indicación: Utilícese la igualdad (6.134).

6.12. Modelo de Dothan

Nos situamos en el escenario financiero de incertidumbre, de las páginas 16 y 17, con la base estocástica $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P\right)$, la hipótesis **(H)** y $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P$, $t \in J_T$. Suponemos que el proceso estocástico $\widetilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$ satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \sigma r(t) dW_t, \text{ condición inicial } r(0) = r_0 \tag{6.145}$$

donde, r_0 y σ son números reales positivos. Es decir, $\tilde{r}$ es el proceso estocástico de Itô respecto a $\widetilde{W}$, (**V. 3**, pág. 120),

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \sigma r(s) dW_s,\ t \in J_T \tag{6.146}$$

Suponemos también que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in J_T$, $q_t = -\lambda$, (**Proposición 6.2.5.**, pág. 20). Entonces $\widetilde{W^*} = \left\{W_t^* = W_t + \lambda t\right\}_{t \in J_T}$, es un proceso de Wiener, en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in J_T}$ y a P^*, y

$$\int_0^t \sigma r(s) dW_s^* = \int_0^t \sigma r(s) dW_s - \int_0^t \lambda \sigma r(s) ds.$$

Por tanto, de (6.146), se obtiene

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \sigma r(s) dW_s = r(0) + \int_0^t \lambda \sigma r(s) ds + \int_0^t \sigma r(s) dW_s^* \quad (6.147)$$

que se escribe como ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \lambda \sigma r(t) dt + \sigma r(t) dW_t^*, \text{ condición inicial } r(0) = r_0. \quad (6.148)$$

En el **Ejemplo 3** de la página 160 de **V. 3**, se ha probado que la solución única de (6.148) es

$$r(t) = r_0 \exp\left(\left(\lambda\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t^*\right), \ t \in J_T. \quad (6.149)$$

Por tanto, para todo $t, s \in J_T$,

$$r(t) = r(s) \exp\left(\left(\lambda\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma\left(W_t^* - W_s^*\right)\right), \ t \in J_T. \quad (6.150)$$

Observamos que la expresión (6.149) implica que en el modelo construido, debido a M. Dothan (1978), la variable aleatoria $r(t)$ es positiva, en contraste con el modelo de Vasiček, (pág. 35).

A continuación, determinamos la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria $r(t)$, $t \in J_T$. Sabemos que W_t^* es una variable aleatoria Gaussiana con $E^*\left[W_t^*\right] = 0$ y $V^*\left[W_t^*\right] = t$, (**V. 3**, páginas 83 y 80). Por otro lado, por **(1)** de la página 276 de **V. 2**, la función característica de $\xi_t = \ln(r_0) + \left(\lambda\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t^*$, $(r_t = \exp(\xi_t))$, es

$$\varphi_{\xi_t}(u) = \exp\left(iu\left(\ln(r_0) + \left(\lambda\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\right)\varphi_{W_t^*}(\sigma u) =$$

$$= \exp\left(iu\left(\ln(r_0) + \left(\lambda\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\right)\exp\left(i\sigma u \cdot 0 - (t/2)\sigma^2 u^2\right) =$$

$$= \exp\left(iu\left(\ln(r_0) + \left(\lambda\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) - \frac{t}{2}\sigma^2 u^2\right), \ u \in \mathbb{R}.$$

Entonces, por la **Definition 3.12.1.**, (**V. 2**, pág. 300), ξ_t es una variable aleatoria Gaussiana con $E^*[\xi_t] = \ln(r_0) + \left(\lambda\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right) t (= m_t)$ y $V^*[\xi_t] = t\sigma^2$.
Así, para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x \leqslant 0$, $F_{r(t)}(x) = P^*[\{\omega \in \Omega : r(t)(\omega) \leqslant x\}] = P^*(\emptyset) = 0$.
Supongamos ahora $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} F_{r(t)}(x) &= P^*[\{\omega : \omega \in \Omega,\ r(t)(\omega) \leqslant x\}] = P^*[\{\omega : \omega \in \Omega,\ \exp(\xi_t(\omega)) \leqslant x\}] = \\ &= P^*[\{\omega : \omega \in \Omega,\ \xi_t(\omega) \leqslant \ln(x)\}] = F_{\xi_t}(\ln(x)) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}\sigma} \int_0^{\ln(x)} \exp\left(-\frac{(y - m_t)^2}{2t\sigma^2}\right) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}\sigma} \int_0^{x} \exp\left(-\frac{(\ln(z) - m_t)^2}{2t\sigma^2}\right) \frac{1}{z} dz, \end{aligned}$$

donde, para obtener última igualdad, se ha hecho el cambio de variable $y = \ln(z)$.
Estos cálculos determinan la función de distribución de probabilidad de $r(t)$, $F_{r(t)}$, y prueban que tiene como función de densidad

$$f_{r(t)}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z\sqrt{2\pi}\sqrt{t}\sigma} \exp\left(-\frac{(\ln(z)-m_t)^2}{2t\sigma^2}\right), & z > 0 \\ 0 & z \leqslant 0. \end{cases} \tag{6.151}$$

Por tanto, (por definición), la función de distribución de probabilidad de $r(t)$ es *lognormal* con parámetros $(m_t, t\sigma^2)$.
Se verifica que:

(1). $E^*[r(t)] = \exp\left(\frac{1}{2}t\sigma^2 + m_t\right)$.

(2). $V^*[r(t)] = \left(\exp\left(t\sigma^2\right) - 1\right)\exp\left(2m_t + t\sigma^2\right)$.

A continuación, calculamos la esperanza matemática condicionada y la varianza condicionada de $r(t)$ respecto a $\mathscr{F}_s$, $t, s \in J_T$ con $s < t$:

(3). $E^*[r(t)|\mathscr{F}_s] = r(s)\exp(\lambda\sigma(t - s))$.

En efecto:

$$
\begin{aligned}
E^*\left[r(t)|\mathscr{F}_s\right] &= E^*\left[r(s)\exp\left(\left(\lambda\sigma-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)+\sigma\left(W_t^*-W_s^*\right)\right)|\mathscr{F}_s\right]= \\
&= r(s)\exp\left(-\left(\lambda\sigma-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\lambda\sigma t\right)\exp\left(-\sigma W_s^*\right)E^*\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W_t^*\right)|\mathscr{F}_s\right]= \\
&= r(s)\exp\left(-\left(\lambda\sigma-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\lambda\sigma t\right)\exp\left(-\sigma W_s^*\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}s+\sigma W_s^*\right)= \\
&\qquad r(s)\exp(\lambda\sigma(t-s)),
\end{aligned}
$$

donde se ha utilizado el **Problema 6.2**, (**V. 3**, pág. 96), para obtener la penúltima igualdad.

(4). $V^*\left[r(t)|\mathscr{F}_s\right] = r(s)^2\exp(2\lambda\sigma(t-s))\left(\exp\left(\sigma^2(t-s)\right)-1\right)$.
En efecto: Por la definición de varianza condicionada, **(1)**, y el **Problema 6.2**, (**V. 3**, pág. 96), se tiene

$$
\begin{aligned}
V^*\left[r(t)|\mathscr{F}_s\right] &= E^*\left[\left(r(t)-E^*\left[r(t)|\mathscr{F}_s\right]\right)^2|\mathscr{F}_s\right]= \\
&= E^*\left[\left(r(t)-r(s)\exp(\lambda\sigma(t-s))\right)^2|\mathscr{F}_s\right]=E^*\left[(r(s)\cdot\right. \\
&\left.\cdot\exp\left(\left(\lambda\sigma-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)+\sigma\left(W_t^*-W_s^*\right)\right)-r(s)\exp(\lambda\sigma(t-s))\right)^2|\mathscr{F}_s\Bigg]= \\
&= r(s)^2\exp(2\lambda\sigma(t-s))E^*\left[\left(\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)+\sigma\left(W_t^*-W_s^*\right)\right)-1\right)^2|\mathscr{F}_s\right]= \\
&= r(s)^2\exp(2\lambda\sigma(t-s))\left[\exp\left(\sigma^2 s-2\sigma W_s^*\right)E^*\left[\exp\left(-\sigma^2 t+2\sigma W_t^*\right)|\mathscr{F}_s\right]-\right. \\
&\left.-2\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}s-\sigma W_s^*\right)E^*\left[\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W_t^*\right)|\mathscr{F}_s\right]\right]+1= \\
&= r(s)^2\exp(2\lambda\sigma(t-s))\left(\exp\left(\sigma^2(t-s)\right)-1\right).
\end{aligned}
$$

La principal característica del modelo de Dothan es la de ser el único modelo con tipos de interés *lognormal* conocido con fórmulas analíticas para los precios de los bonos cupón-cero.

Proposición 6.12.1. *En el modelo de Dothan, se tiene*

$$P(t,T) = E^*\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)|\mathscr{F}_t\right) = \exp\left(\frac{-\sigma^2\left(1-2\frac{\lambda}{\sigma}\right)^2(T-t)}{8}\right)\cdot$$
$$\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(-ur(t)-\frac{2\left(1+z^2\right)}{\sigma^2 u}\right)\theta\left(\frac{4z}{\sigma^2 u},\frac{\sigma^2(T-t)}{4}\right)\frac{du}{u}\frac{dz}{z^{2(1-\lambda/\sigma)}},$$

donde, para todo $\alpha,\beta>0$,

$$\theta(\alpha,\beta) = \frac{\alpha\exp\left(\frac{\pi^2}{2\beta}\right)}{\sqrt{2\pi^3\beta}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2\beta}-\alpha\cosh(y)\right)\sinh(y)\sin\left(\frac{\pi y}{\beta}\right)dy.$$

Destacamos que no se conoce ninguna fórmula analítica para el precio de las opciones sobre bonos cupón-cero, en el modelo de Dothan.

El principal inconveniente del modelo de Dothan es la *explosión de las cuentas bancarias*, que pasamos a describir.
Supongamos que estamos en el tiempo 0 y depositamos una unidad de capital en una cuenta bancaria, por un tiempo pequeño Δt. Sabemos que el valor esperado (esperanza matemática) de nuestra posición al final del tiempo Δt, será

$$E^*\left[C_{\Delta t}\right] = E^*\left[\exp\left(\int_0^{\Delta t} r(s)ds\right)\right].$$

Ahora, si Δt es pequeño, podemos aproximar la integral por $(\Delta t/2)(r(0)+r(\Delta t))$ y el valor esperado por $E^*\left[\exp\left((\Delta t/2)(r(0)+r(\Delta t))\right)\right]$. Como la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria $r(\Delta t)$ es *lognormal*, esta esperanza matemática es de la forma $E^*[\exp(\exp(\xi))]$, donde ξ es una variable aleatoria Gaussiana. Por la **Proposición 3.4.30.**, (**V. 2**, pág.

191), tenemos que

$$
\begin{aligned}
E^*[\exp(\exp(\xi))] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\exp(x)) f_\xi(x)\,dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi V^*[\xi]}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\exp(x)) \exp\left(-\frac{(x-E^*[\xi])^2}{2V^*[\xi]}\right) dx > \\
&> \frac{1}{\sqrt{2\pi V^*[\xi]}} \int_{0}^{+\infty} \exp\left(\exp(x) - \frac{(x-E^*[\xi])^2}{2V^*[\xi]}\right) dx > \\
&> \frac{1}{\sqrt{2\pi V^*[\xi]}} \int_{0}^{+\infty} \exp\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{(x-E^*[\xi])^2}{2V^*[\xi]}\right) = +\infty.
\end{aligned}
$$

Así, $E^*[C_{\Delta t}] = +\infty$, lo cual significa que en tiempo arbitrariamente pequeño podemos obtener, en promedio, una cantidad muy grande de capital a partir de una unidad, del mismo, inicial.

Ejercicios y Problemas

12.1. Si una estructura temporal de tipos de interés $\{P(t,T): t \in J_T,\ T > 0\}$ es de la forma $P(t,T) = \exp(A(t,T) - B(t,T)r(t))$, donde A y B son funciones deterministas con todas las derivadas parciales respecto de la variable T continuas, se dice que esa estructura temporal de tipos de interés es *afín*.

Nos situamos en el escenario financiero de incertidumbre de las páginas 16 y 17, y suponemos un modelo de estructura temporal de tipos de interés afín determinado por la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t^*, \text{ condición inicial } r(0) = r_0,$$

(véase la observación de la página 25). Probar que

$$
\begin{aligned}
&\mu(t, r(t)) = \alpha(t) + \beta(t) r(t) \\
&\sigma(t, r(t))^2 = \gamma(t) + \delta(t) r(t),
\end{aligned}
$$

donde $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ y $\delta(t)$ son funciones deterministas (sólo dependen de la variable t).

Indicaciones: Por la hipótesis, $P(t,T) = \exp(A(t,T) - B(t,T)r(t))$. Entonces,

(1). Probar, utilizando la fórmula de Itô, (**V. 3**, pág. 128), que

$$dP(t,T) = P(t,T)\left[\left(\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t,T)}{\partial t} r(t) - B(t,T)\mu(t,r(t)) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}B(t,T)\sigma(t,r(t))^2\right) dt - B(t,T)\sigma(t,T)\,dW_t^*\right].$$

(2). Comparando la ecuación diferencial estocástica obtenida en **(1)** con la de (6.12), pág. 27, deducir que la función,

$$g(t,r) = \frac{\partial A(t,T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t,T)}{\partial t} r - B(t,T)\mu(t,r) + \frac{1}{2}B(t,T)\sigma(t,r)^2 - r,$$

es idénticamente nula y por tanto $\frac{\partial^2 g(t,r)}{\partial^2 r} = 0$.

(3). Deducir de **(2)** que $\frac{\partial^2(\sigma(t,r)^2)}{\partial r^2} = 0$ y $\frac{\partial^2(\mu(t,r))}{\partial r^2} = 0$.

(4). La condición $P(T,T) = 1$ implica que $A(T,T) = 0$ y $B(T,T) = 0$.

12.2. Probar que el modelo de Dothan no es un modelo de estructura temporal de tipos de interés afín, (utilizar el problema anterior).

12.3. Nos situamos en el escenario financiero de incertidumbre de las páginas 16 y 17, y suponemos un modelo de estructura temporal de tipos de interés determinado por la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + (\gamma + \delta r(t))dW_t^*, \text{ condición inicial } r(0) = r_0,$$

(véase la observación de la página 25), donde α, β, γ y δ son constantes. Probar que el modelo es afín.
Indicación: Seguir las indicaciones del **Problema 12.1** para obtener ecuaciones diferenciales ordinarias que determinan A y B.

6.13. Modelo de Black-Karasinski

En 1991, F. Black y P. Karasinski, (en [6]), introducen el siguiente modelo de estructura temporal de tipos de interés:
Nos situamos en el escenario de incertidumbre, de las páginas 16 y 17, con la base estocástica $\left(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}, P\right)$, el proceso de Wiener $\widetilde{W} = \{W_t\}_{t\in J_T}$, en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P, la hipótesis **(H)**, y $\mathscr{F}_t = \left(\mathscr{F}_t^{\widetilde{W}}\right)^P$, $t \in J_T$. Consideramos el proceso estocástico $\tilde{q} = \left\{q_t\right\}_{t\in J_T}$ de la **Proposición 6.2.5.**, (pág. 20), y el proceso de Wiener $\widetilde{W^*} = \left\{W_t^* = W_t - \int_0^t q_s ds\right\}_{t\in J_T}$, en $(\Omega, \mathscr{F}, P^*)$, respecto a $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in J_T}$ y a P^*, (véase la **Observación** de la página 25). Finalmente, suponemos que el proceso estocástico $\tilde{r} = \{r(t)\}_{t\in J_T}$ es tal que $\ln(\tilde{r}) = \{\ln(r(t))\}_{t\in J_T}$ es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - \alpha(t)\ln(r(t))]dt + \sigma(t)dW_t^*,$$
$$\text{condición inicial } \ln(r(0)) = \ln(r_0), \quad (6.152)$$

donde r_0 es una constante real positiva, y $\theta(t)$, $\alpha(t)$ y $\sigma(t)$ son funciones deterministas (dependientes únicamente de t).

Observación. Comparando las ecuaciones (6.152) y (6.63), al modelo de Black-Karasinski se le conoce, también, como modelo exponencial de Hul-White o modelo exponencial generalizado de Vasiček.

Aplicamos el **Teorema 4.8.5. (Fórmula de Itô)**, (**V. 3**, pág. 128), a la ecuación (6.152) tomando $f(t,x) = \exp(x)$, y obtenemos que (6.152) se transforma en la ecuación diferencial estocástica

$$dr(t) = \left(\theta(t) - \alpha(t)\ln(r(t)) + \frac{1}{2}\sigma(t)^2\right)r(t)dt + r(t)\sigma(t)dW_t^*,$$
$$\text{condición inicial } r(0) = r_0. \quad (6.153)$$

Por el **Teorema 6.6.1.**, (pág. 53), la solución de la ecuación (6.152) es

$$\begin{aligned}\ln(r(t)) &= \exp\left(-\int_0^t \alpha(u)du\right)\left[\ln(r(0)) + \int_0^t \theta(v)\exp\left(\int_0^v \alpha(u)du\right)dv\right] + \\ &\quad + \exp\left(-\int_0^t \alpha(u)du\right)\int_0^t \exp\left(\int_0^v \alpha(u)du\right)\sigma(v)dW_v^* = \\ &= \ln(r(0))\exp\left(-\int_0^t \alpha(u)du\right) + \int_0^t \theta(v)\exp\left(-\int_v^t \alpha(u)du\right)dv + \\ &\quad + \int_0^t \exp\left(-\int_v^t \alpha(u)du\right)\sigma(v)dW_v^*, \end{aligned} \tag{6.154}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} r(t) = \exp\Bigg(&\ln(r(0))\exp\left(-\int_0^t \alpha(u)du\right) + \int_0^t \theta(v)\exp\left(-\int_v^t \alpha(u)du\right)dv + \\ &+ \int_0^t \exp\left(-\int_v^t \alpha(u)du\right)\sigma(v)dW_v^*\Bigg). \end{aligned} \tag{6.155}$$

Se comprueba fácilmente que para todo $s, t \in J_T$ con $s \leqslant t$, se verifica que

$$\begin{aligned} r(t) = \exp\Bigg(&\ln(r(s))\exp\left(-\int_s^t \alpha(u)du\right) + \int_s^t \theta(v)\exp\left(-\int_v^t \alpha(u)du\right)dv + \\ &+ \int_s^t \exp\left(-\int_v^t \alpha(u)du\right)\sigma(v)dW_v^*\Bigg). \end{aligned} \tag{6.156}$$

De forma análoga a como se ha procedido en las páginas 94 y 95, y teniendo en cuenta el **Ejemplo 2** de la página 160 de **V. 3**, se tiene que para todo $t \in J_T$,

$$\begin{aligned} \xi_t = \ln(r(t)) &= \ln(r(0))\exp\left(-\int_0^t \alpha(u)du\right) + \\ &+ \int_0^t \theta(v)\exp\left(-\int_v^t \alpha(u)du\right)dv + \int_0^t \exp\left(-\int_v^t \alpha(u)du\right)\sigma(v)dW_v^*, \end{aligned}$$

es una variable aleatoria Gaussiana con

$$E^*[\xi_t] = \ln(r(0))\exp\left(-\int_0^t \alpha(u)du\right) + \int_0^t \theta(v)\exp\left(-\int_v^t \alpha(u)du\right)dv,$$
$$V^*[\xi_t] = \int_0^t \left(\exp\left(-\int_v^t \alpha(u)du\right)\sigma(v)\right)^2 dv.$$

Por tanto, se concluye que $r(t) = \exp(\xi_t)$ es una variable aleatoria con distribución de probabilidad *lognormal* con función de densidad con parámetros $(E^*[\xi_t], V^*[\xi_t])$. Así, en el modelo Black-Karasinski, se tiene que $r(t)$ es positiva para todo $t \in J_T$, y tiene el inconveniente de la *explosión* de las cuentas bancarias, (página 97). Además, no se tiene una expresión analítica de $P(t,T) = E^*\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)|\mathcal{F}_t\right]$, $t \in J_T$, (**Proposición 6.2.2.(2)**, pág. 17).

Ejercicios y Problemas

13.1. Probar que el modelo de Black-Karasinski no es un modelo de estructura temporal de tipos de interés afín, (véase el **Problema 12.1** de la página 98).

Bibliografía

[1] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus (Second Edition)*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Ann. Ècole Norm. Sup., **17**, 21-86, (1900).

[3] R. M. Barbolla; M. García; J. Margalef; E. Outerelo; J. L. Pinilla; J. M. Sánchez, *Introducción al análisis real*. Alhambra Universidad, Madrid, 1981.

[4] N. H. Bingham; N. H. Kiesel, *Risk-Neutral Valuation*. Springer-Verlag, Berlín, 1998.

[5] T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 1998.

[6] F. Black; P. Karasinski, *Bond and Options when Short Rates are Lognormal*. Financ. Anal. J. **47**, 52-59, (1991).

[7] F. Black; M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, J. Political Econom., **81**, 637-654, (1973).

[8] D. Brigo; F. Mercurio, *Interest Rate Models-Theory and Practice*. Springer, Heidelberg, 2006.

[9] A. J. G. Cairns, *Interest Rate Models*. Princeton University Press, 2004.

[10] M. Córdoba Bueno, *Fundamento y práctica de las Matemáticas Financieras*. Dykinson, Madrid, 2009.

[11] J. C. Cox; J. E. Ingersoll; S. S. Ross, *A Re-Examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure on Interest Rates*. Journal of Finance, **36**, 769-799, (1981).

[12] J. C. Cox; J. E. Ingersoll; S. A. Ross, *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*. Econometrica, **53**, 385-407, (1985).

[13] J. C. Cox; S. A. Ross; M. Rubinstein, *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics **7**, 229-263, (1979).

[14] D. Dacunha-Castelle; M. Duffo, *Probabilités et statistique*, Tome 1. Masson, París, 1982.

[15] F. Delbaen; W. Schachermayer, *A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing*. Math. Ann. **300**, 463-520, (1994).

[16] C. Dellacherie, *Un survol de la theorie de l'integrale stochastique*. Stoch. Process Appl. **10**, 115-144, (1980).

[17] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley, 1953.

[18] D. Duffie, *Asset Pricing Theory. Second Edition*. Princeton University Press, 1996.

[19] D. Duffie; R. Khan, *A Yield-factor Model of Interest Rates*. Mathematical Finance **6**, 379-406, (1996).

[20] B. Dupire, *Model Art.*, RISK magazin **6**, 118-124, (1993).

[21] B. Dupire, *Pricing with a Smile*, RISK magazin **7**, 18-20, (1994).

[22] A. Einstein, Ann. Phys. **17**, 549-560, (1905); **19**, 289-306, (1906); **19**, 371-381, (1906).

[23] R. J. Elliot; P. E. Kopp, *Mathematics of Financial Markets*. Springer-Verlag, Berlín, 1999.

[24] D. Filipović, *Term-Structure Models. A Graduate Course*. Springer, Heidelberg, 2009.

[25] C. Fernández Pérez; F. J. Vázquez Hernández; J. M. Vegas Muntaner, *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*. Thomson, Madrid, 2003.

[26] I. V. Girsanov, *On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolute Continuous Substitution of Measures*. Theory of Probability and its Applications, **5**, 285-301, (1960).

[27] J. M. Harrison; D. M. Kreps, *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*. J. Econom. Theory **20**, 381-408, (1979).

[28] J. M. Harrison; S. R. Pliska, *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuum Trading*. Stochastic Processes and their Applications **11**, 215-260, (1981).

[29] J. M. Harrison; S. R. Pliska, *A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets*. Stochastic Processes and their Applications **15**, 313-316, (1983).

[30] T. Hida, *Brownian Motion*. Springer-Verlag, Berlín, 1980.

[31] S. Y. Ho; S. B. Lee, *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*. Journal of Finance, **41**, 1011-1029, (1986).

[32] J. Hull, *Options, Futures and other Derivative Securities*. Ptentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[33] J. Hull; A. White, *Pricing Interest-Rate-Derivative Securities*. The Review of Financial Studies, **3**, 573-592, (1990).

[34] N. Ikeda; S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland, 1981.

[35] K. Itô, *Stochastic Integral*, Imperial Academy, Tokio. Proceedings, **20**, 519-524, (1944).

[36] J. Jacod, *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. Lecture Notes Math. **714**, Springer-Verlag, New York, 1979.

[37] J. Jacod; A. N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[38] P. Jaillet; D. Lamberton; B. Lapeyre, *Variational Inequalities and the Pricing of American Options*, Acta Applicandae Math. **21**, 283-289, (1990).

[39] J. James; N. Webber, *Interest Rate Modelling*. John Wiley, New York, 2000.

[40] A. H. Jazwinski, *Stochastic Process and Filtering Theory*, Dover Publications, New York, 2007.

[41] P. L. Jørgensen, *American Bond Option Pricing in One-Factor Dynamic Term Structure Models*. Review of Derivatives Research, **1**, 245-267, (1997).

[42] I. Karatzas; S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus. Secon Edition*. Springer-Verlag, Berlín, 1991.

[43] I. Karatzas; S. E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*. Springer-Verlag, Berlín, 1998.

[44] V. S. Koroliuk, *Manual de la teoría de probabilidades y estadística matemática*, Editorial Mir, Moscú, 1986.

[45] D. Lamberton; B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, second edition, Chapman-Hall, 2007.

[46] R. S. Liptser; A. N. Shiryaev, *Statistics of Random Processes I*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[47] R. S. Mamon, *Three Ways to Solve for Bond Prices in the Vasiček Model*. Journal of Applied Mathematics and Decision Science, **8**, 1-14, (2004).

[48] R. N. Mantegna; H. E. Stanley, *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[49] J. Margalef-Roig; S. Miret-Artés, *Cálculo estocástico aplicado a las finanzas: Precio de las opciones según el modelo Black-Scholes-Merton y algunas generalizaciones*, 281-313. En *Contribuciones Matemáticas. Homenaje al profesor Enrique Outerelo Domínguez*, Editorial Complutense, Madrid, 2004.

[50] J. Margalef Roig; S. Miret Artés; E. Outerelo Domínguez, *Probabilidad y Economía 3. Procesos Estocásticos*. Sanz y Torres, Madrid, 2014.

[51] J. Margalef Roig; S. Miret Artés; E. Outerelo Domínguez, *Probabilidad y Economía 4. Mercados Financieros Continuos*. Sanz y Torres, Madrid, 2016.

[52] J. Margalef Roig; E. Outerelo Domínguez, *Probabilidad y Economía 1.Mercados Financieros Finitos*. Sanz y Torres, Madrid, 2010.

[53] J. Margalef Roig; E. Outerelo Domínguez, *Probabilidad y Economía 2*. Espacios de Probabilidad Generales. Sanz y Torres, 2013.

[54] J. L. Martín Marín; A. Trujillo Ponce, *Manual de Mercados Financieros*, Thomson, Madrid, 2004.

[55] J. L. McCauley, *Stochastic Calculus and Differential Equations for Physics and Finances*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[56] R. C. Merton, *An Intertemporal Capital Asset Pricing Model*. Econometrica, **41**, 867-887, (1973).

[57] R. C. Merton, *Theory of Rational Option Pricing*, The Bell J. Econom. Managem. Sci. **4**, 141-183, (1973).

[58] R. C. Merton, *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*. The Journal of Finance, **29**, 449-413, (1974).

[59] P. A. Meyer, *Un cours sur les integrales stochastriques*. En *Seminaire de Probabilité, X*, Lecture Notes in Mathematics **511**, 245-400. Springer-Verlag, New York, 1976.

[60] T. Mikosch, *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific, Londres, 2006.

[61] Nobel Prize in Economical Science (1997). Disponible en: http://www.nobel.se/laureates/economy-1970.html

[62] Nobel Prize in Economical Science (1970). Disponible en: http://www.nobel.se/laureates/economy-1997.html

[63] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlín, 2010.

[64] C. Pintoux; N. Privault, *The Dothan Pricing Model Revisited*. Mathematical Finance, **21**, 355-363, (2011).

[65] P. A. Raviar; J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numèrique des équations aux dérivés partielles*. Masson, París, 1983..

[66] S. Ríos, *Métodos Estadísticos*. Ediciones del Castillo, Madrid, 1971..

[67] L. C. G. Rogers, *Which Model for Term-Structure of Interest Rates Should one Use?*. Mathematical Finance, IMA, Volume 65, 93-116, Springer, New York, 1995.

[68] M. Rubinstein, *The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options*. Bell Journal of Economics, **7**, 407-425, (1976).

[69] J. M. Ruiz Amestoy, *Matemática Financiera*. Centro de formación del Banco de España, Madrid, 1986.

[70] P. A. Samuelson, *Rational Theory of Warrants Pricing*. Industrial Management Review **6**, 13-39, (1965).

[71] A. N. Shiryaev, *Probability*, Springer, New York, 1996.

[72] A. N. Shiryaev, *Essentials of Stochastic Finance*, Adv. Ser. Statistical Science and Appl. Probability, Vol. **3**, World Scientific, 2001.

[73] O. Vasiček, *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics, **5**, 177-188, (1977).

[74] M. Yor, *Some Aspects of Brownian Motion. Part 1, Part 2.*, Lectures in Math. Birkhäuser, 1992, 1997.

Índice alfabético

Símbolos