LIVRE II

EXAMEN SYNTAXIQUE ET SEMANTIQUE DU SYSTEME A

Chapitre 1.- LA POSSIBILITE ET L'INTERET LOGICO-FORMEL DE SYSTEMES CONTRADICTOIRES

§1.- La peur de la contradiction a non seulement bouché des voies que la recherche logico-formelle aurait pu se frayer mais surtout étouffé des tentatives de mettre sur pied des théories simplement inconsistantes dans différents domaines de la pensée.

On tenait naguère, en effet, pour une idée irréfragable que toute théorie contradictoire est triviale. On trouve encore cette erreur dans l'oeuvre des Bourbaki (B:17, p.EI.12):

> On dit qu'une théorie mathématique est contradictoire si l'on y a démontré à la fois un théorème et sa négation; des règles de raisonnement usuelles, qui sont à la base des règles de la syntaxe des langues formalisées, il résulte que tout théorème est à la fois vrai et faux dans cette théorie, qui perd en ce cas tout intérêt.

Cette affirmation sur les théories contradictoires constitue une méprise. Premièrement, une théorie qui, pour chacun de ses théorèmes, permet de prouver en même temps et le théorème et sa négation n'est pas triviale pour autant, à moins que la classe des théorèmes ne soit identique à celle des fbf. Deuxièmement, une théorie qui contient comme théorèmes certaines formules ainsi que leurs négations n'est pas pour autant contrainte de reconnaître comme théorème la négation de chacun de ses théorèmes. Les Bourbaki parlent, certes, seulement de théories qui s'en tiennent à des règles de raisonnement usuelles. Mais nous contestons que les règles de la logique classique couvrent la classe des règle d'inférence ou de raisonnement usuelles : elles ne portent -grosso modo- que sur les cas où la négation utilisée est 'ne...point' (ou 'ne...pas du tout') et où, dès lors, les différences entre le conditionnel fort et l'implication s'estompent ou perdent de leur intérêt. Les cas traités par la logique classique sont, dans la vie quotidienne, dans la pensée religieuse, littéraire, poétique, socio-politique, dans bien des savoirs empiriques, dans l'essai et la philosophie de beaucoup moins nombreux que les cas où le flou, le contradictoire interviennent.

C'est pour cette raison -afin d'échapper au carcan que constitue le RC- qu'ont été construites les logiques paraconsistantes. Une logique paraconsistante est telle qu'elle a des extensions non triviales simplement inconsistantes (donc contradictoires si la logique en question contient le principe de non-contradiction et la règle d'adjonction).

Nous nous intéressons particulièrement aux systèmes contradictoires, c-à-d aux systèmes simplement inconsistants tels que, parmi les énoncés affirmés et niés en même temps dans ces systèmes figurent des théorèmes de logique. Puisque nous allons nous confiner ici aux seules théories logiques, la différence entre systèmes simplement inconsistants et systèmes contradictoires s'estompe au point de disparaître.

Le système <u>As</u> est un système de logique simplement inconsistant, donc contradictoire.

§2.- Un système est contradictoire, non pas du fait qu'il ne contienne pas comme tautologie une expression que l'on puisse appeler 'principe de non-contradiction', mais du fait qu'un certain nombre de formules y soient en même temps contradictoires et tautologiques, et, plus généralement peut-être, du fait que les négations de certains théorèmes soient aussi des théorèmes. La différence entre ces deux définitions alternatives disparaît si l'on identifie les contradictions d'un système et les négations de ses tautologies. Mais dans une approche sémantique cette identification n'est pas obligatoire. Si l'on établit une algèbre quelconque comme ensemble des valeurs de vérité d'un système logique, on peut prendre un sous-ensemble propre de ses individus comme ensemble des valeurs désignées; un autre sous-ensemble (pas nécessairement disjoint par rapport au premier) comme ensemble des valeurs antidésignées; une contradiction au regard de ce système sera alors une formule quelconque qui prenne uniformément, dans le système, des valeurs antidésignées. Cela permet d'avoir une caractérisation des contradictions d'un système indépendante de celle de ses tautologies. On peut, bien sûr, exprimer le souhait qu'un système soit tenu pour adéquat seulement si la négation d'une tautologie est une contradiction, et vice versa (ce qui établit des contraintes quant au choix des valeurs désignées et des valeurs antidésignées, en fonction des propriétés assignées à la négation). Notons cependant que ce _desideratum_ ne constitue pas une caractéristique effective de tous les systèmes, loin s'en faut.

Si donc un système de logique contradictoire peut contenir comme tautologie le principe de non-contradiction, des systèmes non contradictoires -qu'ils soient surconsistants ou non- peuvent ne pas contenir le principe de non-contradiction comme tautologie. Prenons comme exemple le cas du système $Ł_3$ de Lukasiewicz, le doyen des systèmes de logique non-classique. Ce système est surconsistant : toute extension simplement inconsistante de $Ł_3$ est triviale. Toute caractérisation des valeurs de vérité de la matrice caractéristique de ce système devra rendre disjoints l'ensemble des valeurs désignées et celui des valeurs antidésignées. Dans une extension d'un tel système il est exclu qu'une formule et sa négation prennent, toutes les deux, des valeurs désignées.

Une difficulté qui pourrait être soulevée à l'encontre de systèmes contradictoires (ou, plus exactement, de ceux, parmi les systèmes contradictoires, qui ont une sémantique où la classe des valeurs désignées et celle des valeurs antidésignées ne sont pas disjointes) c'est que la classe des valeurs désignées doit être le complément relatif de celle des valeurs antidésignées. Soit, mais, au lieu de définir la complémentation selon les patrons d'une théorie classique des ensembles, on peut tout aussi bien définir cette opération selon une théorie contradictoire des ensembles, où une chose puisse en même temps appartenir à l'ensemble X et au complément de X.

Ce qui caractérise les systèmes de logique contradictoires ce n'est donc pas l'absence du principe de contradiction, mais une loi sémantique que l'on peut énoncer comme suit: dans un système contradictoire ou bien la négation n'est pas strictement vérifonctionnelle (et alors les négations de certaines tautologies, i.e. de formules prenant uniformément une valeur désignée, prennent uniformément une valeur désignée), ou bien est tel que l'ensemble de ses valeurs désignées et l'ensemble de ses valeurs antidésignées ne sont pas disjoints (si l'on appelle 'valeur antidésignée' toute valeur sur laquelle envoie l'opération de négation lorsque l'argument est une valeur désignée). On peut, par suite, caractériser les systèmes non contradictoires qui soient strictement vérifonctionnels comme ceux où l'ensemble des valeurs désignées et celui des valeurs antidésignées sont disjoints, au sens classique (fortement disjoints). D'une manière plus générale un système est non cantradictoire si chaque opération de négation du système (qu'il soit strictement vérifonctionnel ou non) est telle qu'elle n'envoie jamais sur une valeur désignée un argument ayant une valeur désignée.

§3.- Dans le paragraphe précédent nous avons examiné le principe sémantique de non contradictorialité, caractéristique des systèmes non contradictoires, par opposition au principe sémantique de contradictorialité, caractéristique des systèmes contradictoires. Nous avons vu que la présence dans un système du principe de non contradiction (principe syntaxique), de même que son absence, ne sont pas pertinentes pour caractériser le système comme contradictoire ou non contradictoire.

On peut faire des remarques analogues, mutatis mutandis, à propos du principe de tiers exclu et des diverses versions de la loi de bivalence. Des systèmes non contradictoires -tels $Ł_3$ et le calcul intuitionniste, pour ne parler que des mieux connus- sont tels que le principe de tiers exclu n'en est pas une thèse. En revanche tous les systèmes contradictoires que nous connaissons -dont il sera question au chapitre 2 de ce Livre- contiennent le principe de tiers exclu (sans que cela constitue néanmoins une caractéristique nécessaire des systèmes contradictoires). Mieux : comme nous le verrons au §7 de ce même Chapitre, le maintient du principe de de tiers exclu constitue une des motivations logico-formelles de l'admission d'un système de logique contradictoire.

On peut proposer diverses formulations alternatives du principe de bivalence. En voici plusieurs :

a) pour tout p, ou bien /p/ est une valeur désignée ou bien /p/ est une valeur antidésignée ;

b) pour tout p, ou bien /p/ est une valeur désignée ou bien /Np/ est une valeur désignée;

c) il n'est pas possible qu'aussi bien /p/ que /Np/ soient des valeurs antidésignées.

Dans chacun de ces cas, le 'ou bien' est interprété comme disjonction non exclusive, et 'N' est un foncteur de négation quelconque. Les deux premières formulations sont peut être un peu étroites si l'on veut admettre des systèmes à sémantique tensorielle; ce sont en revanche des caractérisations appropriées pour divers systèmes scalaires. Un système est tensoriel si la sémantique propre à un tel système est un ensemble de tenseurs aléthiques, i.e. de valeurs de vérité dont chacune est une suite de composantes (composantes que nous appellerons des items aléthiques), en nombre fini ou infini. Les formulations précédentes peuvent ainsi être adaptées comme suit : $/p/_i$ sera le i^e item de la valeur de vérité de p; alors on définit ainsi les notions d'item désigné et d'item antidésigné : un item i est désigné si le tenseur (i,i,i...) (le tenseur composé uniformément d'items égaux à i) est une valeur désignée; i est antidésignée si le tenseur (i,i,i...) est antidésignée. Dans (a) et (b) ci-dessus, on substitue à /p/ et /Np/, respectivement, $/p/_i$ et $/Np/_i$ et aux syntagmes 'une valeur désignée' et 'une valeur antidésignée' ceux-ci : 'un item désigné' et 'un item antidésigné'. Les résultats de ces transformations seront (a') et (b') respectivement.

Aucune des formulations (a), (b) et (c) n'est va lide pour le système A. En revanche (a') et (b') sont des principes valides pour la sémantique de A, comme on aura l'occasion de le voir au Chapitre 3 de ce Livre.

La plupart des systèmes de logique non classiques et non contradictoires qui sont strictement vérifonctionnels se conforment à la version (c) du principe de bivalence, tandis qu'ils renoncent aux versions (a) et (b) (sans les remplacer par des versions comme (a') et (b'), puisque la plupart de ces systèmes sont scalaires). Un système peut être contradictoire en admettant la version (c), notamment s'il n'est pas strictement vérifonctionnel. Toutefois, si nous continuons de tenir pour antidésignée toute valeur prise par la négation d'une formule prenant, elle, une valeur désignée -dans un système strictement vérifonctionnel-, alors il faut dire qu'un système contradictoire strictement vérifonctionnel doit renoncer à la version (c) du principe (si le 'ne...pas' y est interprété comme négation classique, c-à-d forte; une sémantique et un métalangage non classiques, contradictoires, pour un système contradictoire, peuvent admettre la version (c), pourvu que l'on prenne la négation qui y figure comme négation simple ou faible; mais nous laisserons de côté ici cette possibilité-là).

A nos yeux, l'abandon de (c) constitue un éloignement de l'esprit de la logique classique plus grand que l'abandon de (a) et (b). L'esprit dignoscitif de la logique classique s'en tient, il est vrai, aussi bien à l'exclusivité qu'à l'exhaustivité des valeurs désignées et antidésignées. Mais il nous semble que cet esprit dignoscitif peut à la limite concevoir l'abandon de l'exhaustivité. Les logiques contradictoires, en revanche, gardent souvent l'exhaustivité (ou quelque version atténuée de l'exhaustivité, comme (a') et (b')) et rejettent l'exclusivité (à moins qu'elles ne rejettent la vérifonctionalité stricte). C'est bien le cas de A.

Il en ressort -pour revenir à notre comparaison du système A et d'un système comme Ł_3- qu'en dépit de la présence dans A du principe de tiers exclu et de son absence dans Ł_3 A est un système beaucoup plus éloigné de l'esprit sous-jacent de la logique classique que ne l'est Ł_3.

§4.- La non-trivialité (le caractère anaporétique) d'un système réside dans le fait qu'on n'y puisse pas démontrer n'importe quoi, i.e. que l'ensemble de ses procédés d'obtention de vérités logiques ne permette point d'établir comme valide n'importe quelle formule du système. Dans un système ayant la règle de substitution, le système est anaporétique ssi il est P-consistant (Post-consistant), c-à-d si l'on n'y peut pas démontrer comme théorème ou tautologie une variable sententielle seule. Comme nous exclurons de nos considérations les systèmes qui ne contiennent pas la règle de substitution (ou son équivalent pour les schémas), la non-trivialité d'une théorie coïncide avec le fait qu'elle soit P-consistante. On peut ainsi affirmer qu'un système de logique est intéressant ssi il remplit les deux conditions que voici :

1) Il est P-consistant;

2) Il permet certaines inférences.

Nous avons vu au §1 de ce Chapitre que la confusion entre consistance simple et P-consistance était naguère fort répandue -et malheureusement il se peut qu'elle le soit encore de nos jours-. Cette confusion une fois dissipée, la possibilité de systèmes de logique contradictoires et non triviaux apparaît clairement (elle est confirmée du reste par leur réalité, comme on le verra au Chapitre 2). Mais d'aucuns ont invoqué d'autres raisons contre la mise sur pied de systèmes contradictoires. C'est notamment le cas de Tarski (T:7, pp.39-40):

> (...) a theory becomes untenable if we succeed in deriving from it two contradictory sentences. Nox we can ask what are the usual motives for rejecting a theory on such grounds. Persons who are acquainted with modern logic are inclined to answer this question in the following way : A welle-known logical law shows that a theory which enables us to derive two contradictory sentences enables us to derive every sentence; therefore such a theory is trivial and deprived of any scientific interest.
>
> I have some doubts whether this answer contains an adequate analysis of the situation. I think that people who do not know modern logic are as little inclinet to accept an inconsistent theory as those who are thoroughly familiar with it; and probably this applies even to those who regard (as some still do) the logical law on which the argument is based as a highly controversial issue... I do not think that out attitude toward an inconsistent theory would change even if we decided for some reasons to weaken our system of logic so as to deprive ourselves of the possibility of deriving every sentence from any two contradictory sentences.

D'après Tarski, en effet, la raison authentique qui conduit au rejet d'une théorie contenant des contradictions (ou, plus généralement, d'une théorie simplement inconsistante) c'est qu'on sait qu'une théorie pareille doit contenir des énoncés faux. Mais cela ne nous semble pas convaincant. Premièrement, il faut relever l'existence de théories qui, parce qu'elles ont des sémantiques non strictement vérifonctionnelles, peuvent contenir des inconsistances simples, voire des contradictions, sans contenir aucun énoncé faux (aucun énoncé, plus généralement, ayant une valeur de vérité antidésignée). Deuxièmement -et surtout- il faut répondre que, si on se place au point de vu discours naturel, pré-formalisé (le point de vue intuitif auquel se réfère précisément Tarski), alors la présence de quelques énoncés faux dans un discours n'entraîne ni le rejet de ce discours ni même la nécessité de l'amender. L'homme de la rue reconnaît en effet l'existence de demi-vérités, de phrases qui sont vraies tout en ne l'étant pas (c-à-d tout en étant fausses), dans la mesure précisément où elles ne sont pas entièrement vraies. Et fort peu de gens exigent des discours où chaque phrase soit cent pour cent vraie.

A nos yeux le motif qui a conduit tant de gens à demeurer intraitables dans leur rejet de tout système contradictoire et de toute inconsistance simple en général c'est qu'à leur sens se contredire c'est se dédire; une contradiction (plus généralement : une inconsistance simple) serait un faux message, non seulement un message faux. Celui qui se contredit efface ou retire ses propres propos et ne laisse rien; dès lors, s'il fallait admettre des contradictions, on ne saurait point à qui s'en tenir, puisque le oui et le non deviendraient indifférents et équivalents. Dans la Section I du Livre III de cette étude nous répondrons à ce type d'arguments philosophiques (dont une version bien connue est celle de Strawson). Le point de vue logico-formel, qui est le seul à nous retenir pour l'instant, reflète précisément cette prétendue vacuité de toute théorie contradictoire ou simplement inconsistante = (cette absence de tranchant ou gouffre d'indifférence où dire et ne pas dire reviennent au même) par la loi selon laquelle= de p et "non p" q peut être dérivé. Le rejet de cette loi = pour au moins un foncteur de négation constitue un réquisit mi nimal de tout système paraconsistant. (Ce n'est pas un réqui sit suffisant, car un système comme $Ł_3$ ne contient pas cette= loi, et pourtant il est surconsistant, car il contient une autre que voici -dans notre transcription- : "p.NpC.p.NpCq";= d'où on peut dériver la règle p, Np ::: q, encore que la loi d'absorption ne soit pas une tautologie de ce système).

Par conséquent, Tarski ne semble avoir mis au jour aucun motif pour rejeter les systèmes contradictoires = qui soit indépendant de la loi de Pseudo-Scot (c-à-d de la loi comme quoi d'une contradiction on peut dériver n'importe quoi).

§5.- Nous procéderons maintenant à une classification des sys tèmes contradictoires.

1) Un système est superficiellement contradictoire lorsqu'on y trouve comme tautologies certaines formules niées et non niées, sans que pour autant ces formules constituent des contradic-- tions du point de vue du système. En revanche, dans un systè me profondément contradictoire toute négation d'une tautologie est une contradiction, si bien que, lorsqu'une formule et sa né gation sont toutes les deux des tautologies, elles sont toutes les deux des contradictions (chacune est une tautologie contra dictoire). (Peut-être faut-il nuancer la remarque précédente= pour ce qui est de systèmes ne contenant pas la loi de la dou ble négation, ou la contenant sous une version affaiblie; dans de tels systèmes, s'ils sont profondément contradictoires, il y aura au moins une tautologie contradictoire, mais pas néces sairement au moins deux, comme il arrive dans des systèmes = comme A, qui contiennent la loi de la double négation sous sa forme la plus forte). La différence que nous signalons peut= apparaître comme purement terminologique, ou bien être consi- dérée comme ressortissant aux intentions plutôt qu'aux traits formels des systèmes. Grosso modo, la différence entre les = systèmes superficiellement contradictoires et les systèmes pro fondément contradictoires peut être marquée par le fait qu'il y ait ou non des valeurs intermédiaires en même temps désignées et antidésignées, valeurs que prendraient uniformément certai nes formules. Un système superficiellement contradictoire = peut avoir plusieurs stratégies. Il peut avoir une sémantique non vérifonctionnelle. Il peut aussi établir un ensemble de= valeurs désignées, sans établir aucun ensemble de valeurs an- tidésignées; ou bien ne pas antidésigner chaque valeur sur la quelle envoie la négation lorsqu'elle prend pour argument une valeur désignée. . Vu tout cela, la différence que nous élu cidons dans ce point concerne les structures sémantiques = proposées et non pas les systèmes logiques, en tant qu'ensem- bles de formules et/ou règles d'inférence. La sémantique que nous proposerons pour As au Chapitre 3 est une sémantique pro fondément contradictoire -ce qui répond fort bien aux motiva- tions philosophiques du système-.

2) Un système est complètement contradictoire lorsque la néga tion de chacune de ses tautologies est aussi une tautologie.= Tous les systèmes que nous connaissons, y compris A, sont des systèmes partiellement contradictoires, c-à-d non complè tement contradictoires. Mais des systèmes complètement contra dictoires et non triviaux sont possibles du point de vue formel.

3) Une troisième distinction sépare les systèmes absolument contradictoires de ceux qui sont relativement contradictoires. Un système est absolument contradictoire s'il contient comme tautologies une formule et sa négation, et pourtant la conjonction d'une formule quelconque et de sa négation impliquent n'importe quoi dans le système. (Alternativement, et d'un point de vue sémantique, on peut caractériser un système absolument contradictoire comme un système contradictoire dans lequel la conjonction d'une formule et de sa négation prend toujours une valeur non désignée; les deux caractérisations ne coïncient pas dans tous les cas, car un système peut contenir des valeurs qui ne soient ni désignées ni antidésignées; en outre, un système relevant est tel qu'il n'y est pas possible de déduire n'importe quoi d'une seule formule, même si celle-ci prend une valeur antidésignée et non désignée). Un système absolument contradictoire se doit d'être non antinomique; la règle d'adjonction n'y doit pas être valide. Un système est relativement contradictoire s'il est contradictoire et qu'il n'est pas absolument contradictoire. A est, bien entendu, un système relativement contradictoire.

La distinction que nous venons d'introduire peut être généralisée comme suit. Soit la suite de formules (p)

(p) p, "p.Np", "p.Np.N(p.Np)", "p.Np.N(p.Np).N(p.Np.N(p.Np))" etc.. Un système S est absolument contradictoire au niveau n ssi il remplit, pour quelque p, les conditions que voici : i) les n premières formules dans la suite (p) sont des tautologies de S; ii) les négations de ces n premières formules dans la suite (p) sont aussi des tautologies de S; iii) la (n+1)^{e} formule dans la suite (p) est une surcontradiction de S (une formule qui prend une valeur antidésignée et non désignée); iv) la négation de la (n+1)^{e} formule dans la suite (p) est une tautologie de S.

Un système S est relativement contradictoire au niveau n ssi il remplit les deux premières conditions des systèmes absolument contradictoires à ce même niveau et qu'en outre il ne remplit pas la troisième de ces conditions.

Maintenant nous pouvons introduire, sur cette base, la distinction entre systèmes fortement contradictoires et systèmes faiblement contradictoires. Un système est faiblement contradictoire au niveau n ssi il remplit les deux premières conditions des systèmes absolument contradictoires au niveau n et qu'il ne remplit pas la quatrième de ces conditions. Un système est fortement contradictoire au niveau n ssi il remplit les conditions (i), (ii) et (iv) des systèmes absolument contradictoires au niveau n.

Par suite, un système fortement contradictoire au niveau n peut être relativement contradictoire et vice versa. Un système absolument contradictoire au niveau n peut être fortement contradictoire au même niveau, et réciproquement. Un système faiblement contradictoire au niveau n ne peut pas être absolument contradictoire au même niveau, mais il peut être relativement contradictoire au même niveau.

Un système qui, pour quelque p, est relativement contradictoire à tout niveau n sera dit infiniment contradictoire. Un système possédant le principe de non-contradiction est, s'il est contradictoire au niveau n, fortement contradictoire à ce niveau-là. Tout système ayant le principe de non contradiction, qui soit relativement contradictoire au premier niveau et qui admette, sans restrictions, la loi d'adjonction sera un système fortement et relativement contradictoire à tous les niveaux. Un tel système sera donc infiniment contradictoire. L'inverse n'est pas vrai (cf les théories des ensembles NF_{ω} de da Costa-Arruda, dont il sera question au Chapitre 2).

Il y a enfin des systèmes faiblement contradictoires au niveau n qui remplissent la condition (iii) des systèmes absolument contradictoires au niveau n+1. De tels systèmes seront dits modérément contradictoires. (Chaque système NF_i de da Costa est modérément contradictoire). Un système modérément contradictoire ne peut être ni absolument contradictoire ni relativement contradictoire au même niveau.

Signalons qu'une classification modèle-théorétique, toute récente, des systèmes contradictoires a été proposée par J. Grant dans G:39. Dans M:19, M. Diego Marconi propose une autre classification, proche de la nôtre mais plus détaillée sur plusieurs points et tenant compte d'une gamme plus vaste de systèmes (non seulement des systèmes contradictoires au sens technique que nous donnons à ce mot). Malheureusement, nous n'avons pas eu le temps de nous livrer à un examen comparatif approfondi des rapports entre ces diverses classifications.

La place de <u>A</u> dans la classification précédente (i.e. dans le point (3) de cette classification, et ses développements) est celle-ci : <u>A</u> est un système relativement contradictoire et fortement contradictoire à tous les niveaux; <u>A</u> est un système infiniment contradictoire. <u>A</u> n'est donc un système absolument contradictoire à aucun niveau; ce n'est pas non plus un système modérément contradictoire.

§6.- A la caractérisation et classification que nous venons de proposer des systèmes contradictoires on peut opposer l'objection que voici : il est vrai qu'il y a toutes ces classes de systèmes contradictoires; toujours est-il qu'un système contradictoire non trivial doit être très faible, trop faible. Voyons plusieurs arguments présentés en ce sens.

L'un des plus farouches adversaires de la contradictorialité, Sir Karl Popper, a affirmé que tout système contradictoire -hormis <u>an extremely weak system</u> (P:11, p.321)- doit être trivial. Il présente deux arguments pour prouver que dans tout système satisfaisant on doit pouvoir prouver q de "p.Np".

Voici la première dérivation. Elle se fonde sur deux seules règles d'inférence : addition et syllogisme disjonctif:

p ::: p-ou-q
non-p , p-ou-q ::: q
Donc : p, non-p ::: q.

A cela nous avons à répondre : la règle d'addition, dans un système comme <u>As</u>, est valide pour la disjonction simple ('+'), non pas pour la disjonction forte ('V'), qui est lue comme suit : 'pVq' = 'il est exact que p à moins que q'. Mais pour cette disjonction forte il subsiste (puisqu'elle n'est pas commutative) une règle d'addition à gauche (p ::: qVp). Le syllogisme disjonctif, lui, n'est pas valide pour la disjonction et la négation <u>simples</u> ou faibles. De ce que "p+q" soit vrai et que p soit faux (ce qui, pour nous -mais pas pour tout le monde- revient à ce que "Np" soit vrai; sur ce point nous sommes d'accord avec Popper) il ne découle point que q soit vrai. (Le rejet du syllogisme disjonctif pour ces foncteurs constitue un point où <u>As</u> coïncide avec les logiques relevantes). En revanche, de ce que "p ou q" soit vrai et p absolument faux il découle bien que q est vrai; mais d'être faux, tout court, à être absolument faux il y a une longue, très très longue distance. (Si on est insensible à ces distinctions, alors on se livrera sans doute au syllogisme disjonctif pour la disjonction simple, et sans doute voudra-t-on supprimer toute différence entre disjonction simple et forte, négation simple et surnégation, etc. Alors, mais alors seulement, on sera amené à accepter l'argument de Popper).

Par conséquent, même pour la disjonction simple ou normale le syllogisme disjonctif est valide, mais seulement lorsque la négation employée est une surnégation 'F'. Mais tout ce qui découle de là c'est que, si quelqu'un affirme p et aussi la surnégation de p, il est conduit à affirmer q. Mais s'il est suffisamment averti pour faire le départ entre la négation simple ou normale et la surnégation de p, il n'affirmera jamais "Fp" s'il a affirmé p, ni vice versa.

Pour ce qui est maintenant de la disjonction forte, la négation du premier membre disjonctif plus la formule disjonctive entraînent la vérité du deuxième membre disjonctif. Mais la négation (simple) du deuxième membre disjonctif plus la formule disjonctive n'entraînent point la vérité du premier membre disjonctif.

Résumons tout ceci en signes :

a) Règles d'inférence valides :

p ::: qVp
p ::: p+q
p+q , Fp ::: q
pVq , Np ::: q
p+q ::: q+p

b) Règles d'inférence non valides :

p ::: pVq
p+q , Np ::: q
pVq , Nq ::: p
pVq ::: qVp

(Pour être exacts, il faut dire que chaque prémisse des règles d'inférence valides -celles du groupe (a)- doit être préfixée d'une occurrence du foncteur 'B'). On voit bien maintenant que la dérivation d'une aporie ne peut pas être faite selon le premier des procédés énoncés par Popper.

Venons-en au deuxième procédé. Il se fonde sur une loi de contraposition inférentielle. Si

p, q ::: r

est une règle d'inférence valide -nous dit Popper-, alors

p , non-r ::: non-q

l'est aussi. Nous repoussons résolument cette affirmation. C'est le cas uniquement si le 'non' est une surnégation (i.e. 'il est absolument faux que'). Pour la négation simple, il s'agit d'un sophisme. Rien d'étonnant que le syllogisme en Baroco présenté par Popper comme exemple soit si implausible; il n'est valide, en effet, que pour certains foncteurs conditionnels et pour certains foncteurs de négation, mais pas du tout pour n'importe quelle lecture de 'tous ...sont---' et de 'quelque ... n'est pas---'. (Nous aborderons avec plus de détail ces problèmes au Chapitre 5 de ce Livre).

Une autre présentation de l'argument qui prétend conclure n'importe quoi à partir d'une contradiction se trouve chez C.I. Lewis (L:28, p.124n.). L'argument est sophistique s'il vise la négation simple, car il comporte un pas incorrect à savoir : "s'il est vrai que ou bien p-et-q ou bien p-et-non q, et qu'il est faux que p-et-non-q, alors p-et-q"; en notation symbolique : "p.q+(p.Nq).N(p.Nq)C.p.q". Cette formule serait valide si le syllogisme disjonctif était valide pour la négation simple et la disjonction simple, c-à-d s'il était vrai, pour tout p et tout q, ceci : "p+q.NqCp". Mais, comme nous venons de le voir à propos des arguments de Popper, cette formule n'est point valide, loin s'en faut. (M. le Professeur Routley a d'ailleurs souligné que les logiques dialectiques -i.e. simplement inconsistantes- et les logiques relevantes s'accordent pour rejeter le syllogisme disjonctif; tout au moins -voudrions-nous préciser- pour certains foncteurs de disjonction et de négation).

En revanche -et comme nous l'avons indiqué à propos du premier argument de Popper- nous acceptons le syllogisme disjonctif pour la négation forte; mais tout ce que cela prouve c'est qu'on ne peut pas affirmer et surnier en même temps (ou nier et suraffirmer en même temps) une proposition ou une phrase sans impliquer par là n'importe quoi, ce qui exclut les surcontradictions mais permet les contradictions.

§7.- Nous avons jusqu'ici d'un côté caractérisé les systèmes de logique contradictoires, et examiné d'autre part les réfutations courantes de la contradiction comme conduisant inéluctablement à la trivialité. Mais quels sont les motifs qui poussent les partisans des logiques contradictoires à mettre sur pied de tels systèmes?. Ce sont des motivations de plusieurs ordres et pas toujours coïncidentes. Nous en avons exposées plusieurs dans l'Introduction de cette étude; nous éluciderons certaines d'entre elles dans le Livre III. Bornons-nous ici à traiter d'une motivation à caractère plus purement logico-formel que d'autres : nous voulons avoir une théorie des ensembles flous, car nous admettons -avec d'autres logiciens et mathématiciens- l'existence du flou, de l'entre-deux, du ni oui ni non (il y a des hommes qui ne sont ni chauves ni non chauves, des terres qui ne sont ni fertiles ni non fertiles, etc.). Or, dira-t-on, ne suffit-il pas pour un traitement adéquat du flou de renoncer au principe de tiers exclu ou, d'admettre des négations du principe de tiers exclu sans porter atteinte ni au principe de contradiction ni au RC (cf. l'introduction de cette étude, p. 4)? Non. Voyons pourquoi.

S'il y a des situations floues, où on peut dire, pour quelque p, que ni p ni non-p, alors il ne suffit pas de renoncer au principe de tiers exclu : il faut en nier des instances, c-à-d il faut admettre des contre-exemples à ce principe (autrement on ne pourrait pas faire de telles affirmations). Car il n'y a pas seulement des raisons pour s'abstenir de dire de quelqu'un qu'il est chauve et pour s'abstenir aussi de dire qu'il n'est pas chauve : il y a des raisons pour dire qu'il n'est ni chauve ni non chauve, i.e. qu'il n'est pas chauve et qu'il n'est pas non plus non chauve. Or, si d'un côté il faut nier certaines instances du principe de tiers exclu, d'autre part il faut aussi asserter ce principe. Dès lors nous avons, pour <u>chaque</u> p, "p+Np"; et, pour <u>quelques</u> p, "N(p+Np)"; donc, par la loi d'adjonction, pour quelques p, "p+Np.N(p+Np)", c-à-d une antinomie, un contre-exemple du principe de non-contradiction.

Pourquoi faut-il garder le principe de tiers exclu? Parce que ce principe joue un rôle majeur dans l'économie de notre pensée rationnelle et jouit d'une évidence admise par tout le monde, hormis les intuitionnistes. Il se pourrait naturellement que les intuitionnistes eussent raison, si le seul argument à avancer contre eux fût leur situation minoritaire. Mais en fait l'essentiel réside dans le fait que dans la grande majorité de nos façons habituelles de raisonner le principe de tiers exclu joue un rôle majeur, et qu'on peut même supposer que ce principe -sous une version ou sous une autre- est à la base de tout raisonnement (tel fut l'avis du P. Pierre Fonseca, S.I., le principal auteur du fameux Cursus Conimbricensis, au XVI^e siècle; nous aborderons cette question dans la Section I du Livre III). L'homme de la rue emploie ce principe d'une manière prépondérante : oui ou non, c'est vrai ou ce n'est pas vrai, tu le veux ou pas, etc. Pourquoi sacrifier des vérités évidentes seulement parce qu'elles sont mutuellement contradictoires, au lieu d'accepter précisément la contradiction?

Nous sommes donc entièrement d'accord avec Neil Cooper, de l'Université de Dundee, pour reconnaître (C:22, p.161):

> the Classical Law of Excluded Middle (CLEM) is so fundamental in our thought that in some form or other it cannot but be assumed and made use of even by those who profess to reject it.

Bien entendu, nous n'acceptons cette phrase que dûment interprétée, à savoir : interprétant 'loi classique de tiers exclu' dans le sens de : validité du théorème "p+Np" pour chaque substitut de p; non pas, p.ex., comme une forme de la version forte du principe de bivalence, que nous n'acceptons pas. Mais malheureusement, ce que Neil Cooper semble entendre par 'loi classique de tiers exclu' est quelque chose de beaucoup trop faible. Dans cette mesure, notre approche est plus classique que la sienne. Nous avons l'impression que Cooper aseptise à ce point ladite loi qu'elle devient anodine, voire banale; car il rejette le principe d'instanciabilité selon lequel chaque instance d'un schéma ou loi valide est une thèse valide. Si l'on agréait ce rejet, chaque loi logique deviendrait inefficace, car toute instance substitutive gênante, d'un certain point de vue, pourrait être taxée de non-sens, sans que la loi eût à en pâtir. Le tranchant de la logique en serait plus que considérablement émoussé. Pour nous, si la logique n'est pas un pur jeu dans le vide, ses lois doivent être appliquées, obligatoirement, à toute instance substitutive. Que l'approche de Cooper aboutit à évacuer tout contenu de la loi de tiers exclu apparaît encore plus clairement à la fin de l'article que nous commentons, lorsqu'il tire la première de ses conclusions (C:22, p. 179) :

> The Classical Law of Excluded Middle is fundamental in our thought, but it is not applicable to each and every disjunction of a statement and its ordinary contradictory. For there are hidden implications or concealed conditions which cause disjunctions to fail in logical comprehensiveness. The requirement of logical comprehensiveness represents one logical ideal among others which may be violated without self-contradiction.

Mais précisément ce que la loi de tiers exclu affirme c'est que chaque disjonction d'une phrase et de sa négation possède la compréhensivité logique, c-à-d qu'elle épuise les alternatives. La position de Cooper réduit la logique à une situation d'impuissance, comme une espèce d'idéal régulatif.

Si nous nous sommes appesanti sur la conception de

Cooper à propos de la loi de tiers exclu c'est que, si l'on = devait accepter une telle interprétation, l'admission conjoin te du principe de tiers exclu et de la réalité des situations floues n'entraînerait pas la nécessité d'accepter des contradictions. En effet : de ce que "p+Np" fût un schéma valide , il ne découlerait pas que, pour chaque fbf q, "q+Nq" fût vali de. Dès lors, même si -par hypothèse- nous avions un cas où "N(q+Nq)" fût vrai, il ne s'ensuivrait pas forcément que la phrase dont cette dernière phrase est la négation -à savoir : "q+Nq"- dût être assertée elle aussi; ni donc que la loi d'ad jonction nous contraignît d'admettre, pour au moins un r, = "r.Nr" (r étant, en l'occurrence, "q+Nq"). Nous avons vu quel serait le prix à payer pour éviter la contradiction par ce = biais.

D'autre part, on peut démontrer que, même sans considérer la nécessité de garder le principe de tiers exclu, la simple nécessité d'admettre des négations d'instances de ce = principe entraîne la nécessité d'admettre des contradictions, pourvu que l'on veuille garder les lois de DeMorgan et la loi involutive de la négation, plus la commutativité de la conjonc tion. (Ce fait, bien connu, fut prouvé il y a longtemps par= Church; des objections ont été soulevées contre ses arguments, mais elles ne nous paraissent pas convaincantes).

Chapitre 2.- A PROPOS DE PLUSIEURS SYSTEMES DE LOGIQUE PARA-CONSISTANTE ET DE LEURS RELATIONS AVEC A

§1.- L'emprise exercée par le RC explique que la construction de systèmes de logique contradictoires soit toute récente. Na guère les partisans de la contradictorialité du réel s'abstenaient soigneusement de tout rapport avec la logique formelle et, de ce fait, discréditaient la thèse même qu'ils voulaient soutenir, à tout le moins aux yeux des tenants de la rigueur= et de l'exactitude. On peut considérer que Vasil'ev fut, avec Lukasiewicz, au début du siècle un précurseur des logiques = contradictoires ou tout au moins des logiques paraconsistan-- tes. Mais la première logique paraconsistante fut présentée= dans l'important article de Jaskowski J:7, exposant son systè me de logique discursive. Il y eut ensuite les travaux de= da Costa. Et depuis à peu près une quinzaine d'années -mais= surtout pendant les toutes dernières années- il y a un foisonnement de travaux sur la logiques paraconsistante en Pologne, au Brésil, à Canberra, à Pittsburgh; vers les mêmes dates vit le jour, en Californie, la théorie des ensembles flous de Zadeh. Jusqu'ici on n'a pas établi suffisamment de liens entre la logique paraconsistante et la théorie des ensembles flous= (mais certains travaux ont été écrits sur ce lien; p.ex. S:8).

L'état actuel des recherches en logique contradictoi re et paraconsistante est exposé avec détail par Arruda dans= A:11, qui contient une bibliographie étendue et soulève beaucoup de questions fort intéressantes pour des développements= ultérieurs de la recherche. (Un autre travail d'ensemble sur le sujet est T:4).

Comme nous l'avons dit au chapitre précédent, une = classification récente très approfondie de ces systèmes a été réalisée par M. Diego Marconi, de l'Université de Turin. Mar coni propose des classifications aussi bien sémantiques que = syntaxiques et étudie les rapports entre la paraconsistance = syntaxique et la paraconsistance sémantique.

§2.- Jaskowski, dans J:7, posa un problème et y apporta une première solution . Le problème de Jaskowski est celui-ci : y a-t-il des systèmes de logique qui permettent des extensions simplement inconsistantes non saturées? Le système D_2 construit par Jaskowski dans J:7 constitue le premier cas d'un tel système de logique sententielle. D_2 est connu comme 'logique discursive', car l'intention de Jaskowski c'était de formaliser des discussions où deux interlocuteurs échangent des points de vue non absurdes mais peut-être mutuellement contradictoires. Le système D_2 de Jaskowski est construit sur la base du système modal S5. Pour le construire on prend chaque théorème de S5 de la forme "poss(p)", où "poss" est l'opérateur de possibilité; on en retranche le préfixe 'poss' et on élimine toutes les formules qui contiennent des foncteurs ou opérateurs autres que la conjonction, la négation classique et deux opérateurs qu'on peut définir dans S5 comme suit (si 'C' est le conditionnel classique et '.' la conjonction classique) : 1) /pdiscimpq/ eq /poss(p)Cq/ ; 2) /p&q/ eq /poss(p).q/. (Nous suivons ici, non pas la présentation originelle, mais la présentation plus élégante que de D_2 offrent da Costa et Dubikajtis dans C:31, p. 45; on y trouve, à la p. 46, une nouvelle axiomatique de D_2, conforme à ce choix d'opérateurs primitifs).

Notre conjecture est la suivante : on peut obtenir D_2 à partir de As comme suit. On construit d'abord un fragment As' de As tel que : As' ne contient d'autres foncteurs que F, B, . et +. Le résultat de substituer à chaque théorème q de As' de la forme "Jp" -i.e. "FBFp"- p lui-même (c-à-d, le résultat de retrancher de q le préfixe 'J') est la J-transformée de q. L'ensemble des J-transformées de tous les théorèmes de As' constitue D_2, si l'on retranche en outre toutes les formules qui contiennent d'autres foncteurs que la conjonction '.', la négation 'F' et deux autres foncteurs définis respectivement comme /JpCq/ et /Jp.q/.

Notons que, même si cette conjecture s'avérait fondée, cela ne prouverait pas que As soit une extension (conservative ou non) de D_2. On peut toutefois prouver aisément, en choisissant une fonction de traduction différente, que As est une extension non conservative de D_2; mais le résultat le plus intéressant ce serait de prouver que, pour quelque choix appropriée d'une fonction de traduction, As est une extension conservative de D_2. Mais un tel résultat est au-delà de notre conjecture.

Comme nous le disions au §1 de ce chapitre, la logique discursive de Jaskowski a été l'objet récemment de recherches approfondies. Le professeur Kotas, dans K:21, avait déjà prouvé que D_2 est finiment axiomatisable et avait analysé les relations entre D2 et S5. Kotas avait aussi présenté une approche algébrique de D_2 dans K:22. D'autres études sur D_2 et sur le résultat de retrancher le préfixe de possibilité des thèses de systèmes modaux classiques différents de S5 on été effectuées et présentées dans K:23 (où Kotas prouve, en particulier, qu'il n'y a aucune matrice finie caractéristique de D_2), dans F:11 (où l'on pruve que D_2 est le résultat de soumettre à ce procédé de retranchement non seulement S5, mais tout système modal normal dans l'intervalle de S4 à S5, inclusivement), dans B:25, B:27 et K:14 -où l'on trouvera surtout une étude sémantique de D_2-.

§3.- Un système de logique quasi-inconsistant a été proposé par Tadeusz Kubinski dans K:24. Le système contient, outre les signes de l'ontologie de Lesniewski (dont l'epsilon, que nous transcrivons ci-dessous par simple concaténation et pour lequel Kubiński propose cette lecture : 'xy' : 'x est à coup sûr y') un signe 'N', 'Nx' pouvant être lu comme 'non-x'. Le prédicat que nous transcrivons par la concaténation est caractérisé par le seul axiome de l'ontologie de Leśkiewski plus l'axiome suivant :

xyC-(xNy)

(où 'C' est le foncteur conditionnel et '-' le foncteur de négation). Kubiski définit ensuite un autre prédicat -que nous transcrivons 'i', comme suit :

/xiy/ eq /xy+.xx.-(xy).-(xNy)/

(où '+' est le foncteur de disjonction et '.' celui de conjonction). 'xiy' doit être lu comme : 'x est y'. Dans ce système la formule suivante est un théorème : 'ExEy(xiy.xiNy)' (où 'E' est le préfixe du quantificateur existentiel ou particulier). Comme on le voit, le système n'est pas inconsistant ni même paraconsistant : aucune formule ne peut être affirmée et niée. Mais il y a une opération de quasi-négation ou négation du seul prédicat (au sens de la vieille logique), négation qui ne nie donc pas la phrase toute entière, en vertu de laquelle une formule et sa quasi-négation peuvent être vraies toutes les deux. Un système semblable devient inconsistant si l'on ajoute 'xy+xNy' aux axiomes.

§4.- Un système paraconsistant de logique tétravalente a été proposé par Nuel D. Belnap Jr. (cf. B:24 et B:9). L'idée centrale de l'approche de cet auteur c'est celle de forger une logique utile comme instrument de déduction (en particulier de déduction d'une machine) qui n'exclue pas la présence de prémisses mutuellement contradictoires et qui s'abstienne d'en conclure n'importe quoi. Il faudrait, d'après l'auteur, arriver à formaliser une stratégie pour l'abandon d'une partie de l'information lorsqu'on découvre une inconsistance (simple). En attendant de pareils résultats, nous dit Belnap, 'my computer can only accept and report information without divesting itself of it'. Voici les tables de vérité du système de Belnap. Il y a quatre valeurs : V (vrai), F (faux), N (neutre) et B (both). La seule valeur désignée est V :

-	
N	B
F	V
V	F
B	N

C	VNBF
V	VFFF
N	VVFF
B	VFVF
F	VVVV

&	VNBF
V	VNBF
N	NNFF
B	BFBF
F	FFFF

+	VNBF
V	VVVV
N	VNVN
B	VVBB
F	VNBF

Dans ce système on a, entre autres, les principes suivants : la loi de contraposition; commutativité, associativité et distributivité mutuelle de la conjonction et de la disjonction; involution; lois de DeMorgan; transitivité, réflexivité et antisymétrie du conditionnel. Mais la formule suivante n'est pas un théorème : "pC.qC.p&q".

Ce système de logique permet l'existence de théories simplement inconsistantes et non triviales. Il bannit en revanche les théories antinomiques. En effet : des prémisses p, "-p", il ne découle pas q; mais de la prémisse "p&-p" il découle n'importe quoi. Naturellement, pour éviter que toute théorie simplement inconsistante ne devienne antinomique, Belnap sacrifie la loi d'adjonction, comme nous venons de le constater.

Nous ne traiterons pas ici des motivations intuitives de Belnap, de son approche algébrique (la construction de treillis approximationnels et de treillis logiques), de sa notion d'états épistémiques, etc. Car, au-delà de l'interprétation de Belnap, nous pouvons en proposer une toute autre : V serait vrai, tout court; F, faux, tout court; B, vrai à un certain point de vue et faux à un autre point de vue; N, faux au premier de ces deux points de vue-là et vrai au second point de vue. Bien que, à notre avis, dans cette interprétation la matrice du conditionnel soit inadéquate (qu'on la conçoive ou non comme implication stricte), nous voyons néanmoins comment cette logique tétravalente, ainsi interprétée, peut justifier l'existence de théories simplement inconsistantes, où il y aura des thèses vraies à certains égards et aussi des négations de ces thèses; dans ces théories une phrase serait assertable pourvu qu'elle fût vraie à un point de vue tout au moins.

Un autre fait mérite d'être signalé : comme nous le verrons dans l'Annexe N° 1 de ce Livre, As est une extension conservative de chaque logique caractérisée par une matrice finie. Il en ressort que As est une extension conservative de la logique tétravalente de Belnap que nous venons de considérer.

§5.- Venons-en aux systèmes proposés par le professeur da Costa et ses collaborateurs. Le professeur da Costa construisit tout d'abord (C:39) une chaîne de systèmes de logique sententielle, C_n. C_o est le CSC (calcul sententiel classique). On passe de C_{n-1} à C_n en affaiblissant certains axiomes. De ce point de vue-là, C_1 est plus faible que C_o, C_2 plus faible que C_1 etc. Toutefois, da Costa prouve (C:27) que dans chacun de ces systèmes, pourvu que n soit fini, il y a un foncteur de négation définissable pour lequel toutes les propriétés de la négation classique sont valides. Par suite, il serait loisible de considérer chacun des systèmes finivalents C_n , non pas comme un affaiblissement de la logique classique, mais comme une extension conservative du CSC.

On peut transcrire les signes du système C_1 de da Costa comme suit : la négation sera '-'; la conjonction, '&'; la disjonction, '+'; le conditionnel, 'C'. Da Costa introduit en outre le symbole '°' qu'il définit ainsi (dans notre traduction) : /p°/ eq /-(p&-p)/. Les postulats du système, ainsi transcrit, sont :

1) pC.qCp
2) pCqC.pC(qCr)C.pCr
3) p , pCq ::: q
4) p&qCp
5) p&qCq
6) pC.qC.p&q
7) pC.p+q
8) qC.p+q
9) pCrC.qCrC.p+qCr
10) p+-p
11) --pCp
12) q°C.pCqC.pC-qC-p
13) p°&q°C(p&q)°
14) p°&q°C(p+q)°
15) p°&q°C(pCq)°

Parmi les formules non valides dans ce système figurent, p.ex. :

-pC.pCq	-pC.pC-q	pC.-pCq	pC.-pC-q	
p&-pCq	p&-pC-q	pCqC.pC-qC-p	pC--p	-(p&-p)
p+q&-pCq	p+qC.-pCq	pCqC.-qC-p	p=--p	

§6.- On remarquera qu'une traduction homographique de ces signes de notre transcription du système C_1 vers As ne donnerait pas pour résultat le fait que As est une extension conservative de C_1. C'est pourquoi nous tenterons une traduction différente. (A partir de maintenant les signes sont utilisés comme exprimant des foncteurs de As). Nous commençons par des définitions : /pcjdcq/ eq /p&Lq/ ; /pdjdcq/ eq

/L(p+q)/ ;/pcnddcq/ eq /pCLq/. La négation utilisée serait toujours '-'. Sur cette base, nous retranscrivons les axiomes et règles d'inférence du paragraphe antérieur en substituant à 'C' 'cnddc'; à '+', 'djdc'; à '&', 'cjdc'; quant au signe '°', on peut le définir ainsi : /p°/ eq /-(pcjdc-p)/; or il se fait que, dans As, cette définition est équivalente à "N(p&-p)", ce qui à son tour équivaut à "FSp". On peut constater que les biconditionnels suivants sont valides dans As :

pcjdcq=.p.q pdjdcq=.p+q pcnddcq=.pCq

De nombreuses formules qui ne sont pas valides dans C_1 ne le sont pas non plus dans As sous cette traduction. Ainsi le principe de non-contradiction qui n'est pas une thèse de C_1 serait traduit comme "-(pcjdc-p)", qui n'est pas non plus une thèse de As; cette formule équivaut à celles-ci, qui nous sont plus familières : "FSp", "Hp+Fp", "H(p+Np)", lesquelles, bien entendu, non seulement ne sont pas valides dans As mais rendraient As trivial si on les ajoutait comme axiomes. D'autres formules, comme celles que nous avons énuméré au §5, qui ne sont pas des thèses de C_1 auraient des traductions qui ne sont pas non plus des thèses de As. Enfin, la négation forte '-*' du système C_1, qui a toutes les propriétés de la négation classique et que da Costa définit comme "-p&p°" aurait pour traduction, en vertu des équivalences internes de As et des traductions de la conjonction et de la négation, 'F', qui a elle aussi toutes les propriétés de la négation classique.

Malheureusement, le fragment de As qui contient comme constantes logiques les seuls foncteurs 'cjdc', 'djdc', 'cnddc', et '-' (appelons-le Asdc) n'est pas équivalent à C_1, car il y a des formules qui sont des théorèmes de Asdc sans l'être de C_1; p.ex. celles-ci : "FS-p" (i.e. "-(-pcjdc--p)" ; "FS(pcjdcq)"; "FS(pdjdcq)"; "FS(pcnddcq)"; dans la notation de da Costa ces formules seraient : "(-p)°", "(p&q)°", "(pVq)°", et "(p⊃q)°".

Nous n'avons donc pas prouvé que As soit une extension conservative de C_1. Notre conjecture cependant c'est que Asdc équivaut à une extension non conservative de C_1, à savoir celle qu'on obtient en ajoutant aux axiomes de C_1 les quatre formules susmentionnées.

Alves (A:8, pp. 92ss) montre l'existence d'un nombre infini de calculs intermédiaires entre C_0 (i.e. le CSC) et C_1, en ajoutant un de ces postulats à C_1 (ici nous prenons de nouveau le signe 'C' comme simple transcription du crochet employé dans la notation originelle) : "pC--p"; -pC---p", etc. Il prouve (ibid. p. 100) que la première de ces formules équivaut, dans C_1, à celle-ci : "(-p)°Cp°". Eh bien!, si nous retraduisons ces formules selon la fonction de traduction proposée au début de ce même paragraphe, et que nous ajoutons la dernière formule mentionnée (ou son équivalente) aux postulats de Asdc, nous obtenons le CSC, car nous obtenons "p°" (i.e. "FSp") comme théorème.

Relevons que si notre conjecture s'avère fondée et que Asdc équivaut à C_1 + "(-p)°"etc, l'équivalence concernerait seulement la classe des théorèmes de logique prouvables dans les deux systèmes. Il subsisterait une différence entre eux pour ce qui est de leur capacité comme logiques sous-jacentes d'autres théories, puisque Asdc, étant un fragment de As, ne rendrait pas valide la règle du MP pour 'cnddc', sauf précisément pour le cas des théorèmes de logique (autrement il faut soumettre la règle à des restrictions).

Les rapports entre <u>As</u> et C_n (pour n plus grand que 1) sont encore plus difficiles à cerner. Il nous semble que l'étude de ces relations d'englobement est un sujet de tout premier ordre pour des recherches futures.

On passe de C_n à C_{n+1} en affaiblissant les axiomes 12 à 15, comme suit. On introduit deux abréviations $p^{\circ\circ\ldots\circ}$, où le symbole '°' apparaît n fois, s'écrira p^n; $p^{\circ}\&p^2\&\ldots\&p^n$ s'écrira $p^{(n)}$. Chaque système C_{n+1} est engendré à partir de C_n en remplaçant dans les axiomes 12 à 15 le symbole '$(^n)$' par le symbole $(^{n+1})$. Enfin, le calcul C_ω est la limite de tous ces calculs, car il en résulte par retranchement des axiomes 12 à 15. Tous ces systèmes sont non seulement non triviaux mais non contradictoires et simplement consistants. Le plus faible c'est C_ω, pour lequel la loi de Peirce n'est pas valide. Dès lors, il y a une chose qu'on peut dire de chacun des calculs C_n, pour n fini, et qu'on ne peut pas dire de C_ω, à savoir qu'il est une extension conservative du CSC.

Les systèmes C_n possèdent beaucoup de propriétés mathématiques intéressantes; p.ex., tout théorème du calcul sententiel positif intuitionniste est une thèse de chacun des calculs C_n; toutes les règles et tous les schémas valides du calcul positif sententiel classique sont valides dans chacun des systèmes C_i (pour i fini). Arruda, dans A:14, a prouvé des propriétés fort importantes de l'axiomatisation de da Costa : les postulats de la négation sont indépendants; ces calculs sont indécidables par des matrices finies; dans ces calculs , la réduction de négations est impossible. Beaucoup d'autres aspects de ces calculs ont été étudiés synthétiquement par Alves dans A:8. Dans chaque calcul C_n est valide un schéma du type $p_1+p_2+\ldots+p_{n+2}$, tel que pour chaque i et j tels que $i\neq j$, $p_i\&p_j$ est une surcontradiction qui rendrait C_n aporétique, i.e. trivial. Dans <u>As</u>, pour <u>chaque</u> nombre fini n, il y a un rombre infini de tels schémas. Voici, p.ex. une chaîne de tels schémas (on peut en formuler une infinité d'autres) :

$Pp+\underline{\underline{P}}Np \quad \underline{\underline{P}}p+PSp+\underline{\underline{P}}Np \quad \underline{\underline{P}}p+PSp+(\underline{\underline{P}}Np.\underline{\hat{P}}p)+\ddot{P}Np$

$\underline{\underline{P}}p+PSp+(\underline{\underline{P}}Np.\underline{\hat{P}}p)+(\hat{P}p.\ddot{P}Np)+\underline{\ddot{P}}Np$

$\underline{\underline{P}}p+PSp+(\underline{\underline{P}}Np.\underline{\hat{P}}p)+(\hat{P}p.\ddot{P}Np)+(\underline{\ddot{P}}Np.F\underset{\wedge}{P}Np)+\underset{\wedge}{P}Np$

$\underline{\underline{P}}p+PSp+(\underline{\underline{P}}Np.\underline{\hat{P}}p)+(\hat{P}p.\ddot{P}Np)+(\underline{\ddot{P}}Np.F\underset{\wedge}{P}Np)+(\underset{..}{P}p.\underset{\wedge}{P}Np)+.F\underset{..}{P}p.\underset{\wedge}{P}Np$

etc.

Une différence significative entre les systèmes C_n et <u>As</u> est celle-ci: chacun des systèmes C_n peut être transformé dans le CSC par renforcement des axiomes; C_1, p.ex., devient C_0 -c-à-d le CSC- en lui ajoutant "p°". En revanche, <u>As</u>, tout en étant une extension conservative de CSC, ne peut pas être transformé par l'ajout d'axiomes dans le CSC; en fait, si l'on ajoute aux axiomes de <u>As</u> la formule "FSp" (que l'on pourrait considérer comme une traduction de "p°" des systèmes C_n), le résultat est un système trivial, car on pourra démontrer "$FS\frac{1}{2}$", ce qui équivaut à '0'. La raison en est que, si le système C_n -pour chaque n- est paraconsistant, il n'est pas inconsistant, tandis que <u>As</u> est un système contradictoriel, donc simplement inconsistant.

§7.- Le professeur da Costa a développé ensuite une chaîne de logiques quantificationnelles de premier ordre sans égalité (C:40); une chaîne de logiques quantificationnelles de premier ordre avec égalité (C:41); une chaîne de calculs de descriptions (C:42); enfin, une chaîne de théories des ensembles construites à partir de NF (New Foundations, de Quine) (C:43, C:45). Les systèmes de logique sont non contradictoires, mais les théories des ensembles NF_i, lorsque i est plus grand que 0, sont contradictoires; quant à NF_0 c'est simplement NF.

De même que plusieurs théories classiques des ensembles, les calculs NF_i ont dû subir un processus de réélaboration pour en éviter la saturation. Les premières formulations du principe de compréhension (ou de séparation) engendraient des apories. (Notons que le surgissement de telles difficultés ne constitue nullement -soit dit en passant- l'apanage de systèmes qui se veulent simplement inconsistants : des systèmes qui se voulaient surconsistants élaborés par Frege, Church, Quine, Curry et d'autres logiciens parmi les plus éminents se sont avérés triviaux et ont dû être réélaborés). L'histoire de ces réélaborations successives des calculs NF_i -c-à-d des reformulations successives de l'axiome de compréhension pour lesdits calculs- peut être suivie en lisant A:16, C:44, A:10, A:12, A:13, A:15, A:11, A:19, C:27. Nous considérerons ici deux versions, apparemment non triviales, des systèmes NF_i, proposées toutes les deux par Arruda (respectivement dans A:11 et A:19), que nous appellerons 'NsF_i' et 'NpF_i'.

Commençons par NsF_i. L'axiome de séparation est celui-ci (si i est fini) -nous transcrivons- : "EyUx(xy=p/x/)", pourvu que x et y soient des variables différentes, qu'aucune occurrence libre de y ne figure dans p et que p soit une formule normale, c-à-d ou bien une formule stratifiée, ou bien une des formules suivantes : '-(xx)', '-(xx)&(xx)$^{(m)}$', à la condition toutefois que m soit plus petit que i.

Quant aux systèmes NpF_i, l'axiome de séparation se formule pareillement, avec les restrictions que voici : x et y doivent être des variables diverses, y ne doit pas figurer dans p, et p doit être ou bien une formule stratifiée, ou bien telle que : toutes les composantes atomiques de p sont immédiatement précédées d'une ou plusieurs occurrences du symbole '-'. Sauf erreur de notre part, toutes nos considérations ci dessous se rapportent indistinctement aux systèmes NsF_i et NpF_i.

Les différences à signaler entre NF_1 -pour nous limiter à celui-ci- et Am sont les suivantes :

1) Dans Am tout ensemble existe; i.e., pour n'importe quelle formule p, "x̂p" désigne un ensemble existant, et les énoncés suivants sont des théorèmes de Am :
x̂pIIx̂p   E!y(yIIx̂p)
En revanche, dans NF_1 on ne peut pas affirmer que x̂p existe si p n'est pas une formule normale. Les équivalences des deux théorèmes de Am que nous venons de citer ne sont pas des théorèmes de NF_1.
2) Dans Am on peut toujours instancier une thèse universellement valide du type Uxq en substituant dans q à la variable x la formule x̂p. De même, d'une formule q qui contient un abstracteur x̂p on peut toujours tirer la conclusion : Eyq/x̂p/y/. Rien de tout cela n'arrive dans NF_1.

3) Dans NF_1 cette formule est valide -dans notre transcription Ey(yIIx̂p)CUx(xx̂p=p). Cette formule, naturellement, n'est pas valide dans Am (ni même une version affaiblie, où l'occurrence de p serait préfixée d'une occurrence du foncteur 'g').

4) A la différence de NF_1, Am peut admettre (si 'F' est la négation forte des deux systèmes) : xx̂F(xx)IIgF(xx) (et, naturellement, le résultat de remplacer dans cette formule le fonc

teur d'équivalence stricte 'II' par le simple biconditionnel= fort '$\equiv$' est aussi un théorème de Am).

5) Le principe de compréhension de NF_1 est en un sens plus fort et en un autre sens plus faible que celui de Am. Plus fort , en ce que, d'un côté, il s'applique à tout individu (alors que Am exclut l'absolument réel du champ de ce principe) et, d'autre part, il n'introduit aucune atténuation pour ce qui est = des conditions d'appartenance à une classe, (c-à-d pour ce qui est des rapports entre la satisfaction d'une matrice et l'appartenance à la classe correspondante), tandis que Am introduit le foncteur atténuatif 'g'. Plus faible, en ce que la classe des matrices normales -i.e. abstractivement recevables dans notre terminologie à nous- est plus vaste dans Am que dans NF_1. Il faut néanmoins nuancer cette dernière remarque, car, si = d'un côté Am autorise comme abstractivement recevables bien = des matrices que NF_1 ne considère pas normales, pour d'autres matrices, en revanche, c'est le contraire qui se produit. Dans NF_1 la classe russellienne est admise comme ayant une matrice normale, ce qui n'est pas le cas pour Am. Il faut pourtant relever que, contrairement à ce qui arrive pour NF_1, des classes caractérisées par des matrices non normales (non abstractivement recevables) peuvent, dans Am, faire l'objet d'une série d'affirmations concernant les conditions d'appartenance d'un= élément quelconque auxdites classes; c'est ce qui se passe = pour la classe russellienne (cf. les théorèmes A2240ss dans= l'Annexe N° 2 du Livre I de cette étude); certains de ces théorèmes de Am concernant la classe russellienne ressemblent de= très près à des théorèmes de NF_1. Mais NF_1 contient des théorèmes sur la classe russellienne auxquels rien ne correspond= dans Am, si ce n'est des théorèmes à propos de classes néo-russelliennes ou para-russelliennes, telle neor, qui n'existent= pas pour NF_1.

6) Une autre formule valide dans NF_1 et non valide dans Am est: $Ux(x\bar{y}\equiv N(xy))$.

7) Dans Am on peut affirmer les conditions d'appartenance à de nombreuses classes à matrice non stratifiée où aucun foncteur de négation ne figure; p.ex. les deux formules suivantes sont des théorèmes de Am : $Ux(Hx+.x\hat{x}(BPx\&xx)II.gBLPx.xx)$; $Ux(Hx+.x\hat{x}(BYx\&xx)\overline{II}.gBLYx.\bar{x}x)$. Rien de tel ne semble être le cas dans NF_1.

8) Enfin -et ceci résume peut-être toute la différence- cette autre formule, valide dans NF_1, ne l'est pas dans Am : $Ey(y(yII\hat{x}p)\equiv E!yUx(xy\equiv p)$.

Si l'on peut dire, grosso modo, que NF_i est une famille de systèmes plus proches des théories des ensembles classiques que ne l'est Am, il faut cependant relever l'existence d'une théorie fortement "hétérodoxe" proposée par Arruda, à savoir NSF_i+P6, P6 étant le postulat suivant (cf. A:11,p.24): $Ex,y(x\neq y\&x=ix\&y=iy\&Ux(x=ixC(xx)^{(n)})$. Le sens de ce postulat c'est qu'il y a au moins deux individus (au sens quinéen du mot, un individu étant une chose identique au singleton qui le contient comme seul membre) et que tout individu est absolument et sans restriction membre de soi-même.

Cela dit, il faut mettre en relief que, en dépit de toutes leurs divergences, NF_1 et Am sont des systèmes étroitement apparentés quant à leur inspiration, et qui possèdent = beaucoup de propriétés en commun. Ils sont tous les deux des systèmes contradictoriels. Ils reconnaissent tous les deux , p.ex., l'existence de la classe de toutes les classes qui ne s'appartiennent pas à elles-mêmes (encore que cela ne soit pas propre aux théories des ensembles contradictoires, car un système classique comme ML de Quine reconnaît lui aussi l'existence de ladite classe). A cause de leur envergure, les recherches métamathématiques approfondies que, sur les systèmes C_i et NF_i ont été effectuées, dépassent de beaucoup le cadre de ce que nous pouvons exposer dans ce chapitre. Mais, vu la parenté entre ces systèmes et celui que nous proposons dans cette étude, une ultérieure recherche comparative plus poussée nous semble indispensable.

§8.- Parmi les nombreux travaux consacrés à une élucidation métamathématique des systèmes C_i et NF_i citons : A:10, A:17, C:25, R:8, L:19, C:26, S:7, A:12, A:13, A:14, A:15, F:5, A:16. Da Costa et Alves (C:28, C:29; cf. aussi A:8, pp. 53ss) proposent notamment une sémantique <u>quasi</u>-vérifonctionnelle, avec des quasi-matrices aléthiques, et un procédé de décision; ils prouvent, de ce chef, la non-trivialité des systèmes C_i et, par surcroît, leur décidabilité. Un autre aspect très fécond de leur étude c'est la possibilité de construire des calculs modaux C_iT, C_iS4, C_iB, C_iS5, respectivement similaires aux calculs modaux bien connus T, S4, B et S5, fondés sur le CSC. Les auteurs mettent en lumière la possibilité d'adapter à ces calculs la technique des modèles de Kripke.

L'algébrisation de ces systèmes a été abordée de deux manières. La première, par da Costa lui-même, dans C:46, C:47 et C:26 (ce dernier travail écrit en collaboration avec Sette, qui a consacré plus tard un autre travail à la question, S:7). Une approche différente est celle de Fidel (F:5). A notre connaissance, l'étude comparative des deux approches est encore à effectuer. Il sera intéressant, à l'avenir, lorsqu'une approche algébrique de A_q aura été présentée -ce que nous comptons faire dans une étude ultérieure- d'examiner comparativement ces diverses algèbres.

§9.- Un autre système de logique sententielle étroitement apparenté aux systèmes C_n de da Costa est le système DL proposé par da Costa et R.G. Wolf dans C:30. Ce système vise à capturer la conception hégélo-marxienne de l'unité des opposés. Nous ne pouvons pas entrer, dans le cadre de ce Livre, dans les considérations philosophiques contenues dans ce travail et qui motivent l'élaboration dudit système de logique. (Indiquons seulement, en passant, qu'il est tout spécialement séduisant -pour nous, tout au moins- tout ce qui s'y rapporte au lien entre continuité et contradictorialité; d'une manière générale, C:30 est un des travaux philosophiques récents les plus stimulants).

Un trait caractéristique de DL, à la différence du système C_1, c'est l'axiome A16 : "$A^{\circ\circ}=A^{\circ}$". Aussi "$A^{\circ\circ}$" n'est-ce pas un théorème de DL, tandis que c'est bien un théorème de C_1. En fait, A16 n'est un théorème d'aucun des systèmes C_i. Par ailleurs, dans DL le principe de tiers exclu n'est pas un théorème, tandis qu'il est valide dans chacun des systèmes C_i. La motivation de la non-validité du principe de tiers exclu dans DL est celle-ci : la logique dialectique DL doit couvrir tous les cas, aussi bien les situations de stabilité que celles où il y a une transition, un passage, celles qui sont aux confins du oui et du non; le principe de tiers exclu s'appliquerait aux premières, non pas aux dernières. (Une approche divergente de cette question est celle que nous proposons dans cette étude : le principe de tiers exclu est toujours valide, la différence entre les situations floues et les non floues -une situation transitoire étant simplement un cas particulier de situation floue- étant marquée par le fait que dans les dernières le principe est tout à fait vrai, ce qui n'est point le cas dans les premières; autrement dit : p est une situation nullement floue ssi 'H(p+Np)' est vrai).

Notons que DL est un système simplement consistant, encore qu'il soit paraconsistant. DL contient, tout comme les systèmes C_i, la logique classique, y compris donc les principes de non-contradiction et de tiers exclu pour la négation forte.

Enfin, DL est pourvu d'une sémantique appropriée. Le système est non trivial et complet. Du point de vue sémantique, la différence entre DL et les systèmes C_i c'est que, dans la sémantique qui capture DL, p et "-p" peuvent être tous les deux faux, ce qui n'est pas possible dans la sémantique des systèmes C_i. La négation, dans les systèmes C_i, n'est pas fonctionnelle, mais elle est tout au moins quasi-fonctionnelle; dans DL elle n'est même pas quasi-fonctionnelle. (La différence est ainsi plus frappante vis-à-vis du système A, où la négation est strictement fonctionnelle).

§10.- Une autre hiérarchie fort intéressante de calculs sententiels paraconsistants a été proposée par Ayda Arruda (A:28 A:29, A:30). Ces calculs permettent la construction de théories anaporétiques des ensembles possédant un schéma de compréhension non assujetti à des restrictions, à l'inverse de ce qui arrive pour les systèmes NF_i -pour i fini- (et aussi pour Am). Pour y parvenir on sacrifie un certain nombre de thèses; en effet : ces systèmes sont des calculs relevants, où les formules suivantes -en notre transcription- ne sont pas des théorèmes :

pC.qCp — pC.qC.pCq — pC.qC.p&q
pCqC.pC(qCr)C.pCr — pCqC.qCrC.pCr — pC(qCr)C.p&qCr
p&qCrC.pC.qCr — pCqC.p&rC.q&r — pCqC.p+rC.q+r

Ces calculs ne sont pas finiment trivialisables (c-à-d que l'ajout d'un nombre fini de postulats ne peut pas les rendre saturés). Dans A:31, Arruda a construit une hiérarchie de calculs de prédicats sur la base de ces calculs sententiels. Ces calculs ne sont pas généralement prénexables (nous savons que des restrictions de prénexation existent aussi dans Aq au regard du foncteur implicatif 'D' -il n'y en a pas, en revanche, au regard du simple conditionnel fort 'C'-; dans les calculs de prédicats construits sur la base des systèmes C_i, les mêmes restrictionsque Aq connaît pour le foncteur implicatif existent pour le seul foncteur conditionnel de ces systèmes; et dans la hiérarchie de calculs de prédicats d'Arruda que nous sommes en train de commenter dans ce paragraphe on retrouve une fois encore ces mêmes restrictions). En outre, les correspondances habituelles entre les quantificateurs universel et existentiel -valides dans Aq, mais non valides dans les calculs de prédicats construits sur la base des systèmes C_i- ne sont pas valides dans ces calculs.

Dans A:32, Arruda a parachevé cette construction de calculs par l'élaboration d'algèbres de classes simplement inconsistantes et non triviales. Il est intéressant de relever que -comme le signale Arruda, A:32, p. 678- 'le paradoxe de Curry-Moh Shaw-Kwei, dans sa formulation usuelle, n'est pas dérivable' dans ces calculs, 'parce que dans leurs logiques sous-jacentes ne sont pas valables les règles et les lois d'absorption au sens de Moh Shaw-Kwei'. Dans chacune de ces algèbres de classes il y a deux classes universelles et deux clas ses vides; il y a aussi deux opérations différentes de complémentation. Pour l'une d'elles est valide un théorème affirmant que l'union d'une classe et de son complément est la classe universelle au sens fort (cela n'est pas valide pour Am, sauf si l'on définit une opération de complémentation comme suit : /compy/ eq /$\hat{x}$-(xy)/).

Toutes les lois d'une algèbre de Boole sont valides pour cette algèbre de classes construite par Arruda. Pour obtenir ces résultats, Arruda applique un procédé fort ingénieux (qu'elle a utilisé aussi en construisant des versions renforcées de NF_{ω}) consistant à définir une opération de complémentation forte et des classes fortement universelle et fortement vide à l'aide seulement de quantificateurs et de foncteurs de conjonction et disjonction, sans avoir recours à la négation. L'affaiblissement donc des propriétés de la négation dans la logique sous-jacente ne porte pas atteinte à la puissance des algèbres de classes ainsi construites. On sacrifie certes certains théorèmes habituels, comme celui qui veut qu'une chose appartienne au complément (fort) d'un ensemble ssi elle n'appartient pas audit ensemble.

§11.- En vue de capturer les intuitions logiques de Vasil'ev au début du siècle, Arruda a proposé dans A:18 trois autres systèmes de logique, V1, V2 et V3; V2 est non seulement paraconsistant mais positivement (simplement) inconsistant. V1 est le résultat d'ajouter à C_{ω} un théorème en vertu duquel, pour toute formule hormis un certain nombre de constantes sententielles, la logique classique est intégralement valide (i.e. pour tout p qui ne soit pas une de ces constantes, "pC.-pCq" est un axiome). (Plus exactement : l'axiomatique proposée par Arruda pour V1 élimine un des axiomes de C_{ω}, à savoir la loi converse de la double négation; mais cette thèse est récupérée comme théorème, en vertu de l'axiome ajouté). Toute extension de V1 qui contienne une affirmation d'une formule non atomique et sa négation est triviale. Un certain nombre de formules qui ne sont pas des théorèmes des systèmes C_i sont des théorèmes de V1, p.ex. (en transcription) celles-ci : -pC---p; -(p+q)C.-p&-q. Si l'on retranche du vocabulaire de V1 les constantes sententielles susmentionnées, V1 devient exactement le calcul sententiel classique (CSC), dont il est une extension conservative. Il faut relever l'étroite similitude entre V1 et Asdc, le fragment de As dont nous avons parlé plus haut. Tout comme pour V1, il est vrai pour Asdc que toute extension de ce système qui contienne une inconsistance simple affectant une formule non atomique est une théorie triviale (ou, dans le cas de Asdc, tout au moins quasi-triviale). En fait, Asdc devient V1 si l'on lui ajoute le postulat que voici : si p est une formule atomique n'appartenant pas à une classe donnée V de formules atomiques de Vasil'ev, alors ceci est un axiome : pcnddc.-pcnddcq; en même temps, pour que cette extension de Asdc devienne identique à V1 il faudra renforcer la règle du MP, de façon à éliminer les restrictions que cette règle connaît dans As.

V2 est le résultat d'ajouter à V1 un schéma axiomatique indiquant que, pour chaque constante sententielle de Vasil'ev p, "p&-p" est un axiome. Enfin, V3 est un calcul trivalent, pourvu d'une conjonction non classique et d'une négation non classique, outre les foncteurs logiques classiques. Pour la négation non classique la loi de tiers exclu n'est pas valide; mais une loi de quatrième exclu est valide. Pour cette négation-là la loi de non-contradiction ne peut même pas être formulée, en vertu des règles de formation de V3.

§12.- Signalons enfin qu'une autre hiérarchie de calculs sententiels -apparentés à ceux élaborés par Arruda dans A:28, A:29 et A:30- a été proposée par Arruda et da Costa dans A:33 : il s'agit d'une chaîne de cinq calculs sententiels, qui servent de base à la construction de théories des ensembles ZF_n ayant les mêmes postulats que ZF mais sans les restrictions ad hoc du schéma de compréhension qui visaient à prévenir des apories logiques. Les calculs conservent le théorème de la déduction, mais sacrifient le MP. Il s'agit de systèmes de déduction, non pas de systèmes de formules. Les systèmes ZF_n ainsi construits (pour n=1,2,3 et 4) ne sont pas triviaux, le MP n'y est pas admissible; ce sont des systèmes simplement inconsistants.

Pour conclure notre survol des systèmes élaborés par da Costa et ses collaborateurs, il faut dire que ces systèmes -hormis deux de ceux qui viennent d'être cités dans le paragraphe précédent- ne contiennent pas la loi de non-contradiction, ni non plus les lois qui permettent d'obtenir le principe de non contradiction à partir de celui de tiers exclu; ces systèmes ne contiennent, pour la négation faible, aucun théorème de contraposition (ces systèmes contiennent un seul foncteur conditionnel). Tous ces traits ont été signalés par Routley (R:22) et ils constituent des points où notre approche diffère de la leur. La discussion philosophique des motivations intuitives des deux approches déborde le cadre de ce Livre.

§13.- Une inspiration fort diverse semble motiver un autre système, proposé aussi par da Costa : le système J3, qu'il présente dans D:19, écrit en collaboration avec Mme Itala D'Ottaviano. Ce système est, parmi les systèmes de logique paraconsistants élaborés jusqu'ici, celui dont se rapproche le plus As. Ce système possède une matrice caractéristique trivalente. A la différence des autres systèmes de da Costa, dans J3 le principe de non-contradiction est valide. La différence entre J3 et $Ł_3$ (le calcul trivalent de Lukasiewicz) c'est que dans J3 il y a deux valeurs désignées, tandis que dans $Ł_3$ il y a une seule valeur désignée. Le système As est une extension conservative de J3. Notons que D:19 contient une extension quantificationnelle avec égalité de J3.

§14.- Une généralisation des résultats exposés dans D:19 que nous venons d'évoquer au §13 a été effectuée par Kotas et da Costa dans K:20. Les auteurs y considèrent des logiques généralisées de Lukasiewicz, c-à-d des ensembles de valeurs de vérité prises dans l'intervalle $[0,1]$, où les valeurs désignées constituent un sous-ensemble des valeurs appartenant à l'intervalle $]0,1]$. En outre, on ajoute un foncteur (nous transcrivons : Ja) qui envoie sur 1 toute valeur égale ou plus grande qu'un certain nombre a dans ledit intervalle; notons que a peut être plus petit que n'importe quelle valeur désignée. On introduit ensuite une implication discursive (nous transcrivons toujours) : /pdisc(a)impq/ eq /Ja(p)impq/, si 'imp' est l'implication lukasiewiczienne. Les auteurs montrent les propriétés déductives fort intéressantes de ces systèmes et signalent (K:20, p. 5) que, si a est plus petit que n'importe quelle valeur désignée, alors les formules implicatives correspondant à certaines règles d'inférence ne sont pas valides dans un tel système (c-à-d que le théorème de la déduction cesse d'y être généralement valide). En général, si a est inférieur à l'élément infime (i.e. la plus grande borne inférieure) sur l'ensemble des valeurs désignées, alors 'disc(a)imp' n'est pas fortement réflexif (autrement dit : "pdisc(a)impp" n'est pas valide).

Ce qui, à notre avis, amenuise l'intérêt des matrices où a n'est pas désigné c'est que, si l'on définit un foncteur $ comme suit : /p$q/ ssi /pdisc(a)impq/ et /qdisc(a)impp/ alors, à moins que a ne soit désigné, la relation exprimée par '$' n'est pas une relation d'équivalence. Les auteurs concentrent leur attention surtout sur des systèmes où a n'est pas inférieure à la plus grande borne inférieure sur l'ensemble des valeurs désignées.

La partie positive de ces calculs (sans le foncteur 'Ja') coïncide avec le calcul sentential positif classique. Et cependant ceux parmi ces calculs dans lesquels a est plus petit que $\frac{1}{2}$ sont paraconsistants, car ils permettent des extensions contradictorielles non saturées. Chacun de ces calculs constitue donc -comme le disent les auteurs- une solution du problème de Jaskowski.

Jusqu'ici l'exposé de certains des résultats contenus dans K:20. Venons-en à cette question : quel est le rapport entre ces calculs et le système As? Dans As il n'y a rien qui corresponde au conditionnel łukasiewiczien de $Ł_{aleph0}$ En revanche, dans As on peut définir chaque conditionnel łukasiewiczien d'un système $Ł_n$ quelconque, pour n fini. (Vid. l'Annexe N° 1 de ce Livre à propos de ce théorème; pour être plus exacts quant au rapport entre le système infinivalent de Łukasiewicz et As, il vaudrait mieux de dire que nous n'avons aucune preuve que le premier soit C-englobé dans le second; cf. ladite Annexe pour cette notion). As est une extension conservative de chaque logique finivalente. Par conséquent, As est une extension conservative de chacun des systèmes étudiés conjointement par da Costa et Kotas, lorsque ces systèmes possèdent un nombre fini quelconque de valeurs de vérité.

§15.- Des systèmes de logique inconsistante ont été proposés par le professeur Routley et ses collaborateurs (cf. R:7, R:21, R:22). Ces systèmes sont relevants. Ils contiennent des constantes sententielles pour lesquelles des antinomies sont valides. Dès lors, ces systèmes assertent carrément l'existence de contradictions in rebus. Routley a proposé une sémantique détaillée de mondes possibles pour ces systèmes et il en a prouvé par là la non-trivialité et la complétude.

A la différence des systèmes de da Costa (hormis ceux qui ont été mentionnés dans les deux paragraphes précédents), ces systèmes-ci possèdent les traits suivants :

1) Ils sont relevants; aucune variante de "pC.qCp" n'y est valide (si ce n'est pour un foncteur pseudo-conditionnel auquel n'est conférée ni la qualité ni la règle du MP, et qui correspond au foncteur 'Z' de As);

2) Ils admettent le principe de contradiction, la loi de la double négation et les lois de De Morgan;

3) Ils admettent la loi de contraposition (comme règle sinon comme thèse).

Notre approche coïncide avec celle de Routley pour ce qui est des points (2) et (3). Elle en diffère fondamentalement à cause du point (1). Les arguments présentés par R. Routley, V. Routley et R.K. Meyer en faveur d'un conditionnel relevant sont certainement dignes de la considération la plus attentive. Ils nous ont amené à renoncer à 'si...alors' comme lecture appropriée de 'C' (si ce n'est dans certains con textes où nous interprétons le 'si...alors' en un rôle suffisamment neutre, comme simple variant stylistique de 'seulement si'). Nous avons séparé les destinées de 'si...alors' et de 'seulement si'. Mais, à notre avis, le monème discontinu 'si ...alors' ne peut être adéquatement formalisé que par la voie d'un conditionnel subjonctif (peut-être comme celui que nous proposons dans le Livre III de cette étude dans le cadre d'une extension modale de Am -cf. l'Annexe N° 4 du Livre III, où la dite extension, An, est exposée). Quoi qu'il en soit, l'existence d'un certain foncteur conditionnel pourvu de la propriété du MP et pour lequel "pC.qCp" est une thèse valide nous semble indispensable, intuitivement juste et trop profondément enracinée dans la pensée mathématique et la pratique de la démonstration pour que l'on puisse s'en passer, à moins que des raisons plus graves n'en imposent l'abandon. Or ni la présence des apories (qui peuvent être évitées par d'autres procédés, comme nous essayerons de le montrer dans ce Livre, encore que -il faut l'avouer- nos procédés soient moins élégants et -en un sens tout au moins- moins captivants à première vue que ceux de Routley) ni la non-intuitivité de ladite formule pour le monème 'si...alors' à la place de 'C' ne nous paraissent constituer des motifs suffisants pour consentir au sacrifice douloureux que supposerait l'abandon de ce principe et de l'existence d'un tel foncteur.

Cependant, une partie de nos objections s'avérerait vulnérable si l'on parvenait à prouver que DK contient l'arithmétique élémentaire. Le professeur Routley a émis la conjecture comme quoi DK contient effectivement l'arithmétique, et les théorèmes de limitation de Tarski, Gödel, Church et d'autres ne s'appliquent pas à DK. Si l'on parvenait à prouver ces résultats, les avantages de DK sur d'autres systèmes alternatifs de logique inconsistante, à certains points de vue, seraient incontestables. Les seules objections que nous maintiendrions alos seraient d'ordre philosophique, de par l'orientation extensionaliste de notre approche (cf. le Livre III de cette étude). Dans l'état actuel de la recherche en logique paraconsistante, la poursuite simultanée de ces diverses tentatives partiellement rencontrées est on ne peut plus souhaitable.

§16.- Il faut souligner que, à notre connaissance, aucune logique élaborée jusqu'ici n'est contradictoire sur le plan du calcul sententiel ou 0-adique, hormis les systèmes V2 de Arruda (cf. §11, ci-dessus), DM et DL de Routley et Meyer et DK de Routley (que nous venons de considérer au §15). Tous les autres systèmes dont nous avons parlé dans ce chapitre sont bien paraconsistants, mais non pas simplement inconsistants (sauf sur le plan de la théorie des ensembles). Qui plus est: même les systèmes V2, DM, DL et DK sont contradictoires seulement parce qu'ils contiennent certaines constantes sententielles, pour lesquelles ils postulent une formule antinomique. Par conséquent, As est -sauf erreur de notre part- le premier système contradictoire de logique sententielle qui contienne des contradictions dans lesquelles ne figure aucune constante sententielle, mais seulement des variables et des foncteurs; p.ex. : "pIp" et "N(pIp)", de même que l'antinomie : "pIp.N(pIp)", et la négation de cette antinomie (en vertu de la présence dans As du principe de non-contradiction).

Notre approche semble donc marquer un bouleversement complet, puisque c'est dès le seuil même de la logique que nous postulons la contradictorialité nécessaire -non pas simplement possible ou concevable- du réel. Ceci heurtera ceux qui veulent d'une logique neutre, sans doute; ces critiques devront attendre la réponse, que nous formulerons dans la Section I du Livre III.

Une autre différence entre notre approche et toutes les autres approches dont nous avons parlé dans ce chapitre réside dans le fait que -excepté peut-être les systèmes dont il a été question aux §§ 13 et 14- les autres systèmes ne formalisent pas la notion de degrés multiples de vérité et ne contiennent pas des foncteurs servant à exprimer les nuances de l'assertion (tels que 'plutôt', 'assez', 'très', 'foncièrement' etc.). Au contraire, la multiplicité infinie des degrés de vérité est un principe capital de notre approche. Etroitement liée à cette question est une possible différence de conception philosophique du contradictoire : dans notre approche infiniment multivalente une proposition vraie est d'autant plus contradictoire qu'elle est moins vraie (elle est d'autant moins vraie que sa négation l'est davantage), tandis que, apparemment, cette conception de la minus-vérité du contradictoire est étrangère aux approches bivalentes (bien que non-classiques, parce que non strictement vérifonctionnelles) de da Costa et Routley.

Chapitre 3.- PREUVE DE LA NON-TRIVIALITE DE Aq

Dans ce chapitre nous définissons la validité pour Aq; cette définition plus la présentation d'un modèle relativement auquel la validité est définie prouve que Aq est non trivial. Mais, bien entendu, ceci ne prouve point que Aq soit complet, c-à-d que toutes les formules sémantiquement valides de Aq en soient aussi syntaxiquement valides (en soient des théorèmes).

Le modèle construit dans ce chapitre est constitué par des tenseurs aléthiques constitués à leur tour par des nombres aléthiques. Ces notions sont expliquées ci-dessous.

§1.- NOMBRES ALETHIQUES.- L'ensemble des nombres aléthiques est engendré par l'intervalle fermé des nombres réels $[0,1]$ par les opérateurs monadiques m et n définis par les postulats que voici :

Un nombre réel dans l'intervalle $[0,1]$ est un nombre aléthique.

Si u est un nombre réel dans l'intervalle $[0,1[$, mu est un nombre aléthique, et $mu \neq u$

Si u est un nombre réel dans l'intervalle $]0,1]$, nu est un nombre aléthique et $nu \neq u$

mmu=mu

nnu=nu

Si $u \neq 0$, alors nmu=nu | si $u \neq 1$, alors mnu=mu

n0=0

m1=1

nm0=m0 | mn1=n1

Nous définissons maintenant une relation d'ordre linéaire entre les nombres aléthiques : cat(u,u'), à l'aide des postulats suivants :

cat(nu,u)   cat(u,mu)   cat(u,u)

cat(u,u') (si u et u' sont des réels et que u est plus petit ou égal à u')

cat(mu,u') (si u et u' sont des réels et que u est plus petit que u')

cat(u,u') et cat(u',u") seulement si cat(u,u")

cat(u,u') et cat(u',u) seulement si u=u'

ou bien cat(u,u') ou bien cat(u',nu) ou bien u=mu'

Nous introduisons maintenant deux opérations monadiques et trois opérations dyadiques sur l'ensemble des nombres aléthiques, comme suit :

inv(u) =
- 1-u , si u est un nombre réel
- n(inv(u')), si u' est un réel tel que mu'=u
- m(inv(u')), si u' est un réel tel que nu'=u

nih(u) =
- 0, si u≠0
- 1, si u=0

maxim(u,u') =
- u, si cat(u',u)
- u' autrement

minim(u,u') =
- u, si cat(u,u')
- u' autrement

prod(u,u')=
- le produit multiplicatif de u et u' si u et u' sont des réels
- 0, si soit u=0, soit u'=0
- m0 si l'un des deux nombres u et u' est égal à m0 et l'autre est différent de 0
- u', si u=1
- u, si u'=1
- nu', si u=n1
- nu, si u'=n1
- n(prod(u",u"')), si u" et u"' sont des nombres réels différents de 0 et tels qu'une de ces situations-ci est vraie :
  - (a) u"=u et nu"'=u'
  - (b) nu"=u et nu"'=u'
  - (c) nu"=u et u"'=u'
  - (d) mu"=u et nu"'=u'
  - (e) nu"=u et mu"'=u'
- m(prod(u",u"')), si u" et u"' sont des réels différents de 0 et de 1 et tels qu'une de ces situations-ci est vraie :
  - (a) mu"=u et u"'=u'
  - (b) u"=u et mu"'=u'
  - (c) mu"=u et mu"'=u'

On établit aisément cette loi : pour chaque nombre aléthique u il y a un, et un seul, nombre réel u' tel que, soit u=u', soit u=nu', soit enfin u=mu'.

Si U est un ensemble quelconque de nombres aléthiques (i.e. un sous-ensemble quelconque de l'ensemble des nombres aléthiques), alors <u>inf</u>(U) (i.e.g.l.b.(U)) et <u>sup</u>(U) (i.e. l.u.b.(U)) sont définis et uniques.

Voici maintenant deux définitions qui seront utiles par la suite. Un nombre aléthique est nul ssi il est égal à 0; autrement il est non nul. Un nombre aléthique est plein ssi il est égal à 1; autrement il est non plein.

§2.- Nous définissons maintenant un tenseur aléthique comme suit :
Un <u>tenseur aléthique</u> W est une suite infinie de nombres aléthiques qui constituent ses <u>items</u>.

Sur l'ensemble des tenseurs aléthiques nous introduisons les opérations suivantes (W_i indiquant le i^e item de W) :

$(m(W))_i = m(W_i)$ $(n(W))_i = n(W_i)$ $(\underline{nih}(W))_i = \underline{nih}(W_i)$

$(\underline{inv}(W))_i = \underline{inv}(W_i)$ $(\underline{maxim}(W,W'))_i = \text{maxim}(W_i,W'_i)$

$(\underline{minim}(W,W'))_i = \underline{minim}(W_i,W'_i)$ $(\underline{prod}(W,W'))_i = \underline{prod}(W_i,W'_i)$

$(\underline{omn}(W))_i =$
- W_i, si ou bien W ne contient qu'un nombre fini d'items nuls, ou bien W ne contient qu'un nombre fini d'items non nuls
- autrement:
  - W_i, si W_i est antérieur à chaque item nul de W
  - 0 autrement

Nous introduisons aussi une relation de quasi-ordre sur l'ensemble des tenseurs aléthiques :

<u>pres</u>(W,W') ssi il y a tout au plus un nombre fini d'items i pour lesquels il ne soit pas vrai que $\underline{cat}(W_i,W'_i)$

L'opération <u>pres</u> n'est pas un ordre, car elle n'est pas antisymétrique. Grâce à <u>pres</u>, nous définissons maintenant la relation d'équivalence <u>qcong</u>, comme suit :

<u>qcong</u>(W,W') ssi <u>pres</u>(W,W') et <u>pres</u>(W',W)

La relation <u>qcong</u> est une congruence sur l'ensemble des tenseurs lorsque les seules opérations sur cet ensemble sont celles que nous avons définies jusqu'ici, enrichies de <u>mut</u>, que nous introduisons tout de suite :

<u>mut</u>(W,W') ssi ou bien ni W ni W' ne contiennent un nombre infini d'items nuls, ou bien ni W ni W' ne contiennent un nombre infini d'items non nuls.

Nous introduisons enfin une autre opération monadique sur les tenseurs, en vertu de laquelle <u>qcong</u> cesse d'être une congruence : l'opération <u>belt</u> :

<u>belt</u>(W) =
- W, si W ne contient aucun item nul
- (0,0,0,0...) autrement

Nous introduisons en outre une relation d'ordre non linéaire entre les tenseurs aléthiques : <u>mag</u> :

mag(W,W') ssi pour tout i $\underline{cat}(W_i,W'_i)$

Il appert que W=W' ssi <u>mag</u>(W,W') et <u>mag</u>(W',W).

Il faut à présent introduire quelque terminologie. Un tenseur aléthique est <u>désigné</u> ssi il contient tout au plus un nombre fini d'items nuls. Un tenseur aléthique est <u>antidésigné</u> ssi il contient tout au plus un nombre fini d'items pleins. Un tenseur aléthique est <u>surdésigné</u> ssi il ne contient aucun item nul. Un tenseur aléthique est <u>surantidésigné</u> ssi il ne contient aucun item plein.

§3.- EVALUATIONS DE Aq.- Une évalutation $\underline{v}$ est une fonction qui prend comme arguments des formules de $\underline{Aq}$ et comme valeurs des tenseurs aléthiques et qui se conforme aux règles suivantes ($\underline{v}(p)$ étant la valeur sur laquelle l'évaluation $\underline{v}$ envoie l'argument représenté par la lettre 'p') :

$\underline{v}(p.q) = \underline{minim}(\underline{v}(p),\underline{v}(q))$

$\underline{v}(p+q) = \underline{maxim}(\underline{v}(p),\underline{v}(q))$

$\underline{v}(p\hat{\ }q) = \underline{prod}(\underline{v}(p),\underline{v}(q))$

$\underline{v}(Np) = \underline{inv}(\underline{v}(p))$

$\underline{v}(Fp) = \underline{nih}(\underline{v}(p))$

$\underline{v}(\text{à}) = (m0,m0,m0,m0\ldots)$

$$(\underline{v}(pIq))_i = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ si } (\underline{v}(p))_i=(\underline{v}(q))_i \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

$\underline{v}(Bp) = \underline{omn}(\underline{v}(p))$ $\qquad$ $\underline{v}(Tp) = \underline{belt}(\underline{v}(p))$

Pour chaque variable individuelle x (ou y, ou z, etc.), $\underline{v}(x)$ est un tenseur désigné. Pour chaque couple de variables individuelles (x,y), $\underline{v}(xy)$ est un tenseur désigné.

Si $\underline{v}$ est une évaluation, alors $\underline{v'}$ est une x-variante de $\underline{v}$ ssi pour chaque formule p qui ne contient pas x , $\underline{v'}(p)=\underline{v}(p)$.

Maintenant nous pouvons énoncer la condition que toute évaluation doit satisfaire pour les quantificateurs :

$$(\underline{v}(Uxp))_i = \underline{inf\hat{u}}(\text{pour quelque } \underline{v'} \text{ qui soit une x-variante de } \underline{v},\ (\underline{v'}(p))_i=u)$$

On établira facilement après ce qui précède -en vertu des définitions de $\underline{As}$ et $\underline{Aq}$- que toute évaluation $\underline{v}$ de $\underline{Aq}$ s'en tient aussi aux règles suivantes :

$$(v(Exp))_i = \underline{sup\hat{u}}(\text{pour quelque } \underline{v'} \text{ qui soit une x-variante de } \underline{v},\ (\underline{v'}(p))_i=u)$$

$$(\underline{v}(Pp))_i = \begin{cases} (\underline{v}(p))_i, \text{ si } \underline{cat}(\frac{1}{2},(\underline{v}(p))_i) \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(\underline{\underline{P}}p))_i = \begin{cases} (\underline{v}(p))_i, \text{ si } \underline{cat}(m\frac{1}{2},(\underline{v}(p))_i) \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(\underset{\wedge}{P}p))_i = \begin{cases} (\underline{v}(p))_i \text{ si } \underline{cat}(0{,}75,(\underline{v}(p))_i) \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(bp))_i = \begin{cases} (\underline{v}(p))_i \text{ si } \underline{cat}(n1,(\underline{v}(p))_i \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(fp))_i = \begin{cases} (\underline{v}(p))_i, \text{ si } \underline{cat}(m0,(\underline{v}(p))_i) \text{ et } m0\neq(\underline{v}(p))_i \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(Yp))_i = \begin{cases} m0, \text{ si } (v(p))_i=m0 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(jp))_i = \begin{cases} 0, \text{ si } (\underline{v}(p))_i=0 \\ m0, \text{ si } (\underline{v}(p))_i\neq 0 \text{ et } (\underline{v}(p))_i\neq m0 \\ n1, \text{ si } (\underline{v}(p))_i=m0 \end{cases}$$

$$(\underline{v}(Hp))_i = \begin{cases} 1, \text{ si } (\underline{v}(p))_i = 1 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \qquad (\underline{v}(Lp))_i = \begin{cases} 1 \text{ si } (\underline{v}(p))_i\neq 0 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(hp))_i = \begin{cases} n1 \text{ si } (\underline{v}(p))_i=1 \\ (\underline{v}(p))_i \text{ autrement} \end{cases} \qquad (\underline{v}(gp))_i = \begin{cases} m0 \text{ si } (\underline{v}(p))_i=0 \\ (\underline{v}(p))_i \text{ autrement} \end{cases}$$

$$\underline{v}(Jp) = \underline{nih}(\underline{omn}(\underline{nih}(p)))$$

$$(\underline{v}(Xp))_i = \begin{cases} (\underline{v}(p))_i^{\,2} \text{ si } (\underline{v}(p))_i \text{ est un nombre réel} \\ n(u^2), \text{ si u est un réel tel que } nu=(\underline{v}(p))_i \\ m(u^2), \text{ si u est un réel tel que } mu=(\underline{v}(p))_i \end{cases}$$

$$(\underline{v}(pDq))_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } \underline{cat}((\underline{v}(p))_i,(\underline{v}(q))_i) \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \qquad (\underline{v}(pCq))_i = \begin{cases} 1 \text{ si } (\underline{v}(p))_i=0 \\ (\underline{v}(q))_i \text{ autrement} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(p\underline{=}q))_i = \begin{cases} \underline{minim}((\underline{v}(p))_i,(\underline{v}(q))_i) \text{ si soit } (\underline{v}(p))_i=(\underline{v}(q))_i=0, \text{ soit } (\underline{v}(p))_i\neq 0 \text{ et } (\underline{v}(q))_i\neq 0 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(pGq))_i = \begin{cases} (\underline{v}(pCq))_i \text{ s'il n'y a qu'un nombre fini d'index } j= \text{ que } (\underline{v}(pCq))_j=0 \\ \text{autrement} \begin{cases} (\underline{v}(pCq))_i \text{ si } (\underline{v}(pCq))_i \text{ est antérieur à chaque item nul de } \underline{v}(pCq) \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(pDDq))_i = \begin{cases} (\underline{v}(pDq))_i \text{ si } \underline{pres}(\underline{v}(p),\underline{v}(q)) \\ \text{autrement} \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } (\underline{v}(pDq))_i \text{ est antérieur à chaque item nul de } \underline{v}(pDq) \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \end{cases}$$

$$(\underline{v}(pIIq))_i = \begin{cases} (\underline{v}(pIq))_i \text{ si } \underline{qcong}(\underline{v}(p),\underline{v}(q)) \\ \text{autrement} \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } (\underline{v}(pIq))_i \text{ est antérieur à chaque item nul de } \underline{v}(pIq) \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \end{cases}$$

$$\underline{v}(p\underline{D}q) = \begin{cases} (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\ldots) \text{ si } \underline{mag}(\underline{v}(p),\underline{v}(q)) \\ (0,0,0\ldots) \text{ autrement} \end{cases} \qquad \underline{v}(p\underline{I}q) = \begin{cases} (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\ldots) \text{ si } \underline{v}(p)=\underline{v}(q) \\ (0,0,0\ldots) \text{ autrement} \end{cases}$$

§4.- <u>VALIDITE</u>.- Une formule p de <u>Aq</u> est valide ssi chaque évaluation de <u>Aq</u> envoie p sur un tenseur aléthique désigné.

Une formule p de <u>Aq</u> est contradictoire ssi chaque évaluation de <u>Aq</u> envoie p sur un tenseur antidésigné.

Ceci dit, on peut procéder aisément (c'est une question de routine) à la vérification que chaque fbf de <u>Aq</u> dont la formation est expressément autorisée par les règles de formation que nous avons formulées et qui, en outre, est un axiome de <u>Aq</u> (y compris donc chaque axiome de <u>As</u>) est une formule valide (sémantiquement valide) de *Aq*, et que les règle d'inférence primitives de *Aq* (y compris donc les règles d'inférence primitives de *As*) conservent la validité. On peut aussi, aisément, vérifier que les formules de *As* et *Aq* qui figurent dans l'Annexe N° 1 du Livre I ne sont pas valides.

Il est cependant fort vraisemblable qu'il y ait des formules sémantiquement valides de *Aq* qui ne soient pas des théorèmes de ce système. Dès lors, à ce qu'il paraît la sémantique proposée dans ce chapitre ne permet pas d'établir pour *Aq* un procédé de décision.

Voyons maintenant un exemple de vérification de la non-validité sémantique (et par suite de la non-validité syntaxique -i.e. de la non-théorématicité- d'une formule de *Aq*, à savoir : "PBpCBPp". Soit *v* une évaluation de *Aq* telle que:

v(p) = (0'3,0'8,0'3,0'8,0'3,0'8...)

Dans ce cas :

v(Bp)=*v*(p)

v(Pp)=(0,0'8,0,0'8,0,0'8...)

v(PBp)=*v*(Pp)

v(BPp)=(0,0,0...)

v(PBpCBPp)=(1,0,1,0,1,0...)

Il y a donc une évaluation qui envoie la formule en question sur un tenseur non désigné.

§5.- Le pourquoi de certaines assignations.- Probablement le pourquoi de toutes les règles établies concernant les évaluations de *Aq* saute aux yeux, compte tenu des lectures proposées pour les différents foncteurs et constantes (lectures exposées dans les premiers §§ des Section I et II du Livre I), sauf peut-être en ce qui concerne le foncteur 'I'. La raison pour imposer pour chaque évaluation de *Aq* l'assignation prescrite pour 'I' c'est celle de rendre valides les formules que voici:

pIpI.qIq   N(pINp)   pINpD.pIpIN(pIp)   p.NqCN(pIq)

pINpDN(pIp)   pIp   pIqI.qIp   pIq.(qIr)D.pIr

En outre, on assure aussi la validité des deux schémas suivants, démontrables dans *Aq* comme schémas théorématiques:

...p---.N(...q---)CN(pIq)   P(...p---).PN(...q---)CPN(pIq)

D'une manière générale, si '$' est un foncteur d'assertion tel que $p ⊢ p, alors il paraît raisonnable d'espérer que ceci soit une thèse valide :

($) $(...p---).$N(...q---)C$N(pIq)

(et que, par conséquent, soit valide la règle d'inférence obtenue à partir du schéma ($), en substituant au conditionnel fort 'C' le signe '⊢' -ou celui que nous utilisons normalement dans le même rôle ':::'-). Or, si$(\underline{v}(p))_i=(\underline{v}(q))_i$, alors il est impossible que le i^e item de la valeur sur laquelle *v* envoie une formule du type de l'antécédent du schéma ($) soit un item non nul si $ est un foncteur tel que chaque évaluation *v'* est telle que$(\underline{v'}(\$p))_i=0$ si $(\underline{v'}(p))_i$ n'est pas un nombre aléthique u tel que cat(m½,u) (intuitivement parlant, tel que u est plus grand que ½). Tel est pourtant le cas des foncteurs d'assertion tels que : H, b, P̈, P̲, P̂, P̂̂, P̳. Dès lors, rien ne nous oblige à postuler la va validité de l'une quelconque de ces formules : bN(pIq), $\underline{\underline{P}}$N(pIq), $\hat{P}$N(pIq), etc.

En revanche, il se peut -et il arrive en fait- que dans une formule comme l'antécédent du schéma ($), lorsqu'on remplace la variable fonctorielle '$' par le foncteur 'P', on obtienne une formule vraie, voire même valide, même si p=q. (Parmi beaucoup d'autres que l'on pourrait citer, en voici un exemple : "P(pCp&$\frac{1}{2}$).PN(pCp&$\frac{1}{2}$)"; ce qu'il faut surtout relever c'est que cette formule demeurerait valide si nous changions les définitions de $\underline{As}$, et que nous prenions '$\frac{1}{2}$' comme une constante primitive désignant le tenseur aléthique ($\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$...) et 'P' comme un foncteur primitif ayant les mêmes évaluations qu'il a en fait, de par les définitions choisies -i.e., intuitivement parlant, qui envoie chaque item i sur i si i est égal ou supérieur à $\frac{1}{2}$, sur 0 autrement-). Dès lors, il faut postuler PN(pIq) comme un théorème; et, par conséquent, il ne peut y avoir aucune évaluation $\underline{v}$ telle que pour quelque i, ($\underline{v}$(pIq))$_i$ -pour quelque p et quelque q- soit un nombre aléthique u tel que $\underline{cat}$(m$\frac{1}{2}$,u) (intuitivement parlant : un nombre aléthique u plus grand que $\frac{1}{2}$). Mais rien ne nous contraint à imposer que pour chaque évaluation $\underline{v}$, chaque item i, chaque p et chaque q, ($\underline{v}$(pIq))$_i$ soit un nombre u tel que $\underline{cat}$(u, r$\frac{1}{2}$) (intuitivement parlant : un nombre aléthique u plus petit que $\frac{1}{2}$). Et il paraît fort raisonnable d'accorder à "pIp" une valeur aussi élevée que possible. Par suite, la seule valeur qu'on peut accorder à "pIp", et ce pour chaque évaluation, est la valeur ($\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$...).

Un autre point qu'il n'est peut-être pas oiseux de mettre en relief c'est que la sémantique non scalaire proposée dans ce chapitre nous permet d'avoir "p+Np" comme une formule valide, donc toujours vraie, même lorsque ni p ni "Np" ne sont assertables, c-à-d même si aucune de ces deux phrases n'est foncièrement vraie. Nous gardons ainsi le principe de tiers exclu sans nous asservir à la formulation forte du principe de bivalence. Cela explique bien pourquoi savoir que p-ou-non-p n'implique ni savoir que p ni savoir que non-p (et, d'une manière générale, savoir que p-ou-q n'implique ni savoir que p ni savoir que q, ni savoir que p ou savoir que q); car, si p-ou-non-p est une phrase nécessairement plutôt vraie, aussi bien p que "non-p" peuvent être des phrases à certains égards assez fausses. Remarquons que, sur ce point précis, le système $\underline{A}$ vient coïncider, en quelque sorte -par les résultats, non pas par les motivations-, avec les approches surévaluationnelles, comme celle de van Fraassen. En effet : la valeur d'une phrase moléculaire peut ne pas préexister dans celles des phrases atomiques. $\underline{v}$(p+Np) sera, pour chaque évaluation $\underline{v}$ et chaque formule p, une valeur désignée, même si $\underline{v}$(p) est une valeur non désignée et $\underline{v}$(Np) est aussi une valeur non désignée. De la même façon, $\underline{v}$(p.Np) sera un tenseur antidésigné, même si ni $\underline{v}$(p) ni $\underline{v}$(Np) ne sont des tenseurs antidésignés. Et $\underline{v}$(p.Fp) sera une valeur semi-congruente avec la valeur minimale, i.e. (0,0,0...) -autrement dit un tenseur u tel que $\underline{qcong}$(u,(0,0,0...)); il se peut pourtant que ni $\underline{v}$(p) ni $\underline{v}$(Fp) ne soient des tenseurs semi-congruents avec (0,0,0...).

De la même façon -et plus radicalement encore- certains foncteurs, comme '^' (i.e.: 'non seulement...mais en outre---') sont des foncteurs interactifs, au sens défini par Zadeh (Z:8). On peut avoir, p.ex., ($\underline{v}$(p^q))$_i$=0'4, ($\underline{v}$(p))$_i$=$\frac{1}{2}$ et ($\underline{v}$(q))$_i$=0'8.

Cette stratégie peut apaiser, ce nous semble, certaines réticences à l'encontre du caractère vérifonctionnel de la logique sententielle parce qu'il entraînerait des conséquences saugrenues. Certains auteurs, comme N.E. Christensen (C:19, pp.77ss) soutiennent que le seul foncteur vérifonctionnel est la conjonction, les autres étant seulement des déterminants vérivalents :

> By this we understand a compound the truth of which is compatible with some truth-values of its components and excludes others(...) A tautology will now be a truth-value determinant the truth of which is compatible with all truth values of its components and excludes none.

Mais cette solution n'est pas adéquate, car elle bloque la formalisation des expressions courantes de la langue naturelle au moyen des foncteurs du calcul sententiel, si ce n'est -comme l'auteur le dit lui-même- d'une manière purement conditionnelle : "p+q" se lirait : "s'il y un lien quelconque entre p et q, alors soit p est vrai, soit q est vrai". La loi d'addition perdrait alors sa raison d'être (il n'est pas étonnant que dans le courant oxonien des voix se soient élevées contre cette loi). Au contraire, notre sémantique sauve la vérifonctionalité, mais ne nous oblige pas à assigner une valeur de vérité donnée (ni l'alternance d'un nombre fini quelconque de valeurs de vérité) des atomes qui composent une phrase moléculaire dont nous connaîtrions la valeur de vérité -sauf dans certains cas exceptionnels-. Et notre approche sauvegarde ce qu'il y a de valable dans le traitement de Christensen, à savoir que la connaissance de la valeur de vérité d'une formule moléculaire nous renseigne -en principe- non pas sur des valeurs particulières des atomes, mais sur un éventail de valeurs possibles qu'ils peuvent prendre. Ceci est vrai même pour les conjonctions (contrairement à l'opinion de Christensen), car la connaissance de la valeur de "p.q" ne nous donne qu'un champ de possibilités, normalement infini, pour les valeurs de p et q, sans individuer aucune valeur précise. Soit $\underline{v}$ une évaluation correcte (ou que nous croyons l'être), telle que $\underline{v}(p.q)=(0'3,0'3,0'3...)$; il va de soi qu'un nombre infini de combinaisons des valeurs de p et de q sont possibles, qui donneraient toutes ce même résultat quant à la valeur de "p.q"; mais d'autres combinaisons sont exclues : pour aucun i il n'est possible que $(\underline{v}(p))_i$ ou $(\underline{v}(q))_i$ soit un nombre aléthique inférieur à 0'3.

L'ensemble de considérations qui précède vise à montrer que la sémantique proposée dans ce chapitre possède une forte base et motivation intuitive et n'est pas un jeu formel; chacun des énoncés et chacune des règles qui constituent la théorie sémantique ici proposée a été soigneusement méditée en fonction précisément de la validation d'intuitions plausibles (surtout pour ce qui est de la logique de la langue naturelle, selon les analyses de la Section IV du Livre I).

§6.- PROPRIETES ALGEBRIQUES.- Nous nous bornerons ici à quelques remarques succinctes sur la nature des nombres aléthiques et sur les structures algébriques constituées par eux, ainsi que par les tenseurs aléthiques.

Intuitivement, on peut concevoir que, si u est un nombre réel compris entre 0 et 1, mu est égal à u plus un infinitième, et nu est égal à u moins un infinitième (sauf si u=0 -car alors nu=u- ou si u=1 -car alors mu=u-). En outre, dans ce cadre on postulera que tous les infinitièmes sont identiques, c-à-d qu'il n'y a qu'un seul et unique infinitième. On pourrait exprimer cela autrement : le signe '=' représenterait non pas l'identité, mais une congruence telle que, si u et u' sont des réels, la formule ' u=u' ' représente l'identité de u et u'; mais, si l'un d'eux n'est pas un réel mais le résultat d'additionner un infinitième à un réel ou de soustraire un infinitième d'un réel, alors ladite formule exprime seulement l'appartenance à une même classe d'équivalence (tous les infinitièmes appartenant à la même classe d'équivalence; chaque addition d'un réel et d'un infinitième quelconque appartenant à la même classe d'équivalence que celle du même réel et d'un autre infinitième; idem pour la soustraction; au demeurant chaque infinitième pouvant être considéré comme le résultat de l'additionner à 0).

Nous avons vu au parapgraphe précédent des motivations intuitives pour le choix d'une sémantique de tenseurs aléthiques constitués par des nombres aléthiques. Mais, indépendamment de ces motivations, l'étude des nombres aléthiques constitue une arithmétique qui présente des particularités mathématiques intéressantes, en regard de celle des réels :

L'ensemble des nombres aléthiques est fermé par rapport aux opérations monadiques et dyadiques définies sur lui (m, n, *inv*, *nih*, *maxim*, *minim*, *prod*). Les trois opérations dyadiques sont commutatives et associatives. Les deux opérations *maxim* et *minim* sont distributives l'une par rapport à l'autre. L'opération *prod* est distributive aussi bien par rapport à *maxim* que par rapport à *minim*.

Ni *maxim* ni *minim* ne possèdent la loi de cancellation. Il n'y a pas non plus pour chaque nombre aléthique un élément symétrique par rapport à aucune de ces deux opérations.

L'opération *prod* se distingue de la multiplication (définie sur les réels) parce qu'elle ne satisfait ni la propriété archimédéenne, ni la loi de cancellation, ni l'existence d'un élément symétrique multiplicatif pour chaque nombre aléthique.

Un autre fait qu'il vaut la peine de souligner c'est que l'ordre constitué par *cat* n'est pas dense; cependant, l'ensemble des nombres aléthiques possède, par rapport à *cat*, la propriété de plénitude (caractéristique de l'ensemble des réels et qui manque à l'ensemble des rationnels). Toutefois, *cat* constitue un ordre semi-dense, en ce sens-ci : pour deux nombres aléthiques quelconques, u et u', tels que *cat*(u,u') et u≠u', ou bien u=nu', ou bien u'=mu, ou bien il y a un nombre aléthique u" tel que u"≠u et u"≠u' et *cat*(u,u") et *cat*(u",u').

Si A est l'ensemble des nombres aléthiques, on a les propriétés algébriques suivantes :

(A,*maxim*,*minim*,*inv*,1,0,*nih*(*inv*)) est une algèbre quasi-booléenne topologique.

(A,*maxim*,*minim*,*nih*,0,1) est une algèbre de Stone

Si T est l'ensemble des tenseurs aléthiques, alors:

(T,*maxim*,*minim*,*nih*,1,0,*mut*) est une algèbre parabooléenne, en tendant par là une algèbre sur laquelle *mut* est une congruence et telle que toutes les equations d'une algèbre booléenne deviennent vraies si l'on substitue au signe d'identité '*mut*'. Il faut relever que certaines propriétés des algèbres booléennes ne sont pas valides pour les algèbres parabooléennes, notamment parmi celles qui concernent les filtres et les idéaux.

(T,*maxim*,*minim*,*inv*,(1,1,1...),(0,0,0...),*omn*,*qcong*) est une algèbre paraquasibooléenne topologique (définie d'une manière analogue par rapport aux algèbres quasibooléennes, qcong étant ici la congruence qui doit remplacer l'identité).

De nouveau, on peut constater que les lois concer-nant les filtres et les idéaux valides dans une algèbre quasi-booléenne topologique ne le sont pas nécessairement dans une algèbre paraquasibooléenne topologique.

(T,maxim,minim,inv,(1,1,1...),(0,0,0...),belt) est une algè-bre quasibooléenne topologique.

Une étude plus poussée de l'ensemble des nombres alé-thiques et de l'ensemble des tenseurs aléthiques révélerait de nombreuses propriétés et structures algébriques intéressantes. Nous aborderons ce sujet dans un ouvrage postérieur.

§7.- Remarques additionnelles.- Nous avons prouvé que Aq (et aussi, par conséquent, As) est un système non trivial. Est-il finiment trivialisable? Etre finiment trivialisable c'est pou-voir être rendu trivial par l'adjonction d'un nombre fini d'axiomes -et mis à part des axiomes banals, comme "p", "p.q", "p+q", etc., qui rendraient immédiatement le système Post-in-consistant, donc trivial-. (Sur cette question, cf. C:27, p. 500). Aq est effectivement un système finiment trivialisable. Voici quelques échantillons de formules qui, ajoutées comme axiomes, trivialiseraient As (donc aussi Aq) :

p=q=.pIq   Pp+PNp pDXp   fp+Fp   F(p.Np)

La preuve que le système Aq, tout en étant contra-dictoire, a un modèle sert à réfuter une erreur naguère répan-due -et encore maintenant largement partagée- à laquelle adhè-re Tarski, lorsqu'il affirme (T:6, p. 150) :

> ... nous pouvons convenir d'appeler contradictoire toute classe de propositions qui n'a pas de modèle.

Evidemment, cette terminologie se justifie si l'on identifie négation et surnégation et que l'on admet un seul foncteur de négation, à savoir la négation forte. Mais le lan-gage de tous les jours distingue spontanément plusieurs types de négation. Comme le prouve l'existence de Aq (mais aussi celle d'autres systèmes contradictoires ayant des modèles, dont nous avons parlé au chapitre 2 de ce Livre), et comme l'a mis en évidence, en particulier, le professeur Kotas (communication personnelle à l'auteur), des systèmes formels ayant une plura-lité de foncteurs de négation sont, non seulement possibles, mais indispensables pour refléter la complexité et les nuances de la pensée et du réel. (Il y a d'ailleurs des systèmes non contradictoires qui possèdent plusieurs négations, p.ex. des systèmes constructivistes).

Un autre fait qu'il vaut la peine de souligner c'est l'apparente incomplétude de Aq. Qu'un système contradictoire puisse être incomplet infirme une autre erreur que fit sienne feu Abraham Robinson (R:19, p. 66), en affirmant que, pour tout système K, "If K is contradictory then it is obviously complete'. Ce serait le cas si chaque système contradictoire était trivial, car tout système trivial est complet.

§8.- Avant de mettre fin à ce chapitre, signalons que la séman-tique ici proposée n'est pas, telle quelle, philosophiquement satisfaisante, car elle accorde une existence réelle à un de-notatum de chaque fbf de As et de Aq, y compris donc à un cor-rélat de '0'. Mais une modification philosophiquement satis-faisante de cette sémantique est parfaitement possible. Il suf firait d'éliminer de l'ensemble des tenseurs aléthiques le tenseur (0,0,0...), et de l'ensemble des nombres aléthiques le nombre 0. Les évaluations cesseraient d'être des fonctions pour devenir des <u>fonctions partielles</u> telles que, si la valeur d'une évaluation $\underline{v}$ pour un argument existe, alors cette valeur est unique. On dirait qu'une phrase est valide ssi chaque évaluation envoie cette phrase sur un tenseur qui n'a qu'un nombre fini de trous (un tenseur ayant un trou par rapport à l'index i ssi ledit tenseur n'a pas de i^e item -puisque les anciens items nuls ont été retranchés). Une phrase p sera foncièrement vraie sous une certaine évaluation $\underline{v}$ ssi $\underline{v}(p)$ existe et qu'il a tout au plus un nombre fini de trous. Une phrase p sera foncièrement fausse sous une évaluation $\underline{v}$ ssi $\underline{v}(p)$, si elle existe, a tout au plus un nombre fini d'items pleins. Une phrase p sera absolument fausse sous une évaluation $\underline{v}$ ssi ou bien $\underline{v}(p)$ n'existe pas ou, autrement, $\underline{v}(p)$ ne contient qu'un nombre fini d'items aléthiques. Une formule sera valide ssi sous chaque évaluation elle est foncièrement vraie. Tout cela met en relief la relation d'<u>identité</u> parfaite qu'il y a entre la vérité et l'existence, relation que nous étudierons dans la Section III du Livre III. Pour nous exprimer d'une manière philosophiquement (et non seulement techniquement) pleinement adéquate, il faudrait parler non seulement d'existence et d'inexistence tout court, mais de degrés d'existence : un item non nul u est plus réel qu'un autre item u' ssi <u>cat</u>(u',u) et u'≠u. On pourrait constater alors que plus un tenseur existe qui soit la valeur d'une évaluation $\underline{v}$ qui soit correcte, pour une phrase p, moins $\underline{v}(Np)$ est réel. Et si $\underline{v}$ est une évaluation correcte telle que $(\underline{v}(p))_i=1$, alors $(\underline{v}(Np))_i$ n'existe point -autrement dit la phrase "Np", si elle désigne quelque chose, a pour denotatum un tenseur aléthique ayant un trou par rapport à l'index i-. En parlant de la sorte, nous nous exprimerions dans le métalangage (que celui-ci soit identique ou non au langage-objet) comme il sied de le faire, reflétant et miroitant dans la métalogique le contenu linguistique et philosophique que notre approche entend véhiculer. Conformément à tout cela, il faudrait introduire des modifications appropriées dans les règles qui régissent les évaluations de <u>Aq</u>. P.ex., on dirait que, pour chaque évaluation $\underline{v}$, si $(\underline{v}(p))_i=1$, alors $(\underline{v}(Np))_i$ n'existe point; si $(\underline{v}(p))_i$ existe tout en étant différent de 1, $(\underline{v}(Np))_i=\underline{inv}((\underline{v}(p))_i)$; enfin, si $(\underline{v}(p))_i$ n'existe point, $(\underline{v}(Np))_i=1$. Cet échantillon montre le type d'adaptations nécessaires pour passer de la sémantique formelle strictement fonctionnelle des §§1, 2 et 3 de ce chapitre à une sémantique philosophiquement acceptable qui toutefois demeurerait étroitement apparentée à ladite sémantique formelle.

En tout cas, nous voulons dire très nettement que la sémantique exposée dans les §§ 1 à 3 de ce chapitre est une sémantique fictivement simplifiée, pour des raisons de maniement formel, et que le vrai modèle réel dont nous défendrons l'existence au Livre III de cette étude est obtenu à partir de la sémantique formelle des §§ 1 à 3 selon les amendements ci-dessus indiqués dans ce paragraphe -et en choisissant naturellement une évaluation correcte, i.e. qui assigne des tenseurs désignés à toutes les phrases vraies et à elles seules (par 'phrase vraie' nous entendons : phrase foncièrement vraie). Le modèle réel est étroitement lié à la sémantique formelle, si bien qu'en dépit de sa simplification au regard du modèle réelle, la sémantique formelle proposée aux §§ 1 à 3 conserve la motivation philosophique de notre approche, entaché certes de déformations à tout moment éliminables moyennant des réajustements conformes aux prescriptions ci-dessus.

Chapitre 4.- UNE CLASSIFICATION DES FONCTEURS MONADIQUES ET DYADIQUES

Nous étudierons dans ce chapitre quelques propriétés que doivent posséder les foncteurs d'un calcul sententiel pour être classifiés comme appartenant aux catégories que voici : foncteurs assertifs; foncteurs négatifs; foncteurs conjonctifs; foncteurs conditionnels; foncteurs disjonctifs; foncteurs implicatifs; foncteurs biconditionnels; et foncteurs surimplicatifs.

§1.- Un foncteur assertif est un foncteur monadique tel qu'une phrase qui commence par lui a une valeur désignée seulement si le résultat de retrancher le foncteur a une valeur désignée. Parmi beaucoup d'autres, les foncteurs suivants de As sont des foncteurs assertifs : X, K, H, L, P, Y, f, P̲, P̂, B, T, etc. Le nombre en est infini et on peut démontrer qu'il y a des chaînes infinies de ces foncteurs, où chaque foncteur est différent de tous ceux qui précèdent et de tous ceux qui suivent.

Un foncteur semi-assertif est un foncteur tel que, si une formule commençant par lui a une valeur désignée, alors le résultat de retrancher le foncteur possède une valeur qui ne soit pas fortement antidésignée (en entendant par <u>valeur fortement antidésignée</u> toute valeur w telle que si /p/=w, alors pour tout q p⊢q). (Similairement, on entendra par <u>valeur fortement désignée</u> toute valeur w telle que, si /p/=w alors pour tout foncteur de négation $, $p⊢q, pour tout q). Le foncteur 'J' est un foncteur semi-assertif. (Cf. §13, p. 51).

Un foncteur surassertif est un foncteur monadique tel que le résultat de le retrancher d'une formule qui commence par lui et qui possède une valeur désignée est une formule ayant une valeur surdésignée. 'T' est un foncteur surassertif. Si $ est un foncteur surassertif et §assertif, §$ et $§ sont surassertifs. Un foncteur sous-assertif est un foncteur monadique tel que le résultat de le retrancher d'une formule qui commence par lui et qui possède une valeur désignée est une formule différente de la valeur infime (dans le cas de la sémantique formelle proposée pour Aq, différente de (0,0,0...)). Le foncteur 'W' est un foncteur sous-assertif.

La classe des foncteurs d'affirmation comprend les foncteurs sous-assertifs, semi-assertifs, assertifs et surassertifs.

§2.- Les foncteurs négatifs sont les foncteurs monadiques $ qui parmi les conditions suivantes en satisfont 5 au moins :

1.- Au minimum un membre du couple (p,$p) doit, soit avoir une valeur désignée, soit ne pas avoir une valeur antidésignée.

2.- Au minimum un membre du couple (p,$p) doit, soit avoir une valeur antidésignée, soit ne pas avoir une valeur désignée.

3.- Si la valeur de p est désignée, /$p/ est antidésignée.

4.- Si /p/ est antidésignée, /$p/ est désignée.

5.- Si /$p/ est antidésignée, /p/ est désignée.

6.- Si /$p/ est désignée, /p/ est antidésignée.

Une négation $ est naturelle si, par rapport à un foncteur biconditionnel § caractérisé par le MP réciproque, /p§$$p/ est désigné.

Les foncteurs suivants sont négatifs : N, N̲, N̳, –, F.

Ils sont tous des négations naturelles sauf '-'.

Nous appellerons <u>negation simple</u> tout foncteur négatif $ remplissant les six conditions ci-dessus énumérées et tel que, pour tout p, /$$p/=/p/. 'N' est le seul foncteur de négation simple.

Un foncteur de négation forte ou <u>surnégation</u> est un foncteur négatif $ qui satisfait les conditions (1),(2),(3), (5) et (6) ci-dessus et au surplus celles-ci :

i) Au maximum l'un des deux (/p/,/$p/) est désigné.
ii) Si /p/ est désigné, /$p/ est fortement antidésigné.
iii) Si /$p/ est désigné, /p/ est fortement antidésigné.
iv) Si /p/ est fortement antidésigné, /$p/ est fortement designé.

Il en ressort que /p/ est désigné ssi /$$p/ est fortement désigné. Un foncteur qui satisfait toutes ces conditions est, dans <u>As</u>, le foncteur 'F'. 'F' est donc un foncteur de négation forte.

Un foncteur <u>ultranégatif</u> est un foncteur $ qui satisfait les conditions suivantes :

1) Au minimum l'un des deux (/p/,/$p/) est fortement antidésigné.
2) Au maximum l'un des deux (/p/,/$p/) est fortement antidésigné.
3) Au maximum l'un des deux (/p/,/$p/) est désigné.
4) Au minimum l'un des deux (/$p/,/$$p/) est fortement désigné.
5) /$$p/ est désigné ssi /p/ n'est pas fortement antidésigné.

Un foncteur qui satisfait ces cinq conditions c'est le foncteur '<u>F</u>', qui est donc un foncteur ultranégatif.

Un foncteur <u>seminégatif</u> est un foncteur $ tel que :

1) Au minimum l'un des deux (/$p/,/p/) est désigné.
2) Au maximum l'un des deux (/$p/,/p/) est désigné.
3) Au minimum l'un des deux (/$p/,/$$p/) est fortement antidésigné.
4) Au maximum l'un des deux (/$p/,/$$p/) est antidésigné.
5) /$$p/ est fortement désigné ssi /p/ est désigné.

Un foncteur qui satisfait ces cinq conditions et qui par suite est un foncteur seminégatif est le foncteur '~~B~~'.

Un foncteur quasinégatif est un foncteur $ tel que:

1) Au minimum l'un des deux (/p/,/$p/) est fortement désigné.
2) Au maximum l'un des deux (/p/,/$p/) est fortement désigné.
3) Au minimum l'un des deux (/$p/,/$$p/) est fortement antidésigné.
4) Au maximum l'un des deux (/$p/,/$$p/) est antidésigné.
5) Au maximum l'un des deux (/$p/,/$$p/) est désigné.
6) /$$p/ est désigné ssi /p/ est fortement désigné.

Un foncteur qui satisfait ces conditions et qui, dès lors, est un foncteur quasinégatif est '~~H~~'.

§3.- Un foncteur $ est une conjonction ssi :

1) /p/ est désigné ssi /p$p/ est désigné.
2) /p$q/ est désigné ssi /q$p/ est désigné.
3) /p$(q$r)/ est désigné ssi /pqr/ est désigné.
4) Il y a un foncteur de disjonction § tel que /p$(q§r)/ est désigné ssi /p$q§.p$r/ est désigné; /q§r$p/ est désigné ssi /q$p§.r$p/ est désigné; /p§(q$r)/ est désigné ssi /p§q$.p§r/ est désigné ; /q$r§p/ est désigné ssi /q§p$.r§p/ est désigné.
5) /p$q/ est désigné ssi /p/ est désigné et /q/ est désigné.
6) /p$q/ est surdésigné ssi /p/ et /q/ surdésignés les deux.

7) /p$q/ est fortement antidésigné si /p/ est fortement antidésigné et aussi si /q/ est fortement antidésigné.
8) Il y a un foncteur de disjonction § et un foncteur négatif <u>neg</u> tels que /<u>neg</u>(p$q)/ est désigné ssi /<u>neg</u>p§<u>neg</u>q/ est désigné et /<u>neg</u>(p§q)/ est désigné ssi /<u>neg</u>p$<u>neg</u>q/ est désigné.

Ces huit conditions sont satisfaites par les foncteurs que voici : ˆ, &, ., _,

Une conjonction $ est <u>simple</u> ssi elle satisfait en outre les deux conditions suivantes :

9) Si /p/ est antidésigné ou /q/ est antidésigné, /p$q/ est antidésigné.
10) Si l'ensemble des valeurs de vérité est ordonné ou préordonné par une relation réflexive, non symétrique et transitive <u>prae</u> telle que, si w est fortement antidésignée, pour tout w' <u>prae</u>(w,w'), et, si w est fortement désigné, alors pour tout w' prae(w',w) et <u>prae</u> constitue un ordre ou préordre de rapprochement des valeurs maximales; si, au surplus, § est un fonteur assertif tel que, si /§p/ est désigné et <u>prae</u>(/p,/q/), alors /§q/ est désigné; si, par surcroit, /§(p$q)/ est désigné, /§p/ est désigné et /§q/ est désigné.

Des foncteurs qui satisfont les 10 conditions des conjonctions simples sont, dans <u>As</u>, les foncteurs '.', '¯', '_'; les deux autres que nous avons énuméré ci-dessus ne satisfont pas la 10ᵉ condition. Mais il remplissent tous la condition (9), hormis '&'. Nous appellerons 'conjonction naturelle' toute conjonction satisfaisant la condition (9).

Nous appellerons 'conjonction fondamentale' toute conjonction simple qui satisfait ces deux autres conditions:

11) Le résultat de modifier la condition (10) ci-dessus comme suit : /§(p$q)/ est désigné <u>ssi</u> /§p/ et /§q/ sont tous les deux désignés.
12) Si /p/ est la valeur suprême , alors /p$q/=/q/, pour tout q.

La conjonction fondamentale de <u>As</u> est, bien entendu, le foncteur '.'.

§4.- Un foncteur $ est une disjonction ssi :

1) /p/ est désigné ssi /p$p/ est désigné.
2) /p$(q$r)/ est désigné ssi /pqr/ est désigné.
3) Il y a un foncteur de conjonction, §, tel que, ou bien /p§(q$r)/ est désigné ssi /p§q$.p§r/ est désigné et, en même temps, /p$(q§r)/ est désigné ssi /p$q§.p$r/ est désigné; ou bien /q$r§p/ est désigné ssi /q§p$.r§p/ est désigné et, en même temps, /q§r$p/ est désigné ssi /q$p§.r$p/ est désigné.
4) /p$q/ est antidésigné ssi /p/ et /q/ sont tous les deux antidésignés.
5) /p$q/ est surantidésigné ssi /p/ et /q/ sont tous les deux surantidésignés.
6) Si /p/ est fortement désigné ou /q/ est fortement désigné, alors /p$q/ est fortement désigné.
7) Si /p/ est désigné, alors ou bien /p$q/ est désigné, ou bien /q$p/ est désigné.
8) Il y a un foncteur de conjonction § et une négation <u>neg</u> tels que ... (comme la condition (8) des conjonctions).

Deux foncteurs qui satisfont toutes ces conditions=

sont les foncteurs '+', 'V', et '†'.

Une disjonction naturelle est une disjonction qui satisfait la condition suivante :

9) /p$q/ est désigné ssi /q$p/ est désigné.

De ces neuf conditions, il en ressort que toute disjonction naturelle est telle que, si /p/ est désigné ou /q/ est désigné, alors /p$q/ est désigné. Des foncteurs susmentionnés, les seuls qui constituent disjonctions naturelles sont '+' et '†'.

Une autre condition qu'il serait peut-être raisonnable d'imposer pour qu'un foncteur puisse être considéré comme une disjonction c'est que, pour quelque foncteur de négation, §, si /p$q/ et /§p/ sont désignés, /q/ doive être désignée. Cette version du syllogisme disjonctif n'est pas incompatible avec l'existence de systèmes contradictoires non saturés, comme nous l'avons constaté au chapitre 1 de ce Livre.

Nous introduisons enfin la notion de disjonction fondamentale, comme suit : une disjonction$est fondamentale ssi, au cas où /p/ soit la valeur infime, pour tout q /p$q/=/q$p/=/q/ et, par surcroît, pour tout p, /p$p/=/p/. La seule disjonction fondamentale dans <u>As</u> est '+'.

Comme on le voit, nous avons été moins exigeant en stipulant des conditions pour la disjonction qu'en le faisant pour la conjonction. En effet : nous avons demandé pour les conjonctions une distributivité et à droite et à gauche , tandis que pour la conjonction tout ce que nous demandons c'est une distributivité à droite <u>ou</u> une distributivité à gauche. Mais la différence la plus saillante, et la racine de celle que nous venons d'évoquer, c'est l'absence de condition de commutativité pour la disjonction. Dans la conversation courante, la commutativité est souvent inapplicable aux disjonctions, et ceci tient sans doute au fait que bien d'occurrences d'une particule disjonctive doivent être formalisées, non pas par le biais de '+' ou de '†', mais bien au moyen de 'V'. Ceci est vrai surtout pour les locutions du type 'à moins que...' (avec ou sans 'ne' explétif). P.ex. : 'je serai heureux à moins que tu me quittes', ne paraît point entraîner : 'tu me quitteras à moins que je sois heureux'. Certes, ici il y a une complication temporelle, mais elle ne semble pas constituer la seule raison de la non-commutativité de la phrase en question; car il y a des exemples qui semblent réfuter aussi la commutativité des disjonctions en 'à moins que' et qui, apparemment, ne font pas intervenir des complications d'opérateurs temporels, comme, p.ex. : 'Alain est content à moins qu'on ne lui rappelle son enfance'; cette phrase ne semble pas entraîner : 'On rappelle à Alain son enfance, à moins qu'il soit content'. Or l'absence de commutativité entraîne un affaiblissement de la distributivité.

§5.- Bellman et Giertz (B:8) ont prouvé que toute logique où les valeurs de vérité soient des réels appartenant à l'intervalle $[0,1]$ est telle que la conjonction et la disjonction doivent avoir comme fonctions caractéristiques, respectivement, <u>min</u> et <u>max</u>, si elles satisfont les conditions suivantes : symétrie, associativité, distributivité réciproque à droite et à gauche et, en outre, que leurs fonctions caractéristiques soient continues et strictement croissantes par rapport à leur premier argument et telles que la conjonction de p et q ne dépasse pas <u>min</u>(/p/,/q/), et la disjonction de p et q ne soit pas inférieure à <u>max</u>(/p/,/q/). Encore que l'ensemble des valeurs de vérité de <u>As</u> ne soit pas l'ensemble des réels dudit intervalle, le résultat est parfaitement valide pour As, si aux fonctions max et min, définies sur les réels, nous substituons maxim et minim définies sur les tenseurs aléthiques, à partir de max et de min, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. Comment expliquer alors que, à côté de la conjonction '.' et de la disjonction '+' (respectivement, la conjonction et la disjonction fondamentales), dont les fonctions sont minim et maxim, nous admettions d'autres conjonctions et disjonction? Il y a deux raisons. La première c'est que la dernière condition énumérée par Bellman et Giertz est excessive comme condition pour toute conjonction et toute disjonction (la condition comme quoi, si $ est une conjonction, /p$q/ ne doit pas dépasser min(/p/,/q/), et similairement pour la disjonction); les conjonctions -au demeurant naturelles et simples- '_' et '¯' ne satisfont pas ledit réquisit. La deuxième raison c'est que, si le foncteur de conjonction naturelle '^' (bien que non pas de conjonction simple) et la disjonction naturelle '†' satisfont toutes les autres conditions imposées par Bellman et Giertz, elles le font seulement en un sens : si ces conditions sont interprétées comme des règles et que toute valeur de vérité supérieure à 0 (dans une logique scalaire et dans une logique tensorielle comme As, toute valeur ne contenant qu'un nombre fini de zéros) est désignée. Bellman et Giertz interprètent ces propriétés comme identité stricte des valeurs de vérité (p.ex., l'idempotence pour un foncteur $ signifie que /p$p/=/p/; et les autres réquisits énumérés sont à l'avenant). Cela s'explique si l'on se place dans une perspective lukasiewiczienne, où la seule valeur désignée est la valeur suprême et où un biconditionnel est valide ssi son membre de gauche possède la même valeur de vérité que son membre de droite, pour toute substitution des variables. Mais, si l'on admet une infinité de degrés de vérité, ce qui est propre aux logiques floues, il semble naturel de dépasser ce cadre étroit, et de tenir pour valeurs vraies (plus ou moins vraies) toutes les valeurs de vérité non nulles.

§6.- Si nous postulons une pluralité de foncteurs conjonctifs et disjonctifs ce n'est point pour le simple plaisir de jouer avec les latitudes techniquement possibles dans un système purement formel. Loin de là. La raison en est la suivante : tout paraît indiquer que les différents emplois de 'et' et ceux de 'ou' comportent des conditions de vérité partiellement similaires, mais non pas strictement identiques. C'est ce qui explique que certains philosophes aient eu des intuitions impossibles à systématiser dans le cadre d'un système formel possédant un seul foncteur de conjonction et un seul foncteur de disjonction. Que l'on pense, p.ex., aux thèses -qu'il faut, ce nous semble, prendre parfaitement au sérieux- des idéalistes britanniques sur la disjonction et la conjonction (cf. C:32). Pour les idéalistes britanniques être b et c c'est une troisième possibilité, différente de celle d'être b et de celle d'être c. (On pourrait certes interpréter cela aussi dans le sens d'une intervention de l'opération d'appartenance; nous avons vu dans la Section IV du Livre I que 'x(y.z)' n'implique ni n'est impliqué par 'xy.xz'; et cette absence d'implication nous a permis d'expliquer et représenter formellement certaines fonctions des adjectifs épithètes; mais nous supposerons que les intuitions dont nous parlons dans ce paragraphe concernent exclusivement les foncteurs en présence et non pas des opérations ensemblistes). Bosanquet (cf. C:32, p. 121) étaye cette thèse avec un argument métaphysique qui ne manque pas de pouvoir persuasif : le sujet sera différent qu'il possè de la double détermination bc ou qu'il possède seulement la détermination b ou seulement la détermination c. Bosanquet = dit (cité par Crossley, ibid.) :

> b and c are each exclusive of bc. So with the wellworn case of rogue and fool, that excludes the cases of simply rogue and simply fool. The man is different in every fibre of its being.

Ce raisonnement s'appuie sur des intuitions platoniciennes -et hégéliennes- à propos d'une sorte de fusion entre le corrélat du sujet et celui du prédicat. Quoi qu'il en soit, si l'on accepte l'argument de Bosanquet on devra reconnaître que /p-et-q/ doit être -pour un rôle sémantique de la particule 'et'- une situation différente de ce que /p/-et-/q/. Dire "p-et-q" ne serait point la même chose que de dire p et ajouter q.

Nous acceptons pour une part l'argument de Bosanquet. Dire "p-et-q" ce n'est point la même chose que dire p et dire q. Mais cela ne veut pas dire que /p-et-q/ doive nécessairement être différent aussi bien de /p/ que de /q/; seulement que cette différence est possible. Or cette possibilité est= admise par la sémantique de <u>As</u>, et ce même pour la conjonction fondamentale -comme nous l'avons vu en détail dans le chapitre précédent-. Mais l'argument de Bosanquet peut présenter encore d'autres aspects intéressants qui ne sont pas dûment reconnus dans leur bien-fondé par l'assignation de valeurs pour la fonction caractéristique du foncteur '.'. C'est que la déviation de /p.q/ par rapport à /p/ et à /q/, bien que possible,= est toujours vers le bas et seulement dans la mesure où, pour quelque i, le i^{e} item de l'autre membre conjonctif est inférieur à celui du membre initialement donné. Mais dans certains emplois du connecteur 'et', on peut avoir l'impression que = cette déviation doit être différente; parfois on peut penser= que /p-et-q/ doit être intermédiaire entre /p/ et /q/. Dis-je le même mensonge si j'affirme 'le Soleil est est un astre chaud et l'Italie est plus grande que la France' que si je dis 'le Soleil est un astre froid et l'Italie est plus = grande que la France'? On peut en douter. On pourrait espérer que notre hésitation fût causée par une équivocité du connecteur 'et', tantôt devant être pris comme une fonction minimalisante, tantôt comme quelque fonction de moyenne. A notre avis c'est ce qui se passe lorsque le 'et' est supprimable et qu'en fait on est en train d'exprimer une juxtaposition. Car dire "p,q", ce n'est point la même chose que de dire p et dire q (i.e. que de dire p, en ajoutant q). La juxtaposition marque un lien qui sert à constituer un message unitaire. Quelqu'un peut être en train de dire p au téléphone et q à quelqu'un d'autre, de vive voix; il n'aura pas dit "p,q". Les conditions de vérité de "p,q" sont proches de celles de la conjonction fondamentale sous plusieurs rapports. Mais il semble qu'il y ait dans la juxtaposition -et dans les emplois de 'et' paraphrasables comme des juxtapositions- une moindre exigence, si bien qu'un mensonge ou quasi-mensonge dit en juxtaposition avec des phrases extrêmement vraies donne pour résultat un message moins mensonger (et de même pour les faussetés contenues dans un livre, un article, etc.). La juxtaposition paraît = donc pouvoir être formellement représentée comme l'un des foncteurs '_' ou '¯'.

D'un autre côté, il y a aussi un 'et' d'insistance: là où le double 'et' est présent ou sous-entendu (et qui équivaut à une particule discontinue : 'non seulement... mais aussi'). Cette insistance indique une fonction interactive (au sens de Zadeh), telle que /et p et q/ puisse être inférieure à /p/ et à /q/. Cet 'et' d'insistance est formellement représenté par le foncteur '^'.

On pourrait formuler des considérations semblables à propos des différences entre les divers foncteurs de disjonction (et les divers emplois du 'ou'), mais une extrapolation de ce qui précède -non sans quelques modifications et nuances, certes- pourrait suffire.

§7.- Un avantage de la sémantique proposée dans le chapitre 3 et de la caractérisation des foncteurs que nous sommes en train d'effectuer dans ce chapitre (et qui se fonde sur la sémantique susmentionnée, même si la portée de nos classifications est beaucoup plus générale et ne se confine pas à un seul système ou à une sémantique déterminée) réside dans le fait qu'une phrase disjonctive peut être vraie simpliciter sans qu'aucun membre disjonctif ne soit simpliciter (c-à-d : foncièrement ou strictement) vrai. C'est pourquoi nous n'avons pas demandé -même pas pour la disjonction fondamentale- pour qu'un foncteur \$ soit considéré comme une disjonction que /p\$q/ soit désigné seulement si ou bien /p/ est désigné ou bien /q/ est désigné (de même que nous n'avons demandé pour aucune conjonction § que /p§q/ soit antidésigné seulement si soit /p/ est antidésigné ou /q/ est antidésigné). En ce sens, toute disjonction est intensionnelle, au sens où Lewis entendait ce mot appliqué à la disjonction, à croire l'interprétation proposée par H.S. Chandler (C:16, p.32):

> Perhaps Lewis should say that a true disjunctive assertion is intensional for those who know it to be true without knowing which member is true, and is extensional for those who know the truth of at least one member.

Si nous disons qu'en ce sens toute disjonction est intensionnelle, c'est que toute disjonction est, de par notre sémantique, telle que ni sa vérité stricte (le fait que la disjonction possède une valeur de vérité désignée) ni même son degré exact de vérité ne nous renseignent univoquement sur les degrés de vérité que peuvent posséder les membres disjonctifs. (Céla permet de répondre à certains arguments intuitionnistes contre la loi de tiers exclu).

Un dernier point pour conclure ce commentaire sur les contraintes imposées aux foncteurs de conjonction et de disjonction : nous avons imposé (§4, condition (7)) comme condition pour qu'un foncteur soit disjonctif que la loi d'addition, à droite ou à gauche, soit valide (plus exactement : la règle d'addition). D'aucuns -surtout des philosophes d'obédience oxonienne- ont repoussé cette règle. Chandler (C:16, p.36n.) rejette les exemples allégués par les partisans de la règle, comme 'le Panama est en Amérique ou je suis le Roi de Perse' (son exemple c'est '... or I am a monkey's uncle'); il affirme qu'il s'agit là d'un idiome, d'une phrase courante toute faite. Mais cette réponse est inadéquate, car il y aurait une infinité de telles phrases soi-disant toutes faites, comme '...ou le Soleil est froid', '...ou je suis un ours', '...ou tout est faux', '...ou trois fois trois c'est huit', etc.). Toutes ces expressions ne sont pas pareillement heureuses, du point de vue pragmatique, mais sémantiquement elles sont toutes vraies (les unes, sans doute, plus que les autres).

§8.- Nous abordons maintenant l'étude des foncteurs conditionnels. Un foncteur \$ est conditionnel ssi :

1) /p$p/ est désigné pour chaque p.
2) Si /p$q/ est désigné et /q$r/ est désigné, alors /p$r/ est désigné.
3) Il y a quelque p tel que , pour quelque q, /p$q/ est désigné et /q$p/ n'est pas désigné.
4) Si /p/ est désigné et /p$q/ est désigné, /q/ est désigné.
5) Si /p/ est fortement désigné et /p$q/ est désigné, /q/ est fortement désigné.
6) Si /p/ est surdésigné et /p$q/ est surdésigné, /q/ est surdésigné.
7) Si /p$q/ est désigné et /q/ fortement antidésigné, /p/ est fortement antidésigné.
8) Si /p$q/ est désigné, alors une de ces conditions-ci est vraie :
   a) /q/ est une valeur antidésignée seulement si /p/ est une valeur antidésignée;
   b) /q/ est non désigné seulement si /p/ est non désigné.

Des foncteurs qui remplissent ces huit conditions sont : C, G, C̲, D, DD, D̲, plus la famille de foncteurs d̈, d̂, d̈d̈, d̈d̈, etc. Aussi les foncteurs 'cc', 'c'.

Un conditionnel$est simple ssi il satisfait :

9) Si /p/ est la valeur minimale , /p$q/=/q/.
10) Si /q/ est la valeur maximale, /p$q/=q.
11) Si /q/ est désigne, /p$q/ est désigné.

Des conditionnels simples sont : C, C̲, G, c.

Un foncteur conditionnel$ est naturel ssi il remplit, outre les conditions (1) à (8), celles-ci :
12) /ppq$q/ est désigné, pour tout p et q.
13) /p$(q$r)$.p$q$.p$r/ est désigné, pour tout p, q, r.
14) Si § est une négation simple ou une surnégation, alors /p$§p$§p/ est désigné.
15) Si § est une conjonction fondamentale, alors pour tout p,r et tout q, /pq.p§r$q/ est désigné.
16) Si § est une disjonction fondamentale, alors pour chaque p, q et r, /pq.p$.q§r/ est désigné.

Les conditionnels suivants sont naturels : C, C̲, G, D, DD, D̲, c. En revanche, 'cc' n'est pas naturel (il ne satisfait pas la condition (14) pour la négation simple la formule '$\frac{1}{2}$ccN$\frac{1}{2}$ccN$\frac{1}{2}$' n'a pas de valeur désignée, bien entendu).

Un conditionnel normal est un conditionnel$simple et naturel qui satisfait, au surplus, les conditions :
17) Si § est une disjonction naturelle, alors pour chaque p et chaque q /p$q§.q$p/ est désigné.
18) Pour tout p, q, r, /p$.q$r/=/q$.p$r/=/p§q$r/, où § est une conjonction fondamentale.
19) /ppq/=/q/
20) /p$.p$q/=/p$q/
21) /p$.q$p/ est désigné.
22) /p$.p$q$q/ est désigné.
23) /pqp$p/ est désigné.
24) /p$.q°r/=/p$q°.p$r/ est désigné, si ° est soit une conjonction fondamentale, soit une disjonction fondamentale.
25) /p°q$r/=/p$r§.q$r/ (si ° est une conjonction fondamentale et § une disjonction fondamentale, ou vice versa) est désigné.

Cet ensemble de conditions paraît caractériser uniquement deux seuls foncteurs : 'C' -le conditionnel fort usuellement employé dans nos déductions- et le conditionnel gödelien 'c'. Nous introduisons la notion de <u>conditionnel</u>

commun tout conditionnel normal$ qui satisfait la condition :

26) Si § est une disjonction fondamentale, il y a un foncteur de négation forte ou surnégation £ tel que /p$q/= =/£p§q/.

Le seul foncteur conditionnel commun de As est 'C'.

§9.- Nous introduirons dans ce paragraphe les notions de foncteur quasi-conditionnel et de foncteur pseudo-conditionnel.

Un foncteur quasi-conditionnel (ou conditionnel-faible) est un foncteur dyadique $ tel que :

1) Si /p$q/ est désigné et /p/ fortement désigné, /q/ est désigné.
2) Si /p$q/ est désigné et /q/ fortement antidésigné, /p/ n'est pas fortement désigné et /p/ est antidésigné.
3) Si /p/ est antidésigné, /p$q/ est désigné.
4) Si /q/ est désigné, /p$q/ est désigné.
5) Si /p/ n'est pas désigné, /p$q/ n'est pas antidésigné.
6) /p$p/ est désigné.
7) Il y a quelques p et q tels que /p$q/ est désigné et /q$p/ n'est pas désigné.
8) /pq.qr.p$r/ est désigné pour chaque p, q, r.

Un foncteur qui satisfait ces huit conditions c'est 'Z'.

On appellera 'foncteur filtrant' un foncteur assertif § possédant les caractéristiques indiquées dans la protase de la condition (10) des conjonctions (vid. plus haut, §3, p. 40) et tel que, pour quelque p, /p/ est désigné et /§p/ est fortement antidésigné. Alors on dit d'une valeur u qu'elle est §-désignée ssi : /p/=u seulement si /§p/ est désigné. Cela étant, on dira d'un foncteur dyadique $ qu'il est un pseudo-conditionnel ssi :

1) /p$p/ est désigné.
2) Pour quelques p, q, /p$q/ est désigné et /q$p/ n'est pas désigné.
3) Si /p$q/ et /q$r/ sont désignés, /p$r/ est désigné.
4) Si /p/ n'est pas §-désigné, /p$q/ n'est pas antidésigné.
5) /p$.q$p/ est désigné.
6) Si /p$q/ est désigné et /p/ est §-désigné, /q/ est §-désigné.
7) Si /q/ est §-désigné, /p$q/ est désigné.

Les quatre foncteurs suivants sont pseudo-conditionnels : Q, QQ, R, RR. Les foncteurs filtrants par rapport auxquels ces pseudo-conditionnels sont définis comme tels sont : 'P' pour les deux premiers; 'F' pour les deux derniers.

§10.- Nous examinerons dans ce paragraphe la notion d'implication et celles d'implication stricte et d'implication parfaite. Ce que nous voulons véhiculer par le terme 'implication' se rapproche de ce que les logiciens de langue anglaise appellent 'entailment'. Le terme anglais 'implication' nous le traduisons comme 'entraînement' (et, de même, 'strict implication' comme 'entraînement strict'). En vertu de notre extensionalisme, nous ne faisons pas de différence entre des foncteurs d'entraînement et des conditionnels : tout conditionnel, simple ou non, naturel ou non, est un foncteur d'entraînement, car tout conditionnel, selon la condition (4) du §8, possède la qualité du MP. De préférence, cependant, nous parlons d'entraînement dans le cas du conditionnel commun, par sa plus grande utilité et efficacité déductive dans la plupart des cas. Un foncteur d'entraînement strict est le foncteur 'G', qui n'est pas normal (au sens que nous avons défini, à ne pas confondre avec des acceptions de ce terme employées d'ordinai re à propos des systèmes de logique multivalente, véhiculant une notion qui nous semble d'une moindre importance et, du reste, problématique). 'G' est à 'C' à peu près comme le conditionnel de Lewis (et, plus concrètement, de S5) est au conditionnel "matériel" ou frégéen. La différence principale entre un conditionnel normal et un conditionnel strict, comme 'G', réside dans le fait qu'un conditionnel strict ne satisfait pas les conditions (17), (18), (21), (22), (23), (24), (25).

Cela dit, venons-en aux foncteurs implicatifs. Ces foncteurs expriment un lien vérifonctionnel plus étroit que les autres conditionnels, qu'ils soient normaux ou stricts. Un foncteur implicatif est un conditionnel $ tel que :

1) Si § est une négation simple, /p$q/=/§q$§p/.
2) Si § est une conjonction et ° une disjonction, alors il y a au moins trois valeurs de vérité w, w' et w" telles que, si /p/=w, /q/=w', /r/=w", aucune des valeurs suivantes n'est désignée : /p$q°.p$Ψq/ (où 'Ψ' est un foncteur quelconque de négation naturelle); /p$.q$p/; /p$.p$q$q/; /p$(q$r)$.q$.p$r/; /p§qr.p$.q$r/.

Les foncteurs suivants remplissent toutes ces conditions : D, DD, <u>D</u> et cc. Une implication naturelle est un conditionnel naturel $ qui est, par surcroît, une implication et qui satisfait les conditions suivantes :

3) Si § est une négation naturelle et /p$q/ est désigné, alors /p$§q/ est antidésigné.
4) Il y a au moins deux valeurs de vérité w et w' telles que si /p/=w et /q/=w', alors la valeur suivante n'est pas désignée : /(p$q)$.p$.p$q/.

Toutes les implications ci-dessus énumérées, sauf 'cc', sont des implications naturelles (le foncteur 'cc', outre qu'il n'est pas un conditionnel naturel, ne satisfait aucune des conditions (3) et (4)).

Une implication stricte est un foncteur $ d'implication naturelle pour lequel il n'y a aucun foncteur disjonctif ° tel que, pour chaque p et q, /p$q°.q$p/ soit désigné. 'DD' et '<u>D</u>' sont deux foncteurs d'implication stricte.

Une implication $ est parfaite si elle remplit cette condition : /p$q/ et /q$p/ sont désignés tous les deux ssi /p/=/q/. Le seul foncteur d'implication parfaite c'est '<u>D</u>'.

Comme on le voit, il n'y a pas non plus de coïncidence entre notre notion d'implication et la conception de 'entailment' des logiciens relevants. Toutefois, il y a une certaine parenté entre ces notions, puisqu'elles demandent toutes les deux des conditions plus strictes que l'entraînement strict, et notamment la non-validité d'un certain nombre de théorèmes. Néanmoins, les logiciens relevants entendent formaliser l'idée de Moore comme quoi p implique q ssi p est déduisible à partir de ce que q. Ce lien entre implication et déduisibilité s'explique dans une logique où précisément le MP est l'apanage de l'implication; pour nous, en revanche, tout foncteur conditionnel, implicatif ou non, possède la qualité du MP. La divergence principale entre les deux approches réside dans l'admission ou le rejet des preuves par réduction à l'absurde (ex absurdo quodlibet). Dans <u>As</u> on peut avoir le principe 'ex absurdo quodlibet' parce que <u>As</u> possède une foule de foncteurs négatifs, si bien qu'une contradiction n'entraîne pas forcément n'importe quoi, mais une surcontradiction entraîne bien n'importe quoi. La logique relevante dialectique de Routley et Meyer, qui entend, elle aussi, reconnaître la contradictorialité du réel, évite la saturation par un procédé alternatif : affaiblir les règles d'inférence (investir du MP le seul foncteur d'implication, un foncteur qui grosso modo pourrait correspondre au foncteur 'DD' de As si on élimine de ce système tous les foncteurs à l'exception de 'DD', '+' et 'N'; cette correspondance n'est pourtant qu'approximative, et elle devrait faire l'objet d'une investigation plus poussée que nous n'aborderons pas dans cette étude). A nos yeux, le principe 'ex absurdo quodlibet' -ou version de la loi de Pseudo-Scot pour la surnégation- est un principe intuitivement plausible dont l'abandon serait un sacrifice douloureux.

Mais le principe en question ne constitue pas la seule divergence entre les deux approches. Une autre, non moins importante, concerne le principe d'assertion "pC.qCp" -ou sa version stricte : BpG.qGp-. Pour nous c'est un principe valide pour un foncteur d'entraînement pourvu de la qualité et de la règle du MP, quoique -de toute évidence- il ne s'agisse point d'un principe valide pour un foncteur implicatif. Nous avons constaté, d'une manière générale, que la grande majorité des thèses que Routley et Meyer rejettent (assertion, syllogisme disjonctif, antilogisme, exportation, le principe de Stalnaker -dans notre transcription : "pDDq+.pDDNq". commutation, la formule "p.q.(pDDq)DD.NpDDNq", la formule "pDD.pDDqDDq", expansion -i.e.: "pDD.p.q+.p.Nq"- et, naturellement, les soi-disant "paradoxes de l'implication matérielle" -de l'entraînement matériel serait une traduction plus adéquate- et même les bizarreries de l'entraînement strict) sont des non thèses de As, si nous nous rapportons seulement aux foncteurs susmentionnés ('DD', '+' et 'N'). La différence réside -rappelons-le- dans l'admission ou non d'autres foncteurs doués de qualités déductives plus fortes que celles de l'implication (stricte).

En dépit de ce désaccord, nous coïncidons pleinement avec le point de vue de R. Routley, V. Routley et RK. Meyer (R:7, chap. I), lorsqu'ils affirment :

> ... no rational logic is finitely many-valued. An n-valued logic can only distinguish n statements; yet entailmentally there are infinitely many non-equivalent statements. In any sequence of n+1 variables $p_1 \ldots p_{n+1}$ at least two of these must be assigned the same truth value in an n-valued logic. So -given that pDDp, since a correct entailment (and conditional) takes a designated value, and that a disjunction with a designated disjunct takes a designated value- the disjunction $(p_1DDp_2)+(p_1DDp_3)+\ldots+(p_1DDp_n)+(p_2DDp_1)+\ldots+(p_nDDp_{n-1})$ must hold good, for the reason that one component at least will have the same value as pDDp in an n-valued logic.

(Nous avons substitué notre notation à celle des auteurs). La critique nous paraît décisive et irrécusable. Signalons toutefois que la critique paraît valable seulement si l'implication est vérifonctionnelle -comme nous croyons qu'elle doit être-; si la vérifonctionalité devait être rejetée, une logique finiment polyvalente pourrait être conservée. Notre sémantique non seulement infinivalente, mais tensorielle nous met à l'abri de ces résultats inacceptables, puisque la classe des valeurs de vérité est un ensemble infini et, qui plus est, non pas totalement ordonné.

Aussi pouvons-nous constater des convergences fort importantes entre notre approche et l'approche relevante-dialectique, notamment en ce qui concerne l'implication. Une petite divergence secondaire concerne le principe d'augmentation que Routley et Meyer conservent seulement en forme de règle, tandis que dans As il est maintenu comme une thèse, même pour l'implication stricte : pDDqDD.p.rDDq. Une autre divergence plus sérieuse concerne le principe de Boèce, que notre approche incorpore (vid. plus haut : condition (3), p. 47). Ce principe, qui semble remonter à Aristote et qui est défendu de nos jours par le courant connexiviste. Le principe soutient que, si p implique q, il est faux (pas nécessairement qu'il soit tout à fait faux) que p implique non-q. S'il y a des vérités mutuellement contradictoires -et il y en a-, la conséquence du principe de Boèce -sur la base d'une version quelconque, si faible soit-elle, de la loi involutive de la négation, comme notre formulation dans le dernier alinéa de la p. 38- qu'il est faux que p implique p, si p est une vérité dont la négation est aussi vraie. Cela constitue une raison de plus (à verser au dossier de celles qui furent énumérés dans le chapitre précédent, §5, pp. 32-33) pour accorder d'office une valeur antidésignée à toute formule 'n 'D', si nous tenons à sauvegarder aussi le théorème "pDDpI.qDDq" (sémantiquement, il s'agit de sauver ce principe : pour tout p et q /pDp/=/qDq/). (Notons que dans le chapitre précédent nous parlions du foncteur 'I', i.e. du foncteur d'équivalence, non pas de l'implication; mais en vertu de notre définition de l'implication comme l'équivalence de l'antécédent et de la conjonction de l'antécédent et du conséquent, les deux problèmes se confondent). Aux arguments avancés pour étayer le principe de Boèce on a opposé le fait que les exemples invoqués concernent toujours des antécédents possibles, tandis que le principe apparaîtrait comme non valide si on l'instancie avec des exemples ayant pour antécédent une phrase non satisfaisable. Cette réponse, outre qu'elle nous semble philosophiquement erronée (par le clivage radical qu'elle établit entre le nécessaire et le contingent) n'est pas satisfaisante; car un principe plausible c'est que p implique p dans la même mesure où q implique q; si donc il y a -en vertu de la plausibilité du principe de Boèce pour des antécédents possibles ou satisfaisables, et admettant que tout fait, contradictoire ou non, qui soit réel est, a fortiori, possible- et qu'il existe (comme admet Routley) des situations contradictoires, alors il paraît juste d'affirmer que, pour tout p, il est (peu ou prou) faux que p implique p; et, par conséquent, si l'on admet les thèses : "pDqDD.pDp" et "pDqDD.NqDNp", la conclusion à tirer c'est que pour tout p et q "N(pDq)" est vrai; et, dans ce cas, le principe de Boèce est a fortiori vrai pour tous les cas.

Nous avons dit plus haut que les bizarreries des entraînements matériel et strict ne sont pas des thèses valides pour l'implication, telle que nous la concevons (et encore moins pour l'implication stricte). Toutefois, il faut admettre que des thèses de As peuvent être considérées comme, en quelque sens, des versions atténuées de ces bizarreries, comme, p.ex. : "Fp+.qDLp", "p+.pDq", "Bp+.qDDLp", "Jp+.pDDq", "BpDDL(qDDLp)", "pDL(qDLp)", "pDL(FpDq)", "FpDDL(pDDq)", etc. Il nous semble néanmoins que ces versions sont suffisamment nuancées, assouplies et mitigées pour ne pas tomber sous les coups des critiques adressées, à juste titre, au conditionnel matériel et au conditionnel strict comme expressions de la notion d'implication, critiques qui portaient sur des versions où n'intervenaient point des foncteurs comme 'plus ou moins' ('L'), 'foncièrement' ('B'). Ces nouvelles versions paraissent donc bénines.

§11.- Un biconditionnel est un foncteur dyadique $ tel que :

1) /p$p/ est désigné.
2) /p$q/=/q$p/
3) /p$q/ et /q$r/ sont désignés seulement si /p$r/ est désigné.
4) Si /p/ est désigné et /p$q/ est désigné, /q/ est désigné.
5) Si /p/ est fortement antidésigné et /p$q/ est désigné, /q/ est fortement antidésigné.
6) Il y a un foncteur conditionnel § et une conjonction fondamentale conj tels que /p$q/=/p§qconj.q§p/

Les foncteurs suivants sont biconditionnels : =, ≡, I, II, I, ∷, ∷.

Un foncteur pseudo-biconditionnel est défini, à partir des biconditionnels de manière analogue à la définition des pseudo-conditionnels à partir des conditionnels. 'M' est un foncteur pseudo-biconditionnel. (Alternativement on peut définir un foncteur pseudo-biconditionnel comme un foncteur $ tel qu'il y a un foncteur pseudo-conditionnel § et une conjonction fondamentale conj tels que /p$q/ = /p§qconj.q§p/).

Un foncteur biconditionnel $ est une équivalence ssi il y a une implication § telle que :

1) Il y a une conjonction fondamentale conj telle que /p$q/ = /p§qconj.q§p/.
2) Si r est une formule contenant une occurrence de p, et r' est le résultat de remplacer dans r l'occurrence en question de p par une occurrence de q, alors si /p/ est désigné et r' antidésigné, /p$q/ est antidésigné.
3) /p$q/=/q$p/.

Les foncteurs suivants sont des foncteurs d'équivalence : I, II, I.

Un foncteur d'équivalence $ est une équivalence parfaite ssi : /p$q/ est désigné ssi /p/=/q/. 'I' est la seule équivalence parfaite dans As.

§12.- Un foncteur surimplicatif est un foncteur $ qui:

1) /p$p/ est fortement antidésigné.
2) Si /p$q/ est désigné, /q$p/ est fortement antidésigné.
3) Si /p$q/ et /q$r/ sont désignés, /p$r/ est désigné.
4) Si /p$q/ et /p/ sont désignés, /q/ est désigné.
5) Si /p/ n'est pas désigné et /q/ est désigné, /p$q/ n'est pas fortement antidésigné.
6) Si /p$q/ est désigné, /q/ n'est pas fortement antidésigné.
7) Si /p$q/ est désigné, /p/ n'est pas fortement désigné.

Les foncteurs suivants sont surimplicatifs : %, %%, ?.

Un foncteur quasi-surimplicatif est un foncteur $ tel que :

1) /p$p/ est fortement antidésigné.
2) Si /p/ est fortement antidésigné et /q/ ne l'est pas, /p$q/ est désigné.
3) Si /p/ n'est pas désigné et /q/ est désigné, /p$q/ est désigné.
4) Si /q/ est fortement désigné et /p/ ne l'est pas, /p$q/ est désigné.
5) Ou bien /p$q/ est désigné, ou bien /q$p/ est désigné.
6) Si /p$q/ est désigné, /q/ n'est pas fortement antidésigné.
7) Si /p$q/ est désigné, /p/ n'est pas fortement désigné.

Le foncteur '%' est quasi-surimplicatif.

§13.- Pour clôturer ce chapitre, nous préciserons dans ce paragraphe la notion de valeur fortement antidésignée, introdui te au §1, p. 38, de ce même chapitre. Une valeur w est fortement antidésignée dans un système S si S contient un foncteur monadique \$ tel que :

1) Si /\$p/ est désigné, /p/ est antidésigné et n'est pas désigné.
2) Si /p/=w, /\$p/ est désigné.
3) S contient la règle d'inférence (a) ou la règle (b) :

a) \$p , §p ⊢ q.
 où § est un foncteur monadique tel que :
 i) Si /p/ est désigné, /§p/ est désigné;
 ii) Il y a quelque valeur w' telle que, si /q/=w', /q/ n'est pas désigné et cependant /§q/ est désigné.

b) \$p , p ⊢ q.

Dans la logique classique, la règle effectivement possédée est la règle (b) et le foncteur \$ la négation. Dans As, la règle possédée est (a), où \$=F et §=J. Dans la sémantique de As est fortement antidésigné tout tenseur aléthique ne contenant qu'un nombre fini d'items non nuls. Remarquons que notre définition nous empêche de tenir pour fortement antidésigné un tenseur comme $(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}...)$, en identifiant, p.ex., \$ à B̸ et § à B, car 'B' ne satisfait pas la condition (ii) pour les foncteurs § en question.

Chapitre 5.- UN ELARGISSEMENT DE LA SYLLOGISTIQUE SUR LA BASE DU SYSTEME A

§1.- La méthode de Hilbert et Ackermann (H:20, chap. II) et celle de Hasenjaeger (H:12, 1.3) nous permettent, en les appliquant à un calcul sententiel contradictoriel comme As, de formaliser un certain nombre de syllogismes valides, qui ne sont susceptibles de formalisation que dans le cadre d'un système paraconsistant (sauf dans le sens où, dans un système surconsistant, une prémisse contradictoire entraîne n'importe quoi).

Souvenons-nous que, à côté des phrases affirmatives et des phrases négatives, aussi bien universelles que particulières ou existentielles, il est possible d'introduire dans une logique contradictorielle des phrases affirmativo-négatives (ou mixtes). Au surplus, il est possible aussi d'introduire des phrases encore plus complexes, où la portée des foncteurs monadiques de semi-affirmation et semi-négation atteint non seulement le "prédicat" -au sens traditionnel- mais toute la phrase, y compris donc le quantificateur, si bien que la phrase est alors mixte non seulement par la qualité mais aussi par la quantité; il s'agit en somme de phrases semi-existentielles, dont la lecture est : 'il y a et il n'y a pas quelque ... qui ---'. Il s'agit donc de phrases commençant par le quantificateur flou 'Ŭx' -avec n'importe quelle variable à la place de x-. Nous nous bornerons cependant pour l'instant à des phrases soit strictement particulières, soit strictement universelles.

La méthode de Hilbert consiste dans l'interprétation des variables sententielles comme des classes, et de certaines occurrences de foncteurs du calcul sententiel comme des occurrences d'opérateurs formateurs de classes. A côté du complément d'une classe ('Np', par rapport à p), nous introduisons des semicompléments ('Sp'), qui englobent les éléments faisant partie en même temps d'une classe et de son complément.

Quant au foncteur conditionnel (pour être plus exacts, pseudo-conditionnel), nous avons choisi aussi bien 'O' que 'R'.

On trouvera plus bas les motifs de ce choix.

Une phrase universelle affirmativo-négative est la conjonction d'une phrase universelle affirmative et d'une phrase universelle négative. Ainsi, pour dire que chaque s est et n'est pas un p (ou qu'il est un p sans l'être), on peut écrire -selon un élargissement de la méthode de Hilbert-, soit "sRp..sRNp" (ou plus simplement "sRSp"), soit "sQp..sQNp" (ou plus simplement "sQSp"). En revanche, ce n'est que par rapport au symbolisme très imparfait d'un calcul semblable -commode pour sa simplicité, certes- que les phrases particulières affirmativo-négatives prennent ici la forme d'une conjonction d'une particulière affirmative et d'une particulière négative. A vrai dire, tandis que 'tous les mérites sont dignes d'éloge sans l'être' peut et doit se concevoir comme une conjonction de 'tous les mérites sont dignes d'éloge' et de 'aucun mérite n'est digne d'éloge', en revanche 'certains mérites sont dignes d'éloge sans l'être' n'est nullement la conjonction de 'certains mérites sont dignes d'éloge' et de 'certains mérites ne sont pas dignes d'éloge'; elle n'est pas non plus la conjonction de 'certains mérites sont dignes d'éloge' et de 'aucun mérite n'est digne d'éloge', cette dernière conjonction donnant lieu, au contraire, à une phrase semi-existentielle, qu'on doit lire : 'il est vrai et faux en même temps que certains mérites sont dignes d'éloge', ou bien 'il y a et il n'y a pas des mérites dignes d'éloge', i.e. : Ūx(<u>xmer</u>RN(<u>xlaud</u>)) (alternativement : Ūx(<u>xmer</u>QN(<u>xlaud</u>))). Cependant, de par la formalisation que -dans cette première approche- nous avons choisie, dans le sillage de Hilbert, 'il y a des choses qui sont des x et des y en même temps' équivaudrait à 'il y a des x et il y a des y'. Mais après cette exploration initiale de (l'applicabilité à une logique contradictoire de) la méthode de Hilbert, nous nous tournerons vers celle de Hasenjaeger, où de telles anomalies disparaissent.

§2.- Passons à l'exposé des nouveaux syllogismes correspondant à la I, à la III et à la IV Figures (q étant le terme moyen, s le sujet et p le prédicat. Nous n'exposerons effectivement qu'une des formalisations que nous avons choisies; le passage à l'autre est immédiat, en substituant dans les formules suivantes une occurrence de 'P' à chaque occurrence de 'f' et une occurrence de 'Q' à chaque occurrence de 'R' :

I.1.- qRSp.(sRq)R.sRSp
I.2.- qRSp.(sRSq)R.sRSp
I.3.- qRSp.s.qR.s.Sp
I.4.- qRSp.(s.Sq)R.s.Sp
I.5.- qRp.(sRSq)R.sRp
I.6.- qRp.s.SqR.s.p
I.7.- qRp.(SsRq)R.SsRp
I.8.- qRp.Ss.qR.Ss.p

I.7 et I.8 semblent avoir besoin d'une justification: dans la syllogistique traditionnelle il n'y avait pas d'énoncés contenant des termes complémentaires de sujet; dès lors, la conversion <u>per contrapositionem</u> qui conduisait de 'xCy' à 'NyCNx' n'allait pas sans susciter des scrupules, et ce pour des raisons légitimes, comme nous le verrons par la suite. En fait, si nous avons introduit des termes semicomplémentaires de sujet dans I.7 et I.8 c'est en vue de permettre certaines réductions de modes ne présentant pas pareille anomalie et appartenant à la III et à la IV Figures à des modes de la I.

III.1.- q.p.(qRSs)R.Ss.p
III.2.- q.(qRSp).(qRs)R.s.Sp
III.3.- qRSp.q.sR.s.Sp
III.4.- q.(qRSp).(qRSs)R.s.Sp
III.5.- q.(qRp).(qRSs)R.Ss.p
III.6 .- q.Sp.(qRSs)R.Ss.p
III.7 .- qRSp.q.SsR.s.Sp
III.8 .- qRp.q.SsR.Ss.p
III.9 .- q.Sp.(qRSs)R.s.Sp
III.10.- q.Sp.(qRSs)R.s.Sp

IV.1.- p.(pRq).(qRSs)R.Ss.p
IV.2.- p.(pRSq).(qRSs)R.Ss.p
IV.3.- p.q.(qRSs)R.Ss.p
IV.4.- p.Sq.(qRSs)R.Ss.p
IV.5.- p.(pRSq).(qRs)R.s.p
IV.6.- p.Sq.(qRs)R.s.p
IV.7.- Sp.q.(qRs)R.s.Sp

On aurait obtenu une liste beaucoup plus longue si l'on avait inclus, en outre, des énoncés des formes 'SsRSp', 'Ss.Sp' (alternativement : 'SsQSp'). Nous croyons pourtant pouvoir nous passer, dans le cadre limité de ce travail, de pareils énoncés, dont la lecture serait : 'toutes les choses (certaines choses) qui sont des s sans l'être sont des p sans l'être .

Dans la liste des syllogismes que nous proposons on a pu constater l'explicitation des présuppositions existentielles touchant le terme moyen dans III.2, III.4 et III.5, ainsi que celles touchant le terme majeur dans IV.1, IV.2 et IV.5; ces six syllogismes, de même que darapti, bamalip, felapton et fesapo doivent être formalisés au moyen de trois prémisses.

§3.- Venons-en au problème du choix du foncteur conditionnel. Dans la Section IV du Livre I nous avons considéré quelques aspects d'une représentation formelle d'un fragment de la langue naturelle par le biais d'une extension conservative de Am. Mais nous n'avons pas soulevé le problème de la représentation adéquate des formules quantifiées, comme 'tous les x sont y', (ou tous les s sont p). Et pourtant peu d'expressions de la langue naturelle sont aussi multivoques que celles de ce type. Soit la phrase (1) :

(1) Tous les poissons sont des vertébrés

Par (1) on peut entendre, entre autres, les choses suivantes:

(2) Pour tout x, x est un poisson seulement si x est un vertébré.
(3) Pour tout x, il est plutôt vrai que x est un poisson seulement s'il est plutôt vrai que x est un vertébré.
(4) Pour tout x, il est plus qu'un rien vrai que x est un poisson seulement s'il est plus qu'un rien vrai que x est un vertébré.
(5) Pour tout x, x est un poisson pour autant seulement que x est un vertébré.
(6) Pour tout x, il est foncièrement plus qu'un rien vrai que x est un poisson seulement s'il est foncièrement plus qu'un rien vrai que x est un vertébré.
(7) Pour tout x, il est foncièrement plutôt vrai que x est un poisson seulement s'il est foncièrement plutôt vrai que x est un vertébré.

Chacune de ces paraphrases capture un message que l'on peut véhiculer en prononçant (1). Puis donc que ces messages ont des budgets inférentiels différents les uns des autres, on voit bien que la syllogistique formelle peut être développée selon des lignes divergentes. Parmi ces diverses lectures, cependant, celles qui nous semblent devoir être retenues comme reflétant les sens ordinairement visés par les locuteurs de la langue naturelle sont (3) et (4). En affirmant cela, nous ne voulons pas dire que chaque phrase-échantillon comme (1) ait une structure profonde comme (3) ou (4), car il y a dans la langue naturelle, pour des raisons d'économie, des procédés d'ambiguation permettant de biffer les différences profondes entre (2), (3), (4), (5), (6) et (7) (en bien d'autres formules encore) pour obtenir (1). Notre avis c'est néanmoins que, dans les contextes d'élocution usuels, (3) et (4) sont de beaucoup les plus souvent visés.

Nous avons donc choisi les foncteurs 'Q' et 'R' dans notre représentation formelle de la syllogistique. Or ce faisant nous bannissons tous les syllogismes qui ne peuvent se réduire à des modes de la I Figure que par la conversion qui va de 'aucun s n'est p' à 'aucun p n'est s' : toute la II Figure, en plus de calemes, fesapo et fresison. Ce désavantage peut être compensé en autorisant, précisément pour ces cas-là, le remplacement de 'R' par 'D' (c-à-d en supposant que la paraphrase à appliquer dans de tels cas est (5), et non pas (3) ou (4)). Un inconvénient de 'D' c'est, tout d'abord, le fait que $/sDSp/_i$ ne peut être un item aléthique non nul que lorsque $/p/_i$ est un item aléthique non plein, ce qui signifie que des choses qui, à un certain point de vue, seraient entièrement des s ne pourraient jamais être considérées comme des semi-p, alos qu'on veut dire que, p.ex., bien des actions tout à fait matériellement profitables -à certains égards tout au moins- pour celui qui les accomplit sont et ne sont pas moralement bonnes. D'une manière plus générale, on peut indiquer que le désavantage de 'D' pour la représentation formelle des phrases universelles affirmatives (des phrases du type SaP, dans la représentation traditionnelle) c'est qu'on peut dire que tous les x sont des y sans vouloir dire que x est un sous ensemble, au sens fort, de y, i.e. sans vouloir dire que chaque (membre de) x est forcément un (membre de) y dans une mesure non inférieure à celle où il est (membre de) x. Ainsi, p.ex., s'il est vrai de dire que tous les Valenciens sont Espagnols, il n'empêche que quelqu'un peut être beaucoup plus Valencien qu'il n'est espagnol; la phrase en question ne peut donc nullement être traduite -si l'on veut en conserver la vérité- comme : 'pour tout x, x est valencien pour autant seulement que x est espagnol'. C'est pourquoi le modus tollens simple n'est pas ici applicable.

Pareillement, on peut dire que tous les amoureux sont heureux sans l'être, en se fondant sur le fait que, quels que soient par ailleurs ses malheurs, quiconque est plus qu'un rien (alternativement : au moins à moitié) amoureux possède toujours plus qu'un rien (alternativement : au moins à moitié) une joie, celle d'aimer; et que, quelles que puissent être par ailleurs ses jubilations, il connaît aussi plus qu'un rien (alternativement : au moins à moitié) un certain malheur, l'amour renfermant une passion et un désir jamais assouvis. (Tout cela a été fort bien vu par certains poètes, comme Du Bellay; cf. l'Annexe N° 1 du Livre III de cette étude; si nous en parlons ici c'est pour qu'on puisse se rendre compte que nos constructions formelles ne sont pas le produit des lucubrations d'un logicien détaché du réel et de la pensée intuitive). Or, en affirmant cela on ne voudrait sûrement pas dire que quiconque est amoureux est, au moins dans la même mesure où il l'est, heureux et non heureux, car il s'ensuivrait que personne n'est assez amoureux (c-à-d que personne n'est plus qu'à moitié amoureux), car la formule suivante est un théorème de Am : Ux,y,z(xyDS(xz)DPN(xy)). Il serait, dès lors, plutôt faux qu'il y ait des gens amoureux, ce qui est certainement insensé.

Pour ce qui est du foncteur 'C' (i.e. d'une lecture comme (2)), il est de peu d'intérêt, vu que, selon Am, chaque chose possède, dans une mesure ou dans une autre, toutes les propriétés : tout syllogisme en barbara aurait alors une conclusion vraie et, par suite, serait oiseux.

Toujours est-il que les syllogismes que nous avons représentés au moyen des pseudo-conditionnels 'R' et 'Q' peuvent être aussi représentés au moyen du foncteur implicatif

'D'. Mais l'inverse n'est pas vrai, puisque la loi de contraposition n'est pas valide -si le foncteur de négation employé est la négation simple- pour les foncteurs pseudoconditionnels 'R' et 'Q', tandis qu'elle est valide pour l'implication. Il y a donc une différence de <u>force</u>, si l'on peut dire, entre les syllogismes qui peuvent être formalisés aussi bien par 'R' et 'Q' que par 'D' et ceux qui ne peuvent l'être que par 'D'. Et cette différence de force explique peut-être le caractère quelque peu malaisé des syllogismes de la II Figure et, en général, de bien des raisonnements basés sur le principe de contraposition: ils jouissent d'une clarté et d'une évidence inférieures et ils peuvent avoir l'air de n'être que des sophismes, ce qui, naturellement, n'est pas juste (n'est pas juste si l'on interprète les mots d'une manière adéquate). La gêne qu'on éprouve souvent devant un syllogisme, pourtant valide (sous une certaine interprétation, il faut le répéter) comme ce syllogisme-ci en camestres :

M. Tout ce qui est composé est causé
m. L'absolument nécessaire n'est pas causé
c. L'absolument nécessaire n'est pas composé

cette gêne, donc, s'explique aisément par ce critère de force.

§4.- Nous pourrions élargir le nombre des syllogismes contradictoires en introduisant des syllogismes de la II Figure. Sans inclure aucune conclusion contenant des termes complémentaires ou semi-complémentaires de sujet, nous obtenons :

II.1 .- pDq.(sDSq)C.sDNp
II.2.- pDNq.(sDSq)C.sDNp
II.3 .- pDSq.(sDq)C.sDNp
II.4 .- pDSq.(sDNq)C.sDNp
II.5 .- pDSq.(sDSq)C.sDNp
II.6 .- p+NpDq.(sDNq)C.sDSp
II.7 .- pDSq.(NpDq).(sDNq)C.sDSp
II.8 .- p+NpDSq.(sDNq)C.sDSq
II.9 .- p+NpDNq.(sDq)C.sDSp
II.10.- p+NpDSq.(sDq)C.sDSp
II.11.- pDq.(NpDSq).(sDNq)C.sDSp
II.12.- pDNq.(NpDSq).(sDq)C.sDSp
II.13.- pDSq.(NpDNq).(sDq)C.sDSp
II.14.- p+NpDq.(sDSq)C.sDSp
II.15.- p+NpDSq.(sDSq)C.sDSp
II.16.- pDSq.(NpDq).(sDSq)C.sDSp
II.17.- pDq.(NpDSq).(sDSq)C.sDSp
II.18.-p+NpDq.(sDSq)C.sDSp
II.19.- p+NpDSq.(sDSq)C.sDSp
II.20.- pDSq.(NpDNq).(sDSq)C.sDSp
II.21.- pDNq.(NpDSq).(sDSq)C.sDSp

Cette liste pourrait être allongée en introduisant des énoncés particuliers dans la mineure, ou bien en formulant des syllogismes semblables aux II;1-II.5 mais où le sujet de la majeure serait constitué par 'Np' (terme complémentaire de sujet). On pourrait aussi introduire dans certaines prémisses des termes semi-complémentaires de sujet. Pareillement, si l'on avait appliqué cet ensemble de procédés aux trois autres figures, on aurait pu aussi obtenir un nombre plus considérable de syllogismes. Il faut relever, du reste, qu'on pourrait formaliser tous les syllogismes de la II Figure, sans les rendre sophistiques, en gardant comme foncteur conditionnel soit 'R' soit 'Q', pourvu que, dans ce cas, on représente la négation non pas de la manière simple et naturelle comme 'N', mais d'une manière plus tortueuse, comme 'bN' et 'PN' respectivement (qu'on peut lire, respectivement, comme : 'il est infiniment faux que' -ou, ce qui revient au même, comme : 'il n'est point ou guère vrai que'-; et comme : 'il est assez faux que' -ou, ce qui revient au même, comme : 'il est plus faux que vrai que'-). Sans cette interprétation de la négation, on doit rejeter comme paralogismes les syllogismes qui emploient quelque forme du MT si l'on vise les rôles sémantiques les plus courants de la construction 'tous les ... sont ---' (les rôles (3) et (4) du §3).

Comme notre but n'est pas d'obtenir des filigranes tarabiscotées dans un développement purement formel et que nous avons reconnu que la base intuitive des modes, vieux comme nouveaux, de la II Figure est plus mince que celle des syllogismes qui se fondent sur le MP (et c'est bien ce qui a provoqué le rejet de toutes les formes du MT dans certains systèmes de logique), nous ne reviendrons pas par la suite sur ces raisonnements (dont plusieurs ne sont pas, du reste, des syllogismes à proprement parler, car ils contiennent trois prémisses; mais sur ce point ils sont dans la même position que les syllogismes qui, sans aucune prémisse particulière, ont une conclusion particulière).

§5.- Nous essayerons de formaliser les 25 syllogismes que nous avons formulés au §2 selon la méthode de Hasenjaeger. Nous procédons aux remplacements suivants :

tout s est p sans l'être	devient SuP
quelque s est p sans l'être	devient SyP
toute chose qui est s sans l'être est p	devient SäP
quelque chose qui est s sans l'être est p	devient SöP

Nous formulons ainsi les règles suivantes :

(1) $\frac{\text{SaM} \quad \text{MuP}}{\text{SuP}}$ (2) $\frac{\text{SuM} \quad \text{MuP}}{\text{SuP}}$ (3) $\frac{\text{SiM} \quad \text{MuP}}{\text{SyP}}$

(4) $\frac{\text{SyM} \quad \text{MuP}}{\text{SyP}}$ (5) $\frac{\text{SuM} \quad \text{MaP}}{\text{SaP}}$ (6) $\frac{\text{SyM} \quad \text{MaP}}{\text{SiP}}$

(7) $\frac{\text{SaM} \quad \text{MaP}}{\text{SäP}}$ (8) $\frac{\text{SöM} \quad \text{MaP}}{\text{SöP}}$

Nous ajoutons des règles de "conversion" ((a) à (h)) plus une règle de démembrement ((i)) :

(a) $\frac{\text{SuP}}{\text{PöS}}$ (b) $\frac{\text{SaP}}{\text{PiS}}$ (c) $\frac{\text{SyP}}{\text{PöS}}$ (d) $\frac{\text{SöP}}{\text{PyS}}$ (e) $\frac{\text{SiP}}{\text{PiS}}$ (f) $\frac{\text{SuP}}{\text{PiS}}$

(g) $\frac{\text{SyP}}{\text{PiS}}$ (h) $\frac{\text{SöP}}{\text{PoS}}$ (i) $\frac{\text{SuP}}{\text{SaP}}$

Les huit premières règles coïncident avec les huit syllogismes que nous avons ajoutés à la I Figure.

Formulons tout de suite une fort importante réserve quant à la validité des règles (a), (b) et (f) : ces trois règles ne sont pas valides, absolument parlant; elles sont seulement des règles admissibles dans le cadre d'une affirmation préalable, expresse ou tacite, de la phrase : 'il y a des membres de s' (c-à-d, soit 'il y a quelque x dont il est plutôt vrai qu'il est (membre de) s', soit : 'il y a quelque x dont il est plus qu'un rien vrai qu'il est (membre de) s'; en notation symbolique : 'Exf(xy)' et 'ExP(xy)', respectivement -si 'y' désigne le référent du 'S' de la représentation traditionnelle-). Nous n'admettons donc pas les inférences par subalternation; ou -plus exactement- nous les admettons comme de simples <u>enthymèmes</u>.

La justification des douze, parmi ces quinze règles, que nous admettons comme (inconditionnellement) valides se trouve dans <u>Am</u>. Voici les représentations (alternatives) formelles de ces diverses règles d'inférence selon la notation symbolique de <u>Am</u> :

'SaP'	:	ou bien	'Ux(xyQxz)'	ou bien	'Ux(xyRxz)'
'SiP'	:	"	'ExP(xy.xz)'	"	'Exf(xy.xz)'
'SäP'	:	"	'Ux(S(xy)Qxz)	"	'Ux(S(xy)Rxz)'

'SoP' : ou bien 'ExP(xy.N(xz))' ou bien 'Exf(xy.N(xz))'
'SuP' : " 'Ux(xyQS(xz))' " 'Ux(xyRS(xz))'
'SöP' : " 'ExP(S(xy).xz)' " 'Exf(S(xy).xz)'

Nous exposerons maintenant des règles d'inférence dérivées de Am qui se trouvent précisément coïncider avec les règles syllogistiques à justifier ; nous n'exposerons que des versions en 'f' et 'R', mais les mêmes règles sont valides si l'on substitue à chaque occurrence de 'f' une occurrence de 'P', et à chaque occurrence de 'R' une occurrence de 'Q' :

$$(1)\frac{BUx(xyRxz) \quad , \quad BUx(xzRS(xu))}{BUx(xyRS(xu))} \qquad (2)\frac{BUx(xyRS(xz)) \quad , \quad BUx(xzRS(xu))}{BUx(xyRS(xu))}$$

$$(3)\frac{BExf(xy.xz) \quad , \quad BUx(xzRS(xu))}{BExf(xy.S(xu))} \qquad (4)\frac{BExf(xy.S(xz)) \quad , \quad BUx(xzRS(xu))}{BExf(xy.S(xu))}$$

$$(5)\frac{BUx(xyRS(xz)), \quad BUx(xzRxu)}{BUx(xyRxu)} \qquad (6)\frac{BExf(xy.S(xz)), \quad BUx(xzRxu)}{BExf(xy.xu)}$$

$$(7)\frac{BUx(S(xy)Rxz), \quad BUx(xzRxu)}{BUx(S(xy)Rxu)} \qquad (8)\frac{BExf(S(xy).xz) \quad , \quad BUx(xzRxu)}{BExf(S(xy).xu)}$$

$$(a)\frac{BUx(xyRS(xz))}{BExf(S(xz).xy)} \qquad (b)\frac{BUx(xyRxz)}{BExf(xz.xy)} \qquad (c)\frac{BExf(xy.S(xz))}{BExf(S(xz).xy)}$$

$$(d)\frac{BExf(S(xy).xz)}{BExf(xz.S(xy))} \qquad (e)\frac{BExf(xy.xz)}{BExf(xz.xy)} \qquad (f)\frac{BUx(xyRS(xz))}{BExf(xz.xy)}$$

$$(g)\frac{BExf(xy.S(xz))}{BExf(xz.xy)} \qquad (h)\frac{BExf(S(xy).xz)}{BExf(xz.N(xy))} \qquad (i)\frac{BUx(xyRS(xz))}{BUx(xyRxz)}$$

Comme on le voit toutes ces règles sont des règles d'inférence valides de Am, hormis (a), (b) et (f), qui ne sont que conditionnellement valides. Mais nous présupposerons toujours dans ces raisonnements les prémisses suivantes : BExf(xy) , BExf(xz), BExf(xu). Avec ces trois prémisses supplémentaires, ces trois règles deviennent valides, même si l'on intervertit les positions de y et de z ou si l'on substitue u à y.

Venons-en à la réduction des syllogismes de la III et de la IV Figure à des syllogismes de la I : A I,1 se réduit IV.1 comme suit :

$$\cfrac{\cfrac{PaM \qquad MuS}{PuS}}{SöP}$$

IV.2 se réduit à I.2 comme suit :

$$\cfrac{\cfrac{PuM \qquad MuS}{PuS}}{SöP}$$

III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.6, III.7 et IV.3 se réduisent à I.3 :

$$(III.1)\cfrac{\cfrac{\cfrac{MiP}{PiM} \qquad MuS}{PyS}}{SöP} \qquad (III.2)\frac{MuP \qquad \cfrac{MaS}{SiM}}{SyP}$$

$$(III.3)\frac{MuP \qquad \cfrac{MiS}{SiM}}{SyP} \qquad (III.4)\frac{MuP \qquad \cfrac{MuS}{SiM}}{SyP} \qquad (III.7)\frac{MuP \qquad \cfrac{MyS}{SiM}}{SyP}$$

$$(III.5)\cfrac{\cfrac{\cfrac{MaP}{PiM} \qquad MuS}{PyS}}{SöP} \qquad (III.6)\cfrac{\cfrac{\cfrac{MyP}{PiM} \qquad MuS}{PyS}}{SöP} \qquad (IV.3)\cfrac{\cfrac{PiM \qquad MuS}{PyS}}{SöP}$$

IV.5 se réduit à I.5 et IV.6 se réduit à I.6 comme suit :

(IV.4) $\dfrac{\dfrac{PyM \qquad MuS}{PyS}}{S\ddot{o}P}$ (IV.5) $\dfrac{\dfrac{PuM \qquad MaS}{PaS}}{SiP}$

Enfin, III.8, III.9, III.10, et IV.7 se réduisent à I.8 :

(III.8) $\dfrac{MaP \qquad \dfrac{MyS}{S\ddot{o}M}}{S\ddot{o}P}$ (III.9) $\dfrac{\dfrac{\dfrac{MyP}{P\ddot{o}M} \qquad \dfrac{MuS}{MaS}}{P\ddot{o}S}}{SyP}$ (III.10) $\dfrac{\dfrac{\dfrac{MyP}{P\ddot{o}M} \qquad MaS}{P\ddot{o}S}}{SyP}$

(IV.7) $\dfrac{\dfrac{P\ddot{o}M \qquad MaS}{P\ddot{o}S}}{SyP}$

§6.- Pour le cas où, parmi les lecteurs de cette étude, il se trouverait, d'aventure, quelque amateur des vieux procédés mnémotechniques -et sans guère espérer avoir du succès à cet égard- nous avons inventé des noms pour les nouveaux syllogismes de la I, de la III et de la IV Figures. Malheureusement, leur phonétique aurait heurté péniblement les oreilles de l'auteur des <u>Summulae Logicales</u>, le portugais Pierre d'Espagne. Voici donc la liste de ces noms : De la I^{e} Figure (l'ordre est le même que dans la liste ci-dessus) : I.1=Gularu; I.2=Lubruntu; I.3=Murtily; I.V=Nubyry; I.5=Parluta; I.6=Radyli; I.7=Salärtä; I.8=Tabörö. De la III^{e} Figure : III.1=Misumböx; III.2=Murlapy; III.3=Mublisty; III.4=Muluppry; III.5=Mapumöx; III.6=Myssumöx; III.7=Murtyssy; III.8=Tadyxö; III.9=Tyxumyxorum; III.10=Tyxambyx. De la IV^{e} Figure : IV.1=Gadumöpp; IV.2=Lumurlöpp; IV.3=Mildumöx; IV.4=Nyrtumöx; IV.5=Pumantip; IV.6=Rymbalbis; IV.7=Tölgamyx. L'explication de l'emploi aussi bien des majuscules initiales que des minuscules m, s et p est la même que pour la logique tratidionnelle (cf., p.ex. S:3, p. 142), mais trois précisions s'imposent : 1°, le x indique l'emploi d'une des règles réciproques (c) et (d); 2°, le redoublement d'un p indique l'emploi soit de (a), soit de (b), soit de (f), tandis que le redoublement d'un s indique l'emploi de (g); 3° le suffixe de III.9 indique l'emploi de la règle (i) -règle de démembrement-; tout cela, bien entendu, dans la réduction de chacun de ces modes à des modes de la I^{e} Figure.

Il faut aussi élucider ce que l'on entend par 'réduction' : un mode est réduisible à un autre si les prémisses du second peuvent être obtenues à partir de celles du premier, et que la conclusion du second entraîne la conclusion du premier.

Bien que nous ayons choisi la méthode de Hasenjaeger à cause de son maniement pratique aisé et du fait qu'elle distingue soigneusement les syllogismes inconditionnellement valides de ceux qui ne le sont pas (de ceux qui sont de simples enthymèmes, car ils présupposent des prémisses existentielles), nous devons signaler l'existence d'une méthode élégante pour la représentation formelle de la syllogistique : celle de Lukasiewicz (L:22 et L:23). Cette méthode, dans son application à la syllogistique traditionnelle, n'a besoin que de deux syllogismes primitifs (Barbara et Datisi), plus deux règles d'identité ou prémisses valides : SaS et SiS, sans aucune autre règle de conversion ou de subalternation. On pourrait aussi étendre la méthode de Lukasiewicz pour inclure les nouveaux syllogismes contradictoires. Ceci serait d'autant plus intéressant que ce fut Lukasiewicz qui mit en lumière le fait que, d'après Aristote, la syllogistique peut se passer du principe de non-contradiction, se fondant sur le principe 'dictum de omni et de nullo' (cf. à cet égard L:21 cité par Arruda dans

A:11, p.9). Une autre méthode facilement adaptable à <u>As</u> et= qui pourrait, elle aussi, servir à la formalisation des syllo gismes contradictoires c'est celle qui a été proposée par K.= Sayre dans S:31 pour les syllogismes non contradictoires. Ce logicien affirme à ce propos que sa méthode :

> ... does establish the claim that no techniques beyond == those provided by the propositional calculus are required to assess the correctness of any syllogistic inference.

Nous ne voulons pourtant pas nous appesantir davantage sur ce sujet.

A simple titre d'illustration, voici quelques exemples de syllogismes contradictoires :

<u>Gularu</u> : tous les ichtyostegas sont des poissons sans l'être; or, tous les quadrupèdes du dévonien sont des ichtyostégas; dès lors, tous les quadrupèdes du dévonien sont des= poissons sans l'être.

<u>Murlapy</u> : Tous les vieux habitants de Wilemstad parlent l'espagnol sans le parler; or, tous les vieux habitants de Wi lemstad sont des habitants de Curaçao; dès lors, quelque= habitant de Curaçao parle l'espagnol sans le parler.

<u>Maprumöx</u> : Tous les amphioxus sont des cordés; or, tous les = amphioxus sont des vertébrés sans l'être; dès lors quelque individu qui est un vertébré sans l'être est un cordé.

<u>Mublisty</u> : tous les guis sont des parasites sans l'être; or,= certains guis vivent sur des branches de peuplier; dès = lors, certaines choses vivant sur des branches de peupliers sont des parasites sans lêtre.

<u>Tölgamyx</u> : certains individus qui sont mammifères sans l'être sont monotrèmes; or, tous les monotrèmes sont ovipares; = dès lors, certains ovipares sont mammifères sans l'être.

Trêve d'exemples. Tous les syllogismes sont des rè gles d'inférence valides de <u>Am</u>, hormis ceux-ci : Murlapy, Muluppry, Maprumöx, Gandumöpp, Lumurlöpp et Pumantip (qui courent le même sort que les vieux Darapti, Felapton, Bamalip Calemes et Fesapo). En effet : ces syllogismes ne peuvent = être réduits à des syllogismes de la I^{e} Figure que moyennant= une ou plusieurs des règles (a), (b) et (f). Nous avons déjà vu comment on peut les sauver : comme de simples règles enthy mématiques, ou -autrement dit- comme règles valides condition nellement, sur la base de prémisses existentielles.

§7.- Strawson (S:20, p.163ss et surtout pp.169-70) indique = -dans le cadre d'une analyse de l'interprétation et reconstruc tion formelles de la syllogistique traditionnelle, dont nous ne saurions pas partager les conclusions présuppositionalistes- un désavantage majeur de toute reconstruction qui postulera comme formalisation de SaP : '-Ex(s/x/.-p/x/).Exs/x/', à savoir : que, si certains syllogismes sont sauvés par ce biais, le carré des oppositions cesse d'être valide (à moins de recou rir à d'autres reconstructions, celles-là invraisemblables au plus haut point, que Strawson examine par la suite -ibid.p. = 173-). En outre, les syllogismes qui dépendent de la contraposition seraient perdus. Quant à la reconstruction formelle proposée par Strawson à la p. 173, ibid., elle est -de son pro pre aveu- tout à fait implausible, car elle conduirait, p.ex., à ce que fussent vraies ces phrases : 'quelque chimère est man gée par Albert', 'quelque fleuve est divers de soi-même', = 'quelque carré absolument circulaire n'est pas visible depuis le haut de la Tour Eiffel'. Conscient de ces inconvénients,=

Strawson entreprend une défense de la syllogistique dans le cadre de sa théorie présuppositionnelle, où certaines phrases n'ont pas de valeur de vérité, et où ce que l'on demande pour passer, p.ex., de SiP à PiS c'est que, si SiP est vrai et si PiS a une valeur de vérité, alors PiS est vrai. Toute cette doctrine présuppositionnelle nous paraît d'une valeur autrement plus réduite que les analyses, souvent lucides, que Strawson venait -dans les pages antérieures- de consacrer aux diverses tentatives de reconstruction formelle de la syllogistique.

En tout cas, les prétendus désavantages de la reconstruction de SaP comme '-Ex(s/x/.-p/x/).Exs/x/' ne nous concernent pas, et ce pour deux raisons. Premièrement, nous ne tenons pas à sauver les syllogismes par contraposition, qui ne jouent aucun rôle dans notre élargissement (sauf pour les syllogismes de la IIe Figure introduits, d'une manière purement incidente, au §4, sur lesquels nous n'avons pas insisté, nous bornant par la suite à ceux des trois autres figures); et nous ne tenons pas non plus à sauver le carré des oppositions, si bien que nous pourrions concevoir fort bien que SaP ne fût point la négation de SoP, mais une conjonction dont un membre serait la négation de SoP.

Deuxièmement, ce que nous avons fait ce n'est pas d'interpréter SaP comme une variante quelconque de la conjonction susmentionnée, mais simplement affirmer que certains syllogismes ne sont pas inconditionnellement valides, qu'ils sont valides seulement sur la base de prémisses existentielles; autrement dit : qu'on y doit restreindre les substituts de certaines lettres à des noms de classes dont nous soyons à même d'affirmer qu'elles ne sont pas vides (qu'il y a des individus appartenant à ces classes plus qu'infinitésimalement).

Quoi qu'il en soit, la justification de la syllogistique traditionnelle dans son intégralité n'entre nullement dans nos calculs : une pareille réhabilitation entraînerait la validité -inconditionnelle- de tous les syllogismes et toutes les règles d'inférence par subalternation, que nous rejetons. À notre avis, Peter Geach (G:12, p. 63) a prouvé que, prise dans son intégralité et inconditionnellement, la vieille syllogistique conduit à des raisonnements implausibles. De SaP il découlerait, en vertu des principes d'obversion, conversion et subalternation, S'oP; de ce que tout étant est auto-identique, il découlerait alors que certains non-étants ne sont pas auto-identiques.

La raison philosophique pour laquelle peut-être ces conclusions contre-intuitives ne sont pas à craindre dans le cadre de la scolastique -hormis la branche scotiste- c'est la la thèse aristotélicienne de l'analogie du terme 'étant' : il n'y aurait aucune classe de tous les étants. Dès lors, chaque terme s'appliquerait à seulement une partie des étants (et il n'y aurait pas non plus, pour les mêmes raisons, une classe des auto-identiques). Mais cette doctrine catégorialiste figure parmi celles que l'approche proposée dans cette étude vise à écarter, afin de permettre la conception logique d'une classe de toutes les choses. En tout cas, la syllogistique traditionnelle paraît -comme maint auteur l'a souligné- plus fidèlement représentée dans le calcul quantificationnel par un système multisortal -où chaque terme correspondrait à un type particulier de variable- que par un système unisortal. Mais, à notre avis, les désavantages logiques et philosophiques des systèmes pluri-sortaux sont trop évidents. Relevons enfin que le résultat désastreux dénoncé par Geach ne nous menace pas; nous n'acceptons même pas une validité conditionnelle des inférences par obversion ou par contraposition.

Chapitre 6.- UN SYSTEME ALTERNATIF DE THEORIE DES ENSEMBLES ; Amj

Le système alternatif de théorie des ensembles, Amj, que nous présentons dans ce chapitre est étroitement apparenté à Am, dont il diffère surtout à cause de l'axiome de compréhension (ou de séparation). Les différences entre Am et Amj au regard de la prévention d'apories logiques seront étudiées au chapitre 8 de ce Livre.

Tout comme Am, Amj est une extension de Aq.

§1.- Définitions

/Yp/ eq /BYp/   /fp/ eq /⊐fp/   /ʒ̂p/ eq /Jfp.JYp/

/ĵp/ eq /LYp+Lfp/   /j̈p/ eq /ĵp.Ḧp/   /ʒ̈p/ eq /Hp+ʒ̂p/

/x̂p/ eq /EyUx(f(xy)II(ĵx.fp)+Hx&y)/ (si p ne contient pas 'T')

Dans Amj nous distinguons, parmi les éléments (i.e. parmi les choses x telles que Ḧx), ceux qui sont rangés (les éléments x tels que ĵx) et ceux qui sont turbulents (les éléments x tels que ʒ̂x). Les derniers ne sont membres d'aucun ensemble, si ce n'est infinitésimalement, en vertu de Amj003, qui est -comme on va le voir- un axiome de Amj.

§2.- Axiomes

Amj001 xy

Amj002 plIp+ʒ̂p..lpIp

Amj003 f(xy)Dĵx

Amj004 Ez(zxIIzy+HzDD.xIIy).Ez(zxIzy+HzD.xIy)

Amj005 Ex(xDp̈)DEx(xIp̈) (si p̈ ne contient aucune occurrence ibre de x

Amj006 ĵx̂p+ʒ̈u+ʒ̈u'+...+ʒ̈u^n (si... -vide infra-)

Amj007 EyUx(f(xy)II(ĵx.fp)+Hx) (si p ne contient pas 'T')

Amj008 Y(xà)

Sch mj1 (= Sch m1 de Am)

Sch mj2 (= Sch m2 de Am)

Voici les restrictions concernant l'axiome Amj006 : si p est une formule abstractivement recevable ne contenant d'autres variables libres que : x, u, u'...u^n et ne contenant pas 'T'. Une formule abstractivement recevable est une formule p d'un des trois types que voici :

a) p est une formule ne contenant aucune variable libre.

b) p est égale à la variable x précédée par une suite quelconque d'occurrences des foncteurs : F, B, S, N, P, P, P, P, P̄, m, P̂, P̂, P̈, P̈

c) p est une formule remplissant ces trois conditions-ci :
   i) p est écrite en notation fine;
   ii) p est stratifiée;
   iii) dans p les quantificateurs sont restreints à des éléments rangés.

Dans la condition (c), on entend par 'formule écrite en notation fine' une formule où aucune variable ne soit concaténée avec une fbf quelconque qui ne soit pas une variable; où, en outre, aucune variable ne soit affectée par un foncteur de As, si ce n'est 'ĵ'.

Quant à la condition (iii) de (c), la restriction en question consiste en ceci : p ne contient aucune quantification existentielle 'Eyq', à moins que q ne soit de la forme 'ĵy.q' '; et p ne contient aucune quantification universelle 'Uyq' à moins que q ne soit de la forme 'ĵyZq' '.

Tout comme dans Am, le test de stratification de Amj est le même que dans ML de Quine.

§3.- Les règles de formation de Amj sont les mêmes que celles de Am.

Les règles d'inférence de Amj sont les mêmes que celles de Am.

§4.- Quelques théorèmes

Ex(xII1)   B(x1)   B(1x)   Bx   xyIIgf(xy)

EyUx(f(xy)II(ĵx.fp)+Hx..Ux(f(xz)II(ĵx.fp)+Hx)G.yIIz)

1x̂pIIEyUx(f(xy)II(ĵx.fp)+Hx&1y)   ĵx=Eyf(xy)

ĵxC.f(xx̂p)IIfp   Uz(ĵxCY(xz))   ĵxCY(x1)   ĵxC.x1IIà1

zx̂pIIEyUx(f(xy)II(ĵx.fp)+Hx&zy)   x̂YpIIà   x̂fpIIx̂p

x̂puIIEyUx(f(xy)II(ĵx.fp)+Hx&yu)   x̂BfxIIx̂x   x̂xII1   xIIŷ(yx)

ĵx̂pIIĵ(1x̂p)   ĵxC.x1II1x   Uz(f(zx)IIf(zy)+Hz)D.xIIy

x̂pIIx̂(ĵx.p)   ĵxC.yxIIxquidy

(La définition de 'quidy' est comme dans Am)

Chapitre 7.- POUR UN NOUVEAU TRAITEMENT DES PARADOXES ET DES APORIES SEMANTIQUES

Le contenu de ce chapitre aura un caractère plus modestement conjectural que les autres qui composent ce Livre. En fait, nous proposerons, non pas une seule manière d'aborder les apories et paradoxes sémantiques, mais des manières différentes. Tout d'abord, nous établirons un distinguo entre paradoxes aporétiques et paradoxes non aporétiques. En deuxième lieu, nous proposerons deux stratégies différentes pour aborder les apories sémantiques proprement dites.

§1.- Un paradoxe sémantique est une contradiction (ou, plus généralement, une inconsistance simple) qui semble être vraie et qui englobe des concepts sémantiques, comme être-vrai (au sens où 'vrai' est un prédicat relatif aux phrases, sens qu'il faut -à notre avis- soigneusement distinguer du sens -apparenté mais irréductiblement différent- où 'vrai' s'applique aux faits ou propositions), dénoter, satisfaire, etc. Un paradoxe est aporétique ssi l'inconsistance simple en question engendre dans le système où elle se situe la saturation de celui-ci.

Une aporie peut, du reste, ne pas être paradoxale du tout, au sens indiqué, comme le prouvent les apories de Geach et Curry, où la négation n'intervient pas; en outre ces apories peuvent n'avoir guère l'air d'être vraies. Et, en fait -contrairement aux paradoxes originels, comme celui d'Eubulide- ces apories ne paraissent renfermer aucune vérité. Mais, pour simplifier, nous pouvons parler <u>comme si</u> les apories sémantiques constituaient un sous-ensemble propre de la classe des paradoxes sémantiques.

Ce qui est certain c'est qu'il y a bien des paradoxes non aporétiques (bien que les traitements classiques les aient pris, à tort, pour aporétiques). C'est notamment le cas du paradoxe d'Eubulide, dans une version <u>non</u> renforcée -p.ex. dans celle de Lukasiewicz-. Prenons comme signe syncatégorématique primitif "<u>uerum</u>(x)" (avec une variable individuelle quelconque à la place de 'x'), voulant dire : x est <u>sententiellement</u> vrai (i.e. <u>vrai</u> au sens où l'on dit d'une phrase qu'elle est vraie, non pas au sens où on le dit d'un fait ou proposition). Supposons que 'x n'est pas sententiellement vrai' et 'x est sententiellement faux' sont deux affirmations synonymiques. Soit maintenant cette définition :

/<u>pcv</u>/ eq /la phrase écrite à la ligne 25 d'en haut de la p. 63 du Livre II de <u>Contradiction et Vérité</u>/

Maintenant nous écrivons :

<u>pcv</u> est une phrase fausse (i.e. : N<u>uerum</u>(<u>pcv</u>))

Même si l'on rejette -vide infra- une <u>fonction</u> de guillemétisation, on peut -conditionnellement tout au moins- accepter le procédé de guillemétisation pour les cas banals et penser que, si rien d'inacceptable n'en découle, l'application du procédé est légitime pour obtenir le nom d'une expression à partir de l'expression. Alors nous faisons correspondre à la phrase '<u>pcv</u> est fausse' (en notation symbolique : 'N<u>uerum</u>(pcv)') son nom, à savoir: ' 'N<u>uerum</u>(<u>pcv</u>)' '; abrégeons ce nom comme 'e'. Acceptons provisoirement le schéma T de Tarski et l'évidence des constatations empiriques (plus la substituabilité des identiques). Alors on conclut :

<u>uerum</u>(e)IIN<u>uerum</u>(e)

Il n'y a dans ce résultat rien d'aporétique. Le résultat nous dit que e (c-à-d <u>pcv</u>) est une phrase en même temps -et dans la même mesure- vraie et fausse; c-à-d une phrase 50 % vraie et 50% fausse.

Répétons la même suite de démarches en substituant à la formule qui se trouve sur la sellette une autre où le foncteur de négation simple ('N', i.e. 'ce n'est pas le cas que...') a été remplacée par la surnégation 'F' ('ce n'est point le cas que...'). Nous procédons à cette définition :

/<u>p̂cv</u>/ eq /la phrase écrite à la ligne 49 d'en haut de la p. 63 du Livre II de <u>Contradiction et vérité</u>/

Maintenant nous écrivons :

F<u>uerum</u>(<u>p̂cv</u>)

Le résultat serait : uerum(<u>p̂cv</u>)IIF(<u>uerum</u>(<u>p̂cv</u>))

Or cette formule trivialiserait notre système, puisqu'elle est <u>sur</u>contradictoire. Il en ressort qu'une au moins des hypothèses sur lesquelles se fonde la conclusion absurde doit être absolument fausse : soit le schéma T de Tarski est faux dans toute sa généralité; soit ce n'est point le cas qu'il y ait une phrase <u>et une seule</u> qui se trouve à la ligne 49 d'en haut de la p. 63 du Livre II de Contradiction et vérité; soit ce = n'est point le cas que le résultat d'enfermer entre guillemets cette phrase-là constitue un nom de la phrase en question; = soit ce nom désigne plusieurs choses et non seulement la phrase en question; soit plusieurs de ces possibilités sont réalisées simultanément. Quoi qu'il en soit, les hypothèses ne peuvent pas être toutes vraies.

Toujours est-il que des paradoxes sémantiques non = aporétiques (comme celui qui est constitué par pcv, p.ex.) subsistent, et leur existence est reconnue par une logique contradictorielle, tandis que les systèmes surconsistants de logique ravalent tous les paradoxes au rang d'apories. Or dans la conversation courante une phrase comme 'je suis en train de mentir', et d'autres semblables, s'avèrent paradoxales, mais non aporétiques : la personne qui dit cela ment pour autant, et = pour autant seulement, qu'elle dit vrai; i.e. elle dit quelque chose d'aussi vrai que faux. (Si quelqu'un dit : 'je suis en train de dire un mensonge absolu', alors, pour les raisons invoquées, on ne peut pas tenir pour admissibles les hypothèses qui, à partir d'une telle déclaration, permettraient d'engendrer une aporie).

§2.- Notre premier essai de solution des apories sémantiques= consistera à substituer au schéma T de Tarski le schéma (U) :

(U) Buerum(x)IIBq
-pourvu que q soit une phrase transcrite en notation primitive qui ne contienne aucune occurrence d'un de ces deux foncteurs : 'T' et 'B'-

où l'on substitue à 'x' le nom de la phrase q, et où 'uerum'= est un syncatégorème primitif. (Alternativement, on peut conditionaliser le schéma (U), en énonçant une protase qui affirme que x est le nom d'une phrase -ou son nombre gödelien-;= on peut aussi remplacer le membre de gauche de la formule équivalentielle stricte (U) par 'f(xexpr)&Bq', où 'expr' est une= constante primitive désignant la classe des fbf).

Reconstruisons maintenant l'argument qui, à partir de certaines prémisses prima facie acceptables, nous amenait tantôt à une conclusion aporétique. Reprenons le cas de p̂cv. = Nous supposons que 'p̂cv' est un nom de la phrase écrite à la= ligne 49 d'en haut de la p. 63 du Livre II de Contradiction et vérité. Nous supposons aussi que le résultat d'enfermer entre guillemets ladite phrase en constitue un autre nom. Et, bien entendu, nous supposons la substituabilité des termes co-extensionnels. Alors nous aurons :

(2) Buerum(p̂cv)IIF uerum(p̂cv)

D'où il découle :

(3) Juerum(p̂cv).~~B~~uerum(p̂cv)

conclusion qui n'a rien d'aporétique, loin s'en faut : p̂cv se trouve être une phrase qui n'est ni foncièrement vraie ni absolument fausse, mais à certains points de vue vraie et à d'autres points de vue tout à fait fausse. (Notons qu'on ne peut pas substituer à 'p̂cv' 'Fuerum(p̂cv)', c-à-d qu'on ne peut pas substituer au nom de la phrase la phrase même -le schéma (U) ne nous y autorise pas; pas plus, du reste, que le schéma T de Tarski-. Ce que nous pouvons substituer à 'p̂cv' c'est : ' 'Fuerum(p̂cv)' ').

Si p̂cv est une phrase relativement vraie et aussi= relativement tout à fait fausse, que savons-nous de la vérité propositionnelle de son référent (puisque, n'étant pas une phrase superabsolument fausse, p̂cv a bien un référent, selon la sémantique philosophiquement motivée et non strictement fonctionnelle esquissée à la fin du chap. 3 de ce Livre)? Eh bien! nous n'en savons rien. Le schéma (U) ne nous renseigne pas sur le degré de vérité-propositionnelle (ou factuelle) des corrélats objectifs des phrases qui ne sont ni foncièrement vraies ni absolument fausses.

Cela dit, le langage choisi pourrait même contenir des noms de toutes ses expressions et des procédés pour individuer ces expressions univoquement, à partir des noms, et vice versa, en même temps qu'il contiendrait le prédicat défini par le schéma (U). On pourrait alors vouloir gravir un échelon et, se plaçant dans un métalangage, y formuler un prédicat qui repondrait aux conditions du schéma T, et non pas seulement aux conditions, plus restreintes, du schéma (U). Mais à une telle aspiration on pourrait rétorquer (et cela constituera un des points de cette première tentative de solution que nous proposons à titre d'hypothèse) qu'il n'est point besoin d'aller chercher ce prédicat où que ce soit, car il n'y a nulle part rien de tel. Dès lors, la nécessité de dénivellation linguistique cesse d'exister. Le prix à payer c'est la renonciation à l'idéal d'un prédicat qui soit vrai de chaque nom de phrase exactement dans la même mesure où le corrélat objectif de la phrase qu'il désigne (à supposer qu'il en désigne une) est propositionnellement vrai, c-à-d existe; (cf. la Section II du Livre III de cette étude à ce sujet). Puisque cet idéal semble être incompatible avec l'idéal de l'universalité -autrement plus important-, le choix est, à nos yeux, facile. Car, pour affirmer qu'aucune langue n'est universelle, il faut se situer dans une langue qui parle de toutes les langues, y compris d'elle-même, tandis que, pour dire que (4) -ci après- est vrai, point n'est besoin de s'exprimer dans une langue qui contienne une phrase comme celles dont (4) nie l'existence :

(4) il n'y a aucune phrase ouverte p ayant une variable libre x et telle qu'est assertable la formule équivalentielle stricte dont le membre de gauche est le résultat de substituer dans p à 'x' le nom (ou le nombre gödelien) d'une phrase donnée q et dont le membre de droite est q elle-même

Il est vrai qu'à l'encontre de la possibilité d'existence de langues universelles on a énoncé des arguments indépendants du théorème de Tarski. C'est, en particulier, cette impossibilité que s'est évertué à prouver Hans Herzberger dans H:33. Nous n'entrerons pas ici dans le détail des arguments de Herzberger. Sauf erreur de notre part, ses arguments présupposent que la langue en question doit être sur-consistante (ou, tout au moins, qu'est surconsistante la langue où l'on est en train d'énoncer les preuves). Les apories que Herzberger prouve à partir de la présupposition d'universalité ne sont pas démontrables dans un système ayant une logique contradictoire, comme Am ou Amj, à moins que des hypothèses ultérieures et implausibles ne soient ajoutées. Ainsi donc, dûment interprétées, les conclusions de Herzberger sont paradoxales, mais elles ne semblent pas être aporétiques si l'on se place dans une logique simplement inconsistante. Il faut remarquer, du reste, que, au cas où -contrairement à notre avis- Herzberger aurait raison -c-à-d que ses arguments s'appliquassent à tout système, montrant qu'il est absolument faux qu'une langue, quelle qu'elle soit, puisse être universelle- ce qu'il dit semblerait ne pas pouvoir être dit du tout.

Par conséquent -et ce disant nous conclurons notre= premier essai de solution de l'aporie du menteur- nous pou-- vons avoir une langue universelle dans laquelle cependant on ne saurait avoir aucun prédicat satisfaisant le schéma T de = Tarski, non pas à cause d'une faiblesse intrinsèque du systè- me, mais parce qu'un tel prédicat n'existerait nulle part.

§3.- Quant aux apories de Grelling, Berry et Richard, on peut les traiter, dans le cadre de ce premier essai de solution = que nous énonçons, soit comme des problèmes concernant la théo rie des ensembles (interprétant alors <u>hétérologique</u> comme : = classe des expressions hétérologiques; c-à-d catégorématique- ment; et les autres concepts aporétiques ou paradoxaux à = l'avenant), soit comme des problèmes purement sémantiques, in terprétant alors "est hétérologique" comme une expression syn catégorématique -à l'instar de '<u>uerum</u>'- et en lui appliquant= un schéma similaire à celui que nous avons conçu plus haut = pour '<u>uerum</u>' (le schéma (U)), c-à-d : déterminant, non pas les conditions d'hétérologicité en général, mais seulement d'hété rologicité foncière ou stricte, et, au surplus, en établissant des restrictions quant aux expressions qui peuvent figurer com me substituts dans le schéma. (S'il s'agit d'un problème de théorie des ensembles, alors la solution est donnée, dans <u>Am</u>, par le fait qu'<u>hétérologique</u> est une classe sans matrice ca-- ractéristique abstractivement recevable et que, par suite, rien ne permet de dire qu'un élément est hétérologique pour autant qu'il est vrai ou peu s'en faut qu'il désigne une classe dont il ne soit guère membre; et dans <u>Amj</u> la conclusion serait = que le terme 'hétérologique' n'est pas un élément rangé, mais turbulent). Pour les apories de Berry et Richard, des considé rations similaires peuvent être énoncées.

Il faut relever que les définitions partielles des= notions syncatégorématiques de vérité sententielle (le schéma (U)), d'hétérologicité, etc., ne coïncident pas avec les appro ches présuppositionnelles d'inspiration strawsonienne (comme= celle de van Fraassen, dont il sera question au §11), ni non plus avec les approches de tous ceux qui -tel Kripke dans K:25, D. Grover dans G:38, etc.- pensent que, pour certains substi- tuts de x qui sont pourtant des noms de phrases, la phrase = 'x est (sententiellement) vrai' est une phrase sans valeur de vérité -ou, comme le dit Kripke, que le prédicat "être-vrai"= est (objectivement?) indéfini dans un certain nombre de cas-. Non, dans le cadre de l'approche ici brossée tout est défini, toute phrase bien formée a une valeur de vérité. Pour chaque substitut de 'x', la phrase '<u>uerum</u>(x)' aura une valeur de vé rité bien précise et objectivement déterminée. Seulement, nous ignorons laquelle dans certains cas, tout comme bien des théo ries axiomatiques des ensembles -y compris <u>Am</u>- ne nous permet tent pas de dire dans quelle mesure une chose quelconque appar tient à un ensemble donné (à moins que cet ensemble ne soit ca ractérisé par une matrice possédant certaines caractéristiques); il n'empêche qu'objectivement chaque chose possède un degré = bien déterminé, et un seul, d'appartenance à un ensemble don- né quel qu'il soit.

Soit p.ex. cette abréviation : /<u>ev</u>/ eq /la phrase = écrite à la ligne 4 d'en bas de la p.66 du Livre II de <u>Con- tradiction et vérité</u>/. Nous écrivons maintenant :

<u>ev</u> est une phrase vraie (en notation symbolique : <u>uerum</u>(<u>ev</u>))

Est-ce que <u>ev</u> est vrai? Eh bien! tout ce que le sché me (U) nous permet de dire c'est que <u>ev</u> est foncièrement vrai dans la mesure où <u>ev</u> est foncièrement vrai, ce qui ne nous =

fait pas avancer beaucoup. Est-ce à dire que *ev* n'a pas de valeur de vérité, ou qu'il aura la valeur de vérité que nous décidions arbitrairement de lui assigner? Pas du tout. *ev* possède bien une valeur de vérité, mais nos axiomes ne nous permettent pas de savoir laquelle; et pour certaines versions fortes du paradoxe du menteur, le schéma (U), ajouté à nos autres axiomes, ne nous permettra même pas de tirer des conclusions partielles sur le degré de vérité des phrases en question. Mais cela n'est rien moins qu'étonnant, puisque, après tout, la plupart des vérités ne découlent pas de nos axiomes (nous ne pouvons pas déduire la plume de Herr Krug!).

Similairement, si *ᵽcv* était une phrase de la forme 'F*uerum*(*ᵽcv*)' ('la phrase *ᵽcv* est absolument fausse'), ou de la forme 'F*uerum*(*ᵽcv*)+.Ƀ*uerum*(*ᵽcv*).J*uerum*(*ᵽcv*)' ('*ᵽcv* est une phrase soit absolument fausse soit telle qu'elle est à certains égards tout à fait fausse et à d'autres égards vraie'), ou de la forme 'Ƀ*uerum*(*ᵽcv*) ('*ᵽcv* est une phrase relativement tout à fait fausse'), alors nous ne saurions rien conclure sur la valeur de vérité de *ᵽcv*, car le schéma (U) ne nous renseigne pas sur la valeur de vérité de ce type de phrases. La deuxième et la troisième des phrases citées engendreraient des apories si le schéma (U) était asserté sans aucune restriction.

Notons cependant qu'une façon alternative d'aborder la question pourrait être celle-ci : affirmer le schéma (U'), ci-dessous, dans une extension *Asu* de *As*, où 'Ψ' serait un foncteur pour lequel on introduirait des axiomes identiques à A1/2, A2/2, A3/2 de *As*, en substituant à chaque occurrence de 'T' dans (la transcription en notation primitive de) ces axiomes une occurrence de 'Ψ'; mais 'Ψ' ne posséderait rien de comparable à l'axiome A0/2 de *As*. Le schéma (U') est alors formulable sans restrictions :

(U') Ψ*uerum*(x)IIΨq

(où 'x' est un nom de q). Une sémantique vérifonctionnelle pour ce système n'est pas difficile à formuler. Les propriétés de 'Ψ' ressembleraient à celles de l'opérateur de nécessité dans le système modal T, tandis que 'B' et 'T' ont, dans *As*, des propriétés similaires à celles de l'opérateur de nécessité dans S5. Formulons donc les axiomes supplémentaires de *Asu* :

A1/3 ΨpC.ΨpIBp   A2/3 Ψ(pCq)C.ΨpCΨq
A3/3 Ψ(pDq)C.ΨpDΨq

On ajouterait aussi une règle d'inférence 1 ter : p⊢Ψp (si p est un théorème de *Asu*). La lecture de 'Ψ' pourrait être : 'il est authentiquement vrai que'. Une sémantique adéquate pour *Asu* serait une sémantique matricielle, c-à-d une sémantique où chaque valeur de vérité fût une matrice aléthique (soit une suite de tenseurs aléthiques). La notion de validité dans *Asu* ne présenterait pas trop de complications. Mais nous n'aborderons pas ici une telle tâche.

§4.- Des solutions à certains égards semblables à celle que nous avons esquissée au §2 ont déjà été avancées par d'autres auteurs; un des travaux qui figurent dans M:20 -celui de John Pollock- contient, lui aussi, une suggestion visant à affaiblir le schéma T.

Un avantage du traitement proposé à titre d'essai au §2 c'est qu'il permet, sans restrictions, des auto-références, qu'elles soient fondées (*grounded*) ou non. Des exemples comme celui de '*jack*', inventé par Kripke (K:25, p.693) sont possibles: soit la suite de lettres '*jack* est court'; appelons cette sui te, préalablement non interprétée, '*jack*'. Alors elle devient d'emblée un énoncé interprété et vrai. Une difficulté supplémentaire pourrait néanmoins être conçue pour des procédés d'auto-dénomination du type de '*jack*'. Pour adapter un exemple de Grover (G:38, p. 601) : soit la suite de lettres 'F*aut*' ('il est absolument faux que *aut* existe'); appelons cette suite ''*aut*''. Est-ce que cela n'entraîne pas '*aut*IIF*aut*', ce qui serait aporétique? Non, tout ce que nous pouvons conclure c'est *aut*II'F*aut*'. Dès lors, nous n'avons pas exactement le cas prévu par Grover, celui où le definiendum entre dans le definiens: la suite de lettres '*aut*' dans le definiens est ensevelie à l'intérieur des guillemets, elle n'est donc pas en usage ou emploi, mais en mention. Ce qui serait inadmissible ce serait de définir : /*aut*/ eq /F*aut*/ (ou, parallèlement : /*jack*/ eq /*jack* est court/).

Pareillement, nous n'avons pas besoin pour éviter qu'une aporie ne découle de l'exemple de *p̂cv*, que nous avons considéré plus haut, de recourir à une négation de l'auto-référence de *p̂cv*; ni d'exiger que la référentialité soit conférée aux expressions par paliers, en commençant forcément par des expressions qui ne parlent pas du tout d'expressions, en continuant par des expressions sur les expression de premier type, et ainsi de suite. L'approche alternative que nous brosserons tout à l'heure n'a pas besoin non plus de cette hiérarchie ascendante, mais elle doit, en revanche, bannir certaines formes d'auto-référence; dans le cas de *p̂cv* elle pourrait s'en tirer en niant l'identité empiriquement constatée qui engendre l'aporie et en affirmant qu'il y a plus d'une phrase écrite à la ligne 49 d'en haut de la p. 63 du Livre II de *Contradiction et vérité*; et les arguments qu'elle contient pour éviter la démonstration de Tarski auront toujours pour résultat des négations d'auto-référence dans certains cas, c-à-d -plus concrètement- l'impossibilité pratique de construire une phrase qui dise d'elle-même qu'elle n'est nullement vraie. En regard de tout cela, le premier traitement que nous venons d'exposer est plus libéral et s'adapte mieux à certaines intuitions. (Selon l'approche alternative que nous énoncerons tout à l'heure, l'autorisation de procédés d'auto-dénomination, comme celui qui engendre le cas susmentionné de *jack*, aurait sans doute pour résultat la démolition des défenses érigées contre le surgissement d'apories).

Tout le monde n'est pourtant pas enthousiaste des possibilités d'auto-référence (et surtout pas d'une auto-référence obtenue sans passer par le relais d'une référence à quelque chose d'autre -obtenue, elle, sans circularité ni régression à l'infini-. L'exclusion même de toute auto-référentialité où la circularité ou la régression à l'infini jouent quelque rôle constitue le principe de '*groundedness*' qua tant d'auteurs estiment nécessaire pour prévenir les apories (cf., p. ex., G:38, pp. 597ss; pour l'auteur de cet article, D. Grover, la formule qui engendre le paradoxe du menteur n'est pas inconsistante : elle manque de contenu; mais le point de vue dont découle pareille conclusion soulève des difficultés apparemment insurmontables, comme l'a montré Pollock dans sa critique -P:20- de l'article de Grover). Il est difficile de trouver un argument décisif pour ou contre le principe de *groundedness*. Une raison pour le rejeter serait peut-être le respect d'un autre principe, apparemment plus haut placé dans l'échelle des principes rationnels : le principe de vérifonctionalité, qui empêche l'existence de trous vérivalents : chaque phrase doit avoir une valeur de vérité déterminée; ou -pour le dire d'une manière superficiellement différente- toute phrase qui ne soit pas superabsolument fausse désigne une valeur de vérité réelle (aux phrases superabsolument fausses on assigne la pseudo-valeur (0,0,0...) qui n'existe pas réellement, mais est un expédient formel purement fictif pour manipuler la sémantique d'une manière plus commode).

§5.- Venons-en à notre seconde tentative de solution des apories sémantiques. Elle exploitera le fait que A est un système béant, c-à-d syntaxiquement ouvert. Un système semblable est tel que la classe de ses fbf n'est pas récursivement énumérable (encore moins récursive), car les règles de formation explicitées n'engendrent qu'un sous-ensemble propre des formules bien formées du système. Pour toute formule engendrée par ces règles-là on peut donc dire, à coup sûr, qu'elle est une fbf; mais, à propos d'une chose quelconque qui ne soit pas engendrée par ces règles, on ne peut pas dire si oui ou non elle est une fbf du système. Les langues naturelles sont des systèmes béants. (A notre connaissance, A est le seul système béant formalisé).

Comme on le sait, une aporie sémantique apparaît dans tout système syntaxiquement et sémantiquement fermé qui soit suffisamment fort pour représenter la fonction de substitution (en sorte que le lemme du point fixe y soit démontrable), qui contienne un prédicat satisfaisant le schéma T et qui ne soit pas une logique relevante. Ceci a été bien étudié par van Benthem (V:5, pp. 56-7). Mais voyons ce qui arrive dans un système syntaxiquement ouvert.

Nous appelons 'fragment représentable de X' (où X est un système syntaxiquement ouvert) un fragment gödelisable X' de X. Pour que l'on puisse prouver le lemme du point fixe (cf. la démonstration de van Benthem, p. 56), il faut que plusieurs conditions soient remplies :

1) qu'il y ait un numéral et un seul correspondant au nombre gödelien d'une formule donnée quelconque;

2) qu'en substituant un numéral à une variable libre dans une formule quelconque le résultat soit unique, en sorte qu'un seul et unique nombre gödelien corresponde à ce résultat.

Mais, pour que le lemme soit formellement prouvé dans un système qui agit comme son propre métalangage, une autre condition est requise :

3) (1) et (2) doivent être formellement prouvables dans le système.

Pour que (3) soit vrai, le système (ou sous-système) doit avoir des constantes désignant la classe des expressions, la relation de désignation et l'opération de substitution. Normalement, on se passe de tout cela, car on ne prouve pas le lemme dans la langue qu'on étudie, mais dans une métalangue. Et pour toutes les langues formelles qui ont été étudiées jusqu'ici (qui se trouvent être, toutes, syntaxiquement fermées), les conditions (1) et (2) sont valides.

Mais une langue syntaxiquement ouverte peut, bien entendu, ne pas respecter les conditions (1) et (2). En ce qui concerne la condition (1), ceci est obvie : il suffit qu'il y ait un couple de synonymes désignant le même nombre (quoi de plus banal après tout?). En ce qui concerne (2), un exemple suffira à montrer que la non-satisfaction de cette condition est possible. Supposons qu'une langue contienne des prédicats dont la notation présente un nombre impair de trous, au minimum trois; chaque variable s'écrit dans le trou central, mais les constantes peuvent s'écrire dans n'importe quel trou. On peut certes établir une fonction dont la valeur soit, pour chaque ensemble de substitutions d'une constante à une variable dans une formule, le plus petit des nombres gödeliens de ces diverses substitutions. Mais on peut aussi penser à des langues ayant un nombre indénombrable de trous (et peut-être même un nombre inaccessible de trous) dans certains prédicats, voire dans un nombre indénombrable de prédicats; pour ces langues, il serait impossible d'établir une telle fonction. Et sans doute bien d'autres possibilités existent, qui dépassent l'imagination.

Quoi qu'il en soit, ce qui est certain -pour revenir au cas d'un nombre fini de trous- c'est que diverses formules qui, en vertu des lois de quantification, doivent être parfaitement équivalentes, peuvent être des formules diverses et avoir donc des nombres gödeliens différents (nous supposons que les trous sont tous vides sauf un).

Supposons néanmoins que nous délimitons, à l'intérieur d'une langue syntaxiquement ouverte X (comme A) un fragment représentable X' qui satisfasse aux conditions (1) et (2). Mais rien ne prouve que, même si X est sémantiquement fermé -au sens de Tarski- X' le soit aussi. Dès lors, la condition (3) pourrait ne pas tenir et il se pourrait que le lemme du point fixe ne pût pas être prouvé à l'intérieur de X'. Par ailleurs, comme nous le verrons plus loin en détail, il se peut que le système ne puisse pas du tout être prouvé, même dans une métalangue, à propos de X', n'y ayant à l'intérieur de X' aucun théorème similaire au schéma T de Tarski (mais où la place du nom de la phrase est occupée, non pas par un nom, mais par un nombre gödelien; vide infra).

Ce que Tarski a prouvé -et ce que (conformément aux paradoxes de Geach et Löb; cf. L:18) peut être prouvé d'une manière plus générale- c'est qu'une langue syntaxiquement fermée non triviale ne peut pas être sémantiquement fermée au sens de Tarski (c-à-d contenir des noms de toutes ses expressions et un prédicat satisfaisant les conditions du schéma T). Dès lors, tout ce que nous pouvons conclure à propos d'un fragment représentable X' d'un système béant X c'est que X' ne peut pas être sémantiquement fermé; mais cela est parfaitement compatible avec le fait que X soit sémantiquement fermé. L'auto-référentialité ne peut donc pas être complète dans X'; mais elle peut l'être dans X.

Il faut, d'ailleurs, préciser que l'ouverture sémantique nécessaire peut être beaucoup plus réduite que Tarski ne paraît l'avoir pensé. R. Routley a prouvé cela. Routley commence (R:22) par rappeler que, d'après Tarski, un système est sémantiquement fermé ssi : a) il contient les noms de toutes ses expressions; b) il contient des expressions sémantiques, comme 'phrase vraie', 'nom', 'dénoter', etc.; et c) toutes les phrases qui déterminent l'emploi adéquat des expressions sémantiques -dans le cas de 'vrai', toutes les instances du schéma T- peuvent être assertées dans le système. Ensuite, il formule ce commentaire lucide et incontestable (p.16n.):

> The orthodox approach in fact imposes on the languages it is prepared to consider much stronger requirements than are necessary : it would suffice to reject in part one of (a) or (b) or (c).

Ce qui étonne c'est qu'on ne l'ait pas vu plus tôt. Ainsi donc, en nous rapportant à un fragment représentable X' d'une langue syntaxiquement ouverte X, tout ce qu'il faut pour qu'une aporie ne puisse pas y être engendrée par le biais de la gödelisation c'est que X' ne satisfasse pas intégralement les conditions (a), (b) et (c).

Dans notre première tentative de solution (celle du §2 de ce même chapitre), nous affaiblissions (c), non seulement pour un fragment représentable du système, mais pour tout le système. Dans le cadre de la proposition que nous sommes en train de brosser maintenant, chaque fragment représentable A' de A est tel qu'il ne satisfait pas intégralement (a) : certaines expressions de A' sont telles qu'elles ne possèdent pas, à l'intérieur de A', leurs dénominations; par suite, chaque fragment représentable A' de A, quand bien même il contiendrait un schéma similaire à celui de Tarski (au schéma T), serait tel qu'il ne pourrait pas instancier ce schéma pour chaque phrase de A', si bien que A' ne satisferait pas non plus intégralement la condition (c). Mais un fragment représentable de A peut satisfaire intégralement la condition (b) et assez largement -mais non pas complètement- les conditions (a),(c).

§6.- Comme nous le verrons un peu plus en détail tout à l'heure, Tarski déduisit de ses preuves un théorème aux termes duquel un prédicat Y ne peut être défini arithmétiquement (dans une langue permettant la diagonalisation), en vertu duquel pour chaque phrase p dont le nombre gödelien soit /p/ :

$$p \equiv T(/p/)$$

Van Benthem (V:5, p. 64) prouve que, dans les conditions indiquées, un prédicat T ne peut même pas satisfaire la condition que pour tout p :

$$T(/p/) \mathrm{C} p \qquad\qquad p \vdash T(/p/)$$

Mais à cela on peut réagir optant précisément pour un système béant (syntaxiquement ouvert). D'un système pareil nous ne pouvons expliciter qu'un fragment qui soit un sous-ensemble de ses formules -et ce même dans un temps infini-. On ne peut donc pas gödeliser tout le système. Il n'est pas vrai qu'à chaque formule du système on puisse faire correspondre un nombre gödelien (encore moins, un et un seul nombre gödelien).

Au surplus -et coïncidant en cela avec notre première tentative de solution- nous pouvons sacrifier aussi, dans le cadre de notre tentative actuelle, le schéma T. Il peut y avoir des motifs philosophiques indépendants pour rejeter ce schéma, comme nous le verrons. Précisons toutefois : le schéma T <u>peut</u> maintenant être gardé pour tout substitut tel que nous puissions spécifier (écrire) simultanément et lui-même et un nom qui le désigne. Mais en fait, nous proposerons une définition de la vérité sententielle qui n'entraîne pas comme conséquence le schéma T, même pas pour ces cas-là; pour obtenir le schéma T ou quelque chose de semblable à partir de notre définition, il faudrait ajouter des prémisses supplémentaires.

Comme nous l'avons déjà dit, nous distinguons deux acceptions diverses, mais liées l'une à l'autre, du mot 'vérité' : la vérité propositionnelle ("absolue" au sens où l'on emploie couramment cet adjectif précisément à propos de la vérité : pour indiquer la non-relativité à une phrase ni donc à une langue) et la vérité sémantique ou sententielle. La vérité propositionnelle est une propriété des états de choses (i. e. des choses, puisque nous n'établissons aucune distinction catégorielle entre les choses et les faits ou états de choses).

Cette propriété est la propriété d'exister (propriété qui admet une infinité de degrés), c-à-d un ensemble dont la fonction caractéristique est une transformation nulle ou identique. Il-est-vrai-que-p = p. Par conséquent, il-est-plutôt-vrai---que-p = plutôt-p (et il en va de même pour les autres modificateurs aléthiques). La vérité sémantique ou sententielle est une propriété des seules phrases : une phrase "p" est sententiellement-vraie dans la même mesure où il y a quelque chose x qu'elle désigne et que, surtout, x existe (x est propositionnellement-vrai). Nous prenons comme constantes catégorématiques primitives celles-ci : '<u>des</u>', qui désigne la relation de désignation, à savoir la classe des couples ordonnés x;y tels que x désigne y; '<u>expr</u>' qui désigne la classe des fbf. (Remarquons, par parenthèse, que, dans sa reconstruction de la sémantique tarskienne dans F:12, H. Field accorde une place de premier ordre à la relation de désignation prise comme primitive). Alors nous définissons la vérité-sententielle comme suit :

(df <u>Vr</u>) /<u>uerum</u>(y)/ eq /Ex(f(y;x<u>des</u>.y<u>expr</u>)&x)/

(Alternativement, nous pourrions nous passer de la constante '<u>expr</u>', pensant que, si y n'est guère une fbf, le couple ordonné y;x n'appartiendra guère, non plus, à la relation de désignation).

Nous avons donc une des conditions nécessaires pour que notre langage soit sémantiquement fermé, puisque nous avons une définition de la vérité-sententielle à l'intérieur du langage même que nous employons. Que notre définition n'entraîne pas forcément le schéma T c'est quelque chose que nous aurons tout à l'heure l'occasion de montrer. Toujours est-il que notre définition de la vérité sententielle est faite, non seulement à l'intérieur de la langue que nous employons, mais, qui plus est, à l'intérieur d'un fragment explicité, donc gödélisable, de cette langue. Etant donné que la logique sous-jacente de notre système n'est pas relevante (et qu'elle contient des négations fortes, des conditionnels forts, etc.), si notre définition de la vérité entraînait le schéma T et que, au surplus, des noms de toutes les expressions faisant partie d'un fragment représentable (gödélisable) de notre langue pussent faire partie de ce même fragment, notre système serait trivial.

Or, dans un système béant il se peut qu'il y ait des noms d'expressions tels qu'on ne puisse pas expliciter, dans un même fragment gödélisable, et le nom désignant l'expression et l'expression désignée par le nom. Les preuves de gödélisation utilisent toutes l'énumérabilité récursive de la classe des fbf d'une théorie donnée (cf., p.ex., K:26, §§ 42 et 52 ; N:3, chap. VII; L:32, §68; R:5, p.197). Or cette propriété n'est pas possédée par un système béant. A chaque expression d'un système béant sémantiquement fermé il correspondra au moins un nom dans le système; mais il se peut qu'aucun de ces noms ne soit engendré par des règles explicitées, voire même qu'aucun d'eux ne puisse être explicité dans un corps de signes échantillons où apparaisse un échantillon de l'expression qu'il désigne. Et l'inverse est aussi fort possible. Ainsi donc nous pouvons connaître une expression d'une langue béante et cependant ne pas être à même de trouver le nom qui la désigne, et, réciproquement, nous pouvons connaître le nom d'une expression de la même langue et ne pas pouvoir expliciter l'expression désignée par lui.

Cela étant, on peut conjecturer que chaque fragment représentable d'un système béant sémantiquement fermé -comme <u>Am</u> et ses extensions- est tel qu'à certaines des expressions qu'il contient il ne correspond, à l'intérieur du fragment, aucun nom ou description; et aussi, peut-être, que chaque fragment représentable d'un système béant contient des noms qui désignent des expressions du système mais qui ne peuvent pas faire partie du fragment représentable en question.

On pourrait toutefois penser que, si cela empêche que l'aporie puisse être prouvée (et, par suite, que le théorème de Tarski puisse être démontré comme valide aussi pour ces systèmes-là), la situation n'en serait pas moins objectivement intenable, car il suffirait qu'on pût trouver un moyen d'élargir le fragment représentable du système pour que l'aporie reparût. Mais il est fort vraisemblable qu'en élargissant le fragment on y fasse entrer d'autres expressions qui ont leurs noms à l'extérieur seulement du nouveau fragment. Toutefois, on pourrait penser, derechef, que, si cela nous empêche, nous, de prouver une aporie, la situation réelle devrait demeurer aporétique tout de même, puisque, le système contenant les noms de toutes ses expressions, il contiendra au moins un couple d'expressions qui reproduisent une relation semblable à celle qu'il y a entre la formule gödélisée du *menteur* et le numéral de son nombre gödélien.

A cela nous répondrons que ce n'est que par le biais de l'arithmétisation qu'on a pu prouver l'existence objective d'une telle paire d'expressions; un système qui ne soit pas intégralement arithmétisable ne semble pas condamné à contenir objectivement une telle paire d'expressions. La restriction de l'explicitabilité des noms d'expressions ne concerne donc pas seulement nos possibilités à nous de prouver l'aporie : elle concerne avant tout la situation objective du système considéré.

Enfin, non seulement rien ne permet de dire qu'il peut y avoir un isomorphisme entre la classe des noms des expressions d'un système béant et un sous-ensemble quelconque de la classe des nombres naturels : rien ne permet non plus de dire que, si S' est un fragment représentable d'un système béant S, il y aura une bijection (encore moins qu'il y aura un isomorphisme) entre l'ensemble des noms des expressions de S' et un sous-ensemble de l'ensemble des noms naturels; ou qu'au moins un nom de chaque expression de S' sera explicitable *dans S'*. Plus évidemment encore, rien ne permet de dire que dans un système béant S on puisse assigner à chaque expression e d'un fragment représentable S' de S un nom de cette expression qui ferait, lui aussi, partie de S'. Car, même si un système béant S contient des noms de toutes ses expressions, il se peut qu'à chacune de ses expressions il fasse correspondre, non pas un seul nom, mais une pluralité de noms telle que chaque matrice p explicitable dans un fragment représentable S' de S et formulée en vue de les départager -et obtenir par là "le nom de e qui p"- soit telle qu'il y a plusieurs de ces noms qui satisfassent, *ex aequo*, p, ou qu'il n'y en ait aucun.

Les procédés empiriques qu'on peut invoquer, comme les guillemets ou l'épelage, s'avèrent impuissants. En particulier, Tarski a présenté des objections plutôt convaincantes contre toute fonction de guillemétisation (T:14 pp.167-8). Tel ou tel de ses arguments est contestable, mais il y en a un en tout cas qui paraît devoir être retenu : l'ambiguïté qui serait engendrée par une telle fonction lorsqu'elle prend comme argument une variable. En outre -et sur ce point notre argument est contraire à un des arguments de Tarski, bien qu'il mène à la même conclusion- les guillemets ne paraissent pas pouvoir être une fonction, puisque n'importe quelle suite de caractères latins enfermée entre guillemets constitue un mot du français écrit (et d'une autre langue quelconque écrite dans le même alphabet; et similairement pour les suites de phonèmes et la langue parlée), à telles enseignes que, lorsque la suite de caractères (ou de phonèmes) n'est pas une expression du système, il n'y a aucun argument que les guillemets envoient sur une valeur qui serait l'expression contenant les guillemets et, à l'intérieur des guillemets, la suite de caractères en question. Or, apparemment il ne peut pas y avoir deux sortes de guillemets, des guillemets fonctionnels et des guillemets non fonctionnels. Des remarques en partie similaires pourraient être formulées à propos de l'épelage.

En fait, nous pouvons continuer de nous servir aussi bien des guillemets que de l'épelage pour construire ou expliciter, dans les cas banals, des noms d'expressions, quitte à nous rétracter le cas échéant si quelque aporie surgissait (en faisant donc un emploi implicitement conditionnel de ces deux procédés).

§7.- Nous aborderons maintenant une autre question : peut-on éviter que de (df Vr) il ne découle un schéma similaire au schéma T de Tarski? Et, au cas où ce serait effectivement possible, est-ce souhaitable?

Pour répondre à ces questions, commençons par réexaminer de plus près la preuve de théorème de Tarski. Une version extrêmement agréable et claire du théorème de Tarski se trouve dans R:5 (pp. 210-5); un examen plus détaillé se trouve dans L:32, §§187ss. Nous suivons cependant la formulation originelle offerte par Tarski lui-même.

Dans T:14(pp. 243ss) Tarski prouve qu'une langue syntaxiquement fermée et suffisamment puissante ne peut pas contenir un prédicat Vr dont la définition satisfasse la convention P (ibid. p. 191), i.e. entraîne les conséquences suivantes : a) toutes les phrases obtenues à partir de l'expression "$x \in Vr$ ssi p", moyennant la substitution au symbole 'x' du nom décrivant la structure d'une phrase quelconque de la même langue, et au symbole 'p' de la phrase donnée; b) la phrase : "toute phrase qui est membre de Vr est une phrase du système".

L'essentiel de la preuve réside en ceci : si un tel prédicat existe, comme on peut établir un isomorphisme entre la classe des expressions et un sous-ensemble de l'ensemble des noms naturels, , alors on peut faire correspondre à Vr une classe de nombres naturels représentant des expressions (exprimée par Vr). Mais alors, comme il y aura un nombre gödelien k représentant la formule "$-(x \in Vr)$", il suffit de substituer dans cette formule le numéral de k à la variable 'x' pour obtenir la formule contradictoire.

Un système contradictoriel comme A contient des contradictions, mais ne peut tolérer aucune surcontradiction. Si nous substituons, dans la formule en question, à la négation '-' la surnégation 'F' ou le foncteur ultranégatif 'F' (respectivement : 'il est tout à fait faux que' et 'il est absolument faux que'), alors une aporie découlerait de la prémisse comme quoi la classe des énoncés vrais est arithmétiquement représentable. Mais pour que le prédicat 'Vr' soit arithmétiquement représentable et entraîne donc la conclusion de Tarski il faut se donner la prémisse comme quoi la classe des expressions du système est isomorphique à une classe de nombres naturels (celle des nombres gödeliens, p.ex.) ou tout au moins que la classe des noms des expressions d'un fragment explicitable du sys tème où le schéma exprimant la convention P puisse être asserté est isomorphique à un sous-ensemble de l'ensemble des nombres naturels. Or, nous venons de constater, au §6, que de telles suppositions sont parfaitement gratuites à propos d'un système béant. Et cela suffit pour bloquer l'applicabilité du théorème de Tarski à notre système, en dépit du fait que celui-ci (si l'on devait retenir l'actuelle proposition) contiendrait une définition de la vérité sententielle, (df Vr).

Néanmoins, une garantie supplémentaire (peut-être superflue, mais qui tout de même mériterait d'être recherchée pour plus de sécurité) contre le surgissement de l'aporie pourrait être constituée par le rejet du schéma T (ou de la convention P qui lui est équivalente). A cette fin, on pourrait rejeter les prémisses qui, ajoutées à nos axiomes et à (df Vr), donneraient pour résultat l'affirmation d'un schéma similaire à T (i.e. d'un schéma satisfaisant les conditions du schéma T ou de la convention P, à ceci près, toutefois, que les instanciations ne pourraient pas se faire selon ce qui est prévu dans la convention P, pour les raisons ci-dessus mentionnées).

Or, pour qu'on puisse obtenir, à partir de (df Vr) un schéma comme T, il faudrait que chaque x qui soit, plus qu'infinitésimalement, une expression du système désigne un et un seul objet. En effet, si nous pouvons affirmer (2), alors nous obtiendrons la conclusion (3) :

(2) xexprR.E!yf(x;ydes)+UyBbN(x;ydes)

(3) xexprR.uerum(x)IIèyf(x;ydes)

(Laissons de côté la difficulté qui découle, dans Am, de la définition de "E!xp", qui restreint aux seuls éléments les valeurs de x qui peuvent rendre vraie une telle phrase; laissons aussi de côté le fait que, dans Am, pour chaque x le couple x;1 est strictement identique au couple x;x -nous reviendrons sur cette question au §10).

Quelle que soit la plausibilité initiale de (2) -ou de toute autre formule similaire, en substituant à 'f' quelque autre foncteur d'assertion-, on a des motifs pour rejeter une telle prémisse. Une expression donnée d'une extension cohérente de Am peut, à certains égards, désigner plus qu'infinitésimalement une chose, et à d'autres égards ne désigner rien si ce n'est infinitésimalement. On pourrait, certes, substituer à (2) (4) :

(4) xexprRE!yJf(x;ydes)+UyBbN(x;ydes)

Or, dans un système béant il se peut qu'il y ait non seulement des expressions qui ne désignent rien, mais aussi des expressions qui désignent plus d'une chose. Appelons 'système plurisémique' un système qui contienne au moins une expression e telle que pour deux choses différentes, voire diverses, x et y, à certains égards e désigne plus qu'infinitésimalement x et à certains égards e désigne plus qu'infinitésimalement y, mais qui, chaque fois que e se trouve dans une phrase p affectée par quelque signe que ce soit (le référent de p étant une fonction d'un référent de e), c'est uniformément x, et x seul, qui est pris comme argument (comme référent de e, dont le référent de p est une fonction).

Comme nous le dirons plus en détail dans la Section II du Livre III, un signe signifie seulement lorsqu'il ne se trouve dans le contexte d'aucune phrase (contrairement au dicton souvent répété), lorsqu'il est en train de constituer un message à lui tout seul. Autrement, il ne signifie rien, il permet seulement de trouver, à l'aide des autres signes, ce que la phrase entière signifie. Ainsi donc, qu'une expression e désigne une chose veut dire seulement que la phrase qui est constituée de la seule expression e désigne telle chose. Mais si une expression e désigne plusieurs choses, alors chaque phrase-échantillon constituée par un seul échantillon de e désignera chacune de ces choses-là. Mais en vertu du fait que toutes les phrases où e figure accompagnée par d'autres signes sont des expressions dont les référents sont des fonctions d'un seul référent de e unique et déterminé dans tous les cas (toujours le même), aucune aporie, aucune surcontradiction ne surgit. Un système plurisémique est univoque au sens rigoureux de Quine : tous ses théorèmes seront vrais (pourvu que les deux ou plus référents de e soient tous les deux foncièrement réels, i.e. soient des tenseurs aléthiques désignés). Un système plurisémique ne permet point d'affirmer (4). . .

Une difficulté paraît surgir : quelle sera alors la valeur qui correspond au résultat de substituer dans '*uerum*(x)' à la variable x un nom de e? Eh bien! c'est simple : soit e' un tel nom de e; alors, si /e';*xdes*/=(i,i',i",i'"...) et /e';*ydes*/=(j,j',j",j'"...), alors /*uerum*(e')/=(max(i,j),max(i',j'), max(i",j")...).

A partir du nom d'une expression donnée quelconque on ne peut donc pas toujours obtenir une autre expression désignant univoquement "le" référent de la première, si le système considéré est plurisémique. Et nous n'avons aucun motif pour exclure la possibilité qu'un système béant soit plurisémique.

§8.- Dans le cadre de notre seconde tentative de solution, nous nous sommes jusqu'ici confiné au seul paradoxe du menteur (dans sa version aporétique et, plus concrètement, dans une version formalisée à la Tarski). D'une manière semblable, ce nous semble, il est loisible de traiter d'autres paradoxes sémantiques : ceux de Grelling, Berry et Richard, notamment (cf. B:26 §§6, 7 et 8).

Prenons le paradoxe de Grelling. Nous en trouvons tout d'abord des versions qui -dans un système contradictoriel comme *Am*- ne sont pas aporétiques. On déduit (à partir d'hypothèses vraisemblables qui ne semblent pas démenties par les conclusions qu'elles entraînent) que le terme 'hétérologique' s'applique à lui-même pour autant, et pour autant seulement, qu'il ne s'applique pas à lui-même. Cela se comprend fort bien, et tout ce qui en découle c'est un résultat bénin, à savoir que 'hétérologique' s'applique à soi-même dans une mesure de 50%.

Venons-en à la propriété d'être *fortement hétérologique*, définie ainsi : la classe des expressions e telles qu'il est plus ou moins vrai qu'il est plus qu'infinitésimalement vrai que e désigne une classe x telle qu'il est infiniment faux que e appartienne à x. Si 'fortement hétérologique' appartient -plus qu'infinitésimalement- à la classe des choses fortement hétérologiques, alors il est infiniment faux qu'il appartienne à la classe qu'il désigne; si, par surcroît, il se trouve désigner la classe des choses fortement hétérologiques, alors il ne sera guère -dans l'hypothèse envisagée- fortement hétérologique. Or, s'il n'est guère fortement hétérologique -à supposer toujours qu'il désigne la classe des choses fortement hétérologiques, il se trouvera être fortement hétérologique (plus qu'infinitésimalement). Outre que ce raisonnement n'est valide ni en vertu de *Am* ni en vertu de *Amj* (à cause des restrictions de l'axiome de compréhension dans ces systèmes), les deux branches de l'alternative présupposent l'hypothèse comme quoi 'fortement hétérologique' désigne -plus qu'infinitésimalement- la classe des choses fortement hétérologiques, hypothèse qui -au cas où le raisonnement ne serait pas vicieux- serait donc à rejeter, dans le cadre de notre actuelle tentative d'approche.

Nous pourrions tout aussi bien formuler une autre variante de l'aporie de Grelling, en définissant la classe des éléments fortement hétérologiques comme la classe des expressions y telles qu'il est infiniment faux que y désigne une classe x telle que y appartienne plus qu'infinitésimalement à x. Abrégeons "fortement hétérologique" comme 'a' et soit e la classe des éléments fortement hétérologiques. Si a est, plus qu'infinitésimalement, fortement hétérologique, et que a désigne e (à supposer d'ailleurs que les restrictions de l'axiome de compréhension ne nous empêchent pas de raisonner de la sorte, supposition évidemment contre-factuelle), a appartiendra à e plus qu'infinitésimalement (nous supposons que a ne désigne rien d'autre, si ce n'est infinitésimalement seulement); mais alors a n'est guère hétérologique. Et, toujours à partir des mêmes hypothèses, on conclut que si a n'est guère hétérologique, a est plus qu'infinitésimalement hétérologique. Mais les objections à ce paralogisme sont les mêmes que ci-dessus pour l'autre version; et, en tout cas, l'hypothèse comme quoi a désigne e serait à rejeter, au cas où le raisonnement ne fût pas sophistique -mais il l'est-. On voit bien qu'il s'agit de paralogismes si l'on songe que les matrices caractéristiques de ces ensembles ne sont pas abstractivement recevables. Dès lors, dans <u>Am</u> on ne peut pas dire dans quelle mesure un élément donné quelconque appartient à une de ces classes (tout ce que l'on sait c'est que si un élément donné x appartient, à un certain point de vue, plus qu'infinitésimalement à une de ces classes, alors, à ce même point de vue-là, x satisfait plus qu'infinitésimalement la matrice caractéristique de la classe en question). Et dans <u>Amj</u> un élément donné possède plus qu'infinitésimalement une de ces propriétés dans la mesure où il est rangé et qu'il en satisfait la matrice; mais rien ne prouve que l'expression 'fortement hétérologique' soit rangée; au contraire, la conclusion la plus vraisemblable, si nous raisonnons dans le cadre de <u>Amj</u>, c'est que l'expression 'fortement hétérologique' est turbulente. Comme on le voit, les apories de Grelling ressortissent davantage à la théorie des ensembles qu'à la sémantique pure.

Des considérations analogues peuvent être faites sur le paradoxe de Berry (dans ses formes aporétiques et non aporétiques). Tout d'abord on constate l'existence de formes non aporétiques du paradoxe. Que le plus petit nombre naturel qui n'est pas désignable par une formule de moins de 50 mots soit désignable par une formule de moins de 50 mots, tout en ne l'étant pas, cela constitue un paradoxe, nullement une aporie. Dès lors, les hypothèses ou apparentes constatations empiriques sur lesquelles repose une telle conclusion peuvent être maintenues en raison de leur vraisemblance et de leur absence de conséquences absurdes.

Il en va tout autrement pour des formulations différentes, telle celle-ci : 'le plus petit nombre naturel n tel qu'il est infiniment faux qu'il y ait une description de n contenant tout au plus cinquante mots'. Résumons la formulation précédente comme 'e'. Alors il faut dire que, de par les conséquences absurdes qui découleraient de la thèse comme quoi e désigne plus qu'infinitésimalement le plus petit nombre natu rel n tel qu'il est infiniment faux qu'il y ait une description de n ayant tout au plus cinquante mots, il faut conclure que e ne désigne guère ledit nombre (alternativement, dans Amj, on pourrait conclure que e est turbulent).

§9.- Feu Arthur Prior essaya de sauver la possibilité d'auto-référentialité (cf. P:12). Il soutint que ce n'est point l'au to-référentialité, mais bien l'impossibilité d'être classifié d'une manière consistante comme vrai ou faux ce qui rend un énoncé dépourvu de sens. (Nous reviendrons au §13 sur le traitement priorien des apories sémantiques).

A ce propos, N. Rescher (R:12) a signalé, tout en montrant de la sympathie envers la solution priorienne, un dés avantage qu'elle comporte, à savoir la dépendance qui en résul te de certaines vérités nécessaires vis-à-vis de certaines vé rités contingentes. Comme nous le verrons dans le Livre III, nous considérons que toute vérité est nécessaire (seulement, il se peut qu'il soit moins vrai qu'une proposition est néces sairement vraie que non pas qu'elle est vraie tout court). Dès lors, cet inconvénient n'en est pas un à notre gré. Cette dé pendance c s'explique comme suit, par un exemple. Si Epiméni de affirme qu'aucune assertion faite par un crétois n'est vraie alors, soit son affirmation est un non-sens, soit il y a une autre assertion quelconque faite par un crétois qui se trouve être vraie, et dans ce cas son assertion est nécessairement fausse. Rescher estime 'distateful' cette conséquence comme quoi 'there are statements whose very <u>meaningfulness</u> (and not merely truth or falsity) can hinge upon a matter of contingent fact' et surtout contre 'the anomaly that there are <u>conditionally</u> L-true (and L-false) statements'.

L'objection de Rescher ne nous semble pas convain-cante, car, dans notre conception sémantique (cf. Section II du Livre III) il n'y a aucune différence pour une fbf quelcon que entre désigner quelque chose, être (sententiellement) vraie et avoir du sens (ici nous parlons des expressions pourvues-de-sens au sens sémantique; on peut aussi employer l'expres-sion 'avoir du sens' en un sens purement syntaxique, comme sy nonyme de 'être bien formé'). Cet extensionalisme radical de notre approche supprime donc la base sur laquelle repose l'ar gument de Rescher.

Mais nous rejetons, pour une raison similaire, la so lution de Prior, puisque cette solution-là, elle aussi, se fon de sur un clivage entre avoir du sens (sémantiquement, bien sûr, car les phrases contentieuses sont incontestablement bien formées) et être vrai.

Voici donc la solution que nous proposerions dans le cadre de notre seconde tentative de solution des apories sé mantiques. Soit, p.ex., le paradoxe de Buridan que Prior con sidère. Dans un boudoir il y a quatre personnes, dont deux font des affirmations indiscutablement vraies, une fait une af firmation indiscutablement fausse et cependant le quatrième interlocuteur affirme qu'il y a autant d'affirmations vraies que d'affirmations fausses faites en ce moment dans ce salon. De cette situation il découlerait que le quatrième interlo-cuteur dit vrai ssi il dit faux. Sous cette formulation sim-ple, le paradoxe n'est pas aporétique, et notre conclusion se rait que le quatrième interlocuteur fait une affirmation à de mi vraie et à demi fausse. Supposons, en revanche, maintenant que l'on parle d'énoncés, non pas simplement vrais, mais plutôt vrais (et, non pas simplement faux, mais assez faux). Si la classe des énoncés plutôt vrais proférés à cet endroit et à ce moment-là appartient plutôt au nombre deux, alors l'affirmation paradoxale sera donc plutôt vraie et, dès lors, la classe des énoncés plutôt vrais appartiendra plutôt au nombre trois et il sera, par suite, entièrement faux que cette classe appartienne plutôt (c-à-d dans une mesure d'au moins 50%) au nombre deux; de la même façon, on prouve que si cette classe appartient moins qu'à moitié au nombre deux, alors elle y appartient plutôt, c-à-d au moins à moitié. Nous avons donc une aporie. Le caractère spécifique de cette aporie réside dans le fait qu'une opération ensembliste (les nombres) entre en jeu, ce qui entraîne une imbrication de la sémantique et de la théorie des ensembles. La difficulté réside notamment dans le fait qu'une même classe ne peut point appartenir dans une mesure d'au moins cinquante pour cent à deux nombres divers. Mais la solution pourrait être la reconnaissance de l'impossibilité d'une situation pareille : dans un cas semblable il y aura, en fait, non pas quatre, mais au moins cinq énoncés, même si empiriquement deux d'entre eux paraissent indiscernables. Cette solution ressemble à celle que, dans le cadre de notre seconde tentative d'approche, on peut proposer pour une version aporétique mais non gödélisée du menteur : là où, à première vue, il n'y a qu'un seul énoncé, il y en a en fait au moins deux, reliés peut-être entre eux par un certain type de similitude ou égalité moins forte que la mêmeté. Pareillement, la situation de Mr. X qui pense, dans la chambre N° 7 d'un hôtel à 6 heures sonnantes qu'est faux tout ce qui est pensé par quelqu'un dans ladite chambre à ce moment-là doit être traitée d'une manière analogue. Telle quelle, cette situation est, de nouveau, paradoxale sans être aporétique. Mais si par 'faux' on entend, p.ex., assez faux (ou extrêmement faux, ou infiniment faux, etc.), alors ce qu'il faut conclure c'est que la situation ne saurait pas exister : en fait, à l'insu de Mr X, ou bien il y a quelqu'un d'autre dans la même pièce qui pense quelque chose d'autre, ou bien Mr. X pensera quelque chose d'autre en plus de la phrase susmentionnée (c-à-d qu'il sera en train de penser deux choses diverses, si indiscernables soient-elles à première vue).

(Dans le cadre de notre première tentative de solution on pourrait conclure, pour ce qui est du boudoir, que l'assertion de la quatrième personne n'est ni foncièrement plutôt vraie ni foncièrement assez fausse; quant à Mr. X, à supposer qu'il soit seul dans sa chambre et qu'il ne pense qu'une seule chose, sa pensée sera, elle aussi, relativement plutôt vraie et relativement assez fausse).

§10.- Comme nous l'avons dit précédemment, la définition de la vérité sententielle présentée dans le cadre de notre seconde approche (df Vr) ne constitue qu'une première approximation. Tout d'abord il faut avouer l'existence d'une difficulté. Selon les théories des ensembles Am et Amj, chaque phrase constituée par une seule occurrence d'une variable individuelle, seule ou précédée d'un quantificateur universel, est une thèse valide, donc vraie. Cela veut dire que les seules valeurs possibles des variables individuelles sont des tenseurs aléthiques désignés. Mais alors, pour qu'une phrase comme le definiens de 'uerum(x)' -quelque fbf 'x'- soit à certains égards vraie et à d'autres égards tout à fait faux, il faut que 'Eyf(x;ydes)' soit à certains égards vrai et à d'autres égards tout à fait faux. Or, intuitivement cela est à rejeter, car sans doute les choses se passent-elles autrement : une phrase paraît devoir être à certains égards tout à fait fausse si el le ne désigne qu'une seule chose, laquelle est réelle à certains égards mais n'existe point à d'autres égards. La solution à cette difficulté ne peut pas être offerte par les théories des ensembles Am et Amj, mais par une théorie des ensembles plus vaste, où les valeurs possibles des variables individuelles seraient, ou bien tous les tenseurs différents de (0,0,0...), ou bien tous les tenseurs contenant un nombre infini d'items non nuls. On peut faire cela sans sortir du cadre d'une logique unisortale, pourvu que l'on conditionalise certains axiomes de Am (ou de Amj). Toutefois le problème ici considéré nous semble être suffisamment marginal pour pouvoir être négligé dans cette tentative d'approche, qui se veut une simple ébauche d'un traitement ultérieur plus poussé et plus fin.

Pour plus de rigueur il faudra introduire aussi une modification dans notre définition dans notre définition de la vérité sententielle : selon Am et Amj, le couple x;1 équivaut strictement au couple x;x. Dès lors, on ne peut pas exprimer le fait que la phrase '1' désigne l'absolument Vrai (c-à-d l'absolument réel) en disant ''1';1des', car cela signifie que '1' se désigne soit-même. Par conséquent, le schéma définitionnel devrait être amendé comme suit. On prendrait comme relation sémantique primitive, au lieu de des, la relation denot, telle que :

x;ydesIIy;xdenot+.Hy.Bf(y;xdenot)

Alors : /uerum(x)/ eq /Ey(f(y;xdenot.xexpr)&y)/

Cette question paraît être cependant secondaire dans l'élucidation globale du problème de la vérité sententielle, et, s'il est vrai qu'un traitement plus rigoureux ne devrait pas omettre cette rectification, toutefois, notre approche actuelle -de même que notre première approche- constituant une simple ébauche, nous pouvons nous contenter provisoirement de la relation 'des' qui va des expressions aux choses.

C'est pourquoi dans le reste de cette étude (et notamment dans le chap. 8 de la Section II du Livre III, pp. 176 ss du Livre III) nous nous abstiendrons d'évoquer les complications auxquelles nous venons de faire allusion, de même que la possibilité d'admettre le caractère plurisémique d'un système béant (puisque, apparemment, on peut éviter -dans le cadre même de notre seconde tentative d'approche- les apories sémantiques sans recourir à la plurisémie) et aussi tout ce qui touche la première tentative de solution des apories sémantiques brossée dans ce chapitre -celle du §2-, car, philosophiquement, la seconde solution paraît être plus satisfaisante pour plusieurs raisons : elle définit la vérité sententielle -chose que la première ne peut pas faire-; elle relie plus clairement la vérité sententielle des phrases à la vérité propositionnelle ou degré de réalité de leurs référents; elle ne comporte aucune restriction plus ou moins ad hoc et n'a pas besoin non plus d'introduire de nouveaux foncteurs primitifs dans As. On pourrait aussi essayer des solutions intermédiaires, visant à capturer le lien entre vérité sententielle et existence des référents tout en introduisant la vérité sententielle comme une constante primitive au moyen d'un schéma axiomatique, et non pas d'une définition. (En fait, dans le cadre de la première tentative de solution, on peut affirmer, comme conclusion prouvable à partir de (U) ceci : Buerum(x)IIEy(pIIy&y), où x est un nom de la phrase p).

§11.- Dans le reste de ce chapitre, nous examinerons plusieurs traitements alternatifs des apories sémantiques proposés pendant les dernières années.

Une intéressante tentative de solution des apories= sémantiques a été réalisée par van Fraassen (cf. V:6). Elle= se fonde sur la théorie strawsonienne de la présupposition. = Son fond consiste à soutenir qu'une phrase peut n'avoir aucune valeur de vérité. Tout en admettant le schéma T de Tarski, = van Fraassen l'interprète, non pas comme une implication mutuelle de p et de '"p" est une phrase vraie', mais comme une nécessitation mutuelle; or la nécessitation ne permettrait pas, généralement parlant, l'application du Modus Tollens. Dès = lors, on ne pourrait pas dériver dudit schéma la loi de bivalence, i.e. : ' "p" est une phrase vraie ou "-p" est une phrase vraie'. La distinction de niveaux est conservée : il y aura des phrases de premier niveau, qui parlent sur les choses; de deuxième niveau, qui parlent sur les expressions de premier niveau, et ainsi de suite. En même temps, les lois de la logique classique demeurent intactes.

L'approche de van Fraassen nous paraît comporter des inconvénients. Premièrement, elle postule des relations de = présupposition et de nécessitation dont la structure logique est douteuse et qui sont fort vraisemblablement chimériques.= Aucun foncteur vérifonctionnel ne saurait capturer ou exprimer un lien semblable. Le caractère bizarre de ce rapport de nécessitation est manifeste, surtout dans le cadre de la logique classique -dont la conservation est le voeu le plus ardent de van Fraassen-; car cette logique n'autorise aucune relation = telle qu'une phrase qui entretient cette relation avec une autre soit telle que, avancée la première, la seconde s'ensuive forcément, sans que pour autant le modus tollens ne soit possible. Et pourtant c'est bien ce dont van Fraassen aurait besoin. Pour faire face à ce dilemme, van Fraassen opte pour= l'abandon de la vérifonctionalité.

La racine de cette situation curieuse est exposée = par van Fraassen dans ledit article; il s'agit de la position de l'auteur envers la logique classique (ibid. p. 140) :

> With respect to logic I am conservative : I would resist= any imperialism on behalf of classical logic; I would not accept the idea that it is applicable to all contexts or= that it is sufficient for all (important) purposes, but on the other hand I have no inclination to change it.

Ainsi, tout en admettant du moins la possibilité que la logique classique ne s'applique pas à tous les contextes ou qu'elle ne soit pas adéquate à toutes les fins, van Fraassen= annonce sa décision de s'y tenir. Toute son approche est inspirée par le double souci de conserver intacte la logique classique et de faire face à des situations que cette logique ne= permet pas de comprendre. Le résultat c'est, comme nous le disions tout à l'heure, la renonciation à la verifonctionalité.

Ce désavantage de l'approche supervaluationnelle de van Fraassen a été mis en relief par son disciple Merrie Bergmann, qui en relève (B:10, p. 70) le caractère non vérifonctionnel (sans toutefois l'indiquer comme un défaut; M. Bergmann propose, au demeurant, une alternative plus sophistiquée -pour le traitement des énoncés contenant des clauses "sortalement incorrectes"- qui, de son propre aveu, n'est pas non = plus vérifonctionnelle -cf. B:10, p. 75-). Ceci tient au fait que la méthode des supervaluations postule l'existence de phra ses bien formées qui n'ont aucune valeur de vérité, ce qui est fort difficile à admettre.

Au demeurant, les expressions de van Fraassen soulèvent des difficultés quant à leur exactitude : que veut-on dire par un 'changement de la logique classique'? Aussi bien les partisans de systèmes rivaux au regard de la logique classique que les partisans de systèmes élargis contenant la logique classique veulent construire d'autres logiques, non pas changer la logique classique. Le cramponnement à la logique classique nous paraît être dû à deux raisons que le professeur R. Routley a signalées dans R:7, lorsqu'il y dit (chap. I) :

> It is our view that the importance of classical logic -which captured the market because first into it and because of its childish simplicity- has been grossly exaggerated... What importance classical logic does have is in providing a simple model, and testing ground, for arguments that can be re-engineered to extend to more adequate alternative systems.

Une autre difficulté dans l'approche présuppositionnelle de van Fraassen c'est qu'elle maintient -avec les solutions traditionnelles, depuis Russell et Tarski- l'idée de dénivellation, même si, comme le dit l'auteur, 'the notion of "level" has been made much less sharp'; car -comme il ajoute aussitôt après-'there is still a clear and distinct syntactic notion of level'. Dès lors, l'auto-référence et l'universalité paraissent demeurer proscrites par ce traitement. C'est pourquoi, comme van Fraassen lui-même le dit (p. 150) :

> we shall not get to a point when we can say everything, and yet not have any presuppositions that could fail. To be presuppositionless may be a regulative ideal in philosophy, but it is not an achievable end.

La conséquence de cette dénivellation c'est que, pour préciser les conditions d'assertabilité ou niabilité d'une phrase de degré n, il faut postuler explicitement une relation de nécessitation de degré n+1; vu que van Fraassen paraît garder le point de vue classique comme quoi chaque langue formelle est syntaxiquement fermée, il en résulte que le projet d'une langue formelle universelle n'est pas atteignable moyennant les procédés supervaluationnels échafaudés par lui.

En dépit de ses défauts, l'approche supervaluationnelle comporte un aspect extrêmement positif : elle admet que certaines phrases ne sont ni assertables ni niables. Nous acceptons cela; non pas que les phrases en question manquent de toute valeur de vérité, mais qu'elles sont relativement tout à fait fausses et relativement vraies, c-à-d qu'elles possèdent des valeurs de vérité qui ne sont ni désignées ni antidésignées. Van Fraassen a aussi raison lorsqu'il distingue la loi de bivalence du principe de tiers exclu. Toutefois, il ne distingue pas la version faible de la version forte de la loi de bivalence; il ne distingue pas non plus la vérité sententielle de la vérité propositionnelle. C'est pourquoi il cite, dans une note annexée à son article, à l'appui de son propre point de vue, la thèse de Paul Weiss (ou, plus exactement, il cite une phrase de Quine critiquant la thèse de Weiss qu'il identifie à sa propre négation du principe de bivalence) comme quoi 'il est vrai que p ou q' n'entraîne pas 'il est vrai que p ou il est vrai que q' Les confusions dont relève une telle thèse -confusions que nous venons de mentionner- seront réfutées en détail dans la Section II du Livre III.

Le problème du rapport entre le schéma T de Tarski= et la technique des supervaluations a été discuté aussi dans= la littérature récente. Selon van Fraassen il faut calculer= la valeur des phrases privées de valeur de vérité comme si el les en avaient une; notre propre approche écarte comme inutile ce fictionalisme, puisqu'on peut calculer la valeur de vérité d'une molécule item par item, composante par composante, vu = que le référent de chaque phrase est une valeur de vérité (à= moins que la phrase ne soit tout à fait fausse et que nous = adoptions une sémantique non strictement fonctionnelle).

K. Machina soutientque l'approche supervaluation nelle est incompatible avec le schéma T. Ce point de vue a = été critiqué par N. Griffin dans G:27. L'objection de Griffin se fonde sur le fait que dans le schéma T le 'ssi' peut être= interprété en deux sens, qui produisent respectivement les = deux phrases ci-dessous :

Sch T1 : $/W1(p)/=/p/$

Sch T2 : $/W1(p)/ = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } /p/=1 \\ 0 \text{ autrement} \end{array} \right.$

Or, si l'on met en lumière cette équivocité, l'argu ment de Machina s'avère fallacieux. Griffin, pour sa part, re jette SchT1, car 'under it, the operator 'T' /i.e. 'W1' dans= notre transcription/ loses its characteristic feature of yiel ding only two-valued sentences for any given sentential argu- ment'.

En vérité, il faut avouer que le schéma T de Tarski ne prévoyait pas de pareilles complications et qu'il se bornait à envisager des cas où chaque atome est soit vrai (simpliciter) soit faux (simpliciter), et jamais, bien entendu, les deux en même temps. Si l'on prévoit d'autres possibilités, on l'inter- prétera toujours en un sens qui dépasse les intentions origi- nelles de Tarski.

Quant à nous, le Sch T2 nous paraît aberrant, car il revient à dire que, si une phrase n'est pas tout à fait vraie, elle est tout à fait fausse. Essayons maintenant de cerner = l'argument de Machina et l'objection de Griffin de plus près. Machina envisage le cas où une phrase atomique n'aurait aucune valeur de vérité. Alors dire que sa valeur est le vrai c'est faux, donc :

(2) $/W1(p)/=0$

Alors, en vertu de schéma T :

(3) $/p/=0$

ce qui contredit l'hypothèse. Griffin répond que le Sch T1 = parmet de conclure (3) à partir de (2), mais non pas de conclu re (2) à partir de l'hypothèse; tandis que le Sch T2 permet,= inversement, de conclure (2) à partir de l'hypothèse, maisnon pas (3) à partir de (2). L'objection paraît fondée. Mais un problème subsiste : si l'on n'accorde pas le Sch T2, on ne = peut rien conclure quant à la valeur de vérité de ''p' est = vrai', lorsque 'p' n'a pas de valeur de vérité. Alors, que = l'on laisse le schéma T dans sa formulation originelle ou que l'on adopte Sch T1, on se trouvera en face d'une instruction= pour calculer "la" valeur de vérité d'une phrase à partir de= "celle" d'une autre qui n'existerait point, si bien qu'en fait il n'y aurait rien à calculer du tout. Des anomalies sembla- bles nous paraissent déconseiller le recours à l'approche pré suppositionnelle. (Signalons qu'une autre approche présuppo- sitionnelle a été proposée par Douglas Odegard dans O:2, pp.= 333ss).

§12.- Parmi les nombreux traitements des apories qui conçoivent les formules contentieuses comme vides de sens et sans valeur de vérité, citons celui -inspiré de Ryle- de J. Mackie. Mackie (M:5, p. 260) dit de la phrase qui engendre l'aporie du menteur : 'This utterance makes no statement, and no false one, because even if it were uttered assertively it would assert nothing'. Pour l'auteur, la formule 'ce que je suis en train de dire n'est pas vrai' 'cannot be firmly characterized as not true : it cannot be characterized with respect to truth... An argument that starts from the presupposition 'Either it's true or it's not true' should not be allowed to get off the ground'. Mackie pense que l'approche ryléenne, d'après laquelle des affirmations comme ' 'autologique' est autologique', ' 'hétérologique' est hétérologique' sont indéfinies -n'ont aucune valeur de vérité, constitue la solution adéquate à ce type de paradoxes. Et l'auteur de s'insurger contre le traitement quinéen des apories (des apories logiques, il est vrai, mais pour Mackie le traitement des apories logiques et celui des sémantiques doit relever du même procédé); il affirme (M:5, p.264):

> There is a fundamental fallacy to be exposed, not a need for an ad hoc restriction to thin down the universe of classes to consistence.

Tout d'abord, on peut penser que ce que Quine fait réellement dans son plus important traité de logique, ML, ce n'est pas amenuiser l'ensemble des classes existantes, mais nuancer les conditions d'appartenance à une classe caractérisée par une matrice donnée, ce qui est tout autre chose. Mais ce point dépasse notre actuel sujet et empiète sur la problématique du chapitre 8 de ce Livre. L'essentiel réside en ceci : Mackie cherche quelque chose de chimérique, à nos yeux : une espèce d'illusion transcendentale ou de paralogisme fondamental dont découleraient toutes les apories, et il semble suggérer qu'il s'agit d'une instanciation "mécanique" du principe de tiers exclu. Pour notre part, si nous ne sommes pas forcément attaché à toutes les solutions concrètes de Quine, nous croyons que Quine a raison de penser que l'intuition à elle seule n'est pas une voix magiquement infaillible et invariable à travers les âges, et nous nous refusons à opposer radicalement -comme le fait Mackie- traitement philosophique et construction de systèmes. Si par un procédé formel on parvient à prévenir des résultats implausibles et à sauvegarder des résultats plausibles et si, ce faisant, l'éventail des résultats plausibles sauvegardés est fort vaste, le procédé s'avère ainsi plausible, sans qu'il soit besoin de déceler quelque racine vicieuse ou paralogisme fondamental dans une optique cathartique. En fait, il n'y a aucune racine de cet ordre. Il y a des apories qu'il faut prévenir par des systèmes formels adéquats aussi riches que possible (aussi bien des systèmes de théorie des ensembles que des systèmes sémantiques), systèmes qui entraînent le moins possible de conséquences fâcheuses ou hautement implausibles et le plus possible de conséquences plausibles (dont une est -à notre avis- qu'en disant simplement 'je mens', je mens dans la même mesure où je dis la vérité, donc je mens et je dis la vérité tout à la fois). Il n'y a aucune racine mystérieuse commune de tous les paradoxes, aporétiques et non aporétiques; encore moins une racine dont l'élucidation permettrait de nous en guérir, comme le pense Mackie. C'est pourquoi il semble qu'aucune solution -humaine- ne puisse être exhaustive et définitive.

Enfin, pour ce qui est de l'abandon du principe d'instanciation "mécanique" de la loi de tiers exclu, certainement le remède est pire que le mal. Nous avons déjà parlé, à la fin du chapitre 1 de ce Livre, sur cette question, énonçant des raisons contre tout abandon dudit principe; sans lui, la logique devient impuissante et son tranchant est émoussé. Ce serait encore moins grave que d'abandonner -à la Dummett- le principe même de tiers exclu.

Mais pourquoi le principe de tiers exclu ne peut-il pas être instancié "mécaniquement"? Parce qu'il y a des phrases qui, tout en ayant un sens, sont indéterminées quant à leur valeur de vérité, vu qu'elles dépendent d'elles-mêmes, autrement dit : vu leur 'failure to raise a substantial issue' (ibid. p. 279). Les phrases engendrant les paradoxes sont telles qu'il ne saurait y avoir rien en quoi pût consister leur statut de vérité; autrement dit (p. 295): dans de tels cas 'there just is no <u>how things are</u> in the key respect'. Mais cela est impossible. Il y a toujours un 'how things are', car les choses sont toujours comme elles sont (même si, tout à la fois, elles ne sont pas comme elles sont et elles sont, en revanche, comme elles ne sont pas).

§13.- Une autre solution de l'aporie du menteur fut proposée par Jean Buridan et Paul de Venise (Paolo Veneto) -cf. à ce propos le §5 du chap. 8 de la Section II du Livre III de cette étude; p. 180 du Livre III). Feu Arthur Prior, comme on le sait, fit sienne cette solution de Buridan consistant à dire que chaque phrase contient l'affirmation de sa propre vérité, quoi qu'elle dise d'autre.

A cette solution, vraiment ingénieuse, on peut opposer deux choses : s'il est certain qu'elle peut prévenir le surgissement de l'aporie du menteur (et probablement aussi de celle de Geach), le prix à payer semble être une régression à l'infini : chaque phrase p contiendrait, enchâssée dans p, une phrase p' disant que p est vraie; alors on peut espérer que p' contienne une phrase p" disant que p' est vraie, et ainsi à l'infini; chaque phrase serait une conjonction infinie.

La deuxième objection qu'on peut avancer contre cette solution (elle a été énoncée par Mackie; cf. M:5, pp. 252-3) c'est que la solution paraît <u>ad hoc</u> pour le seul cas du <u>menteur</u> (ou d'autres semblables) et inefficace, en revanche, pour faire face aux apories de Richard, Berry et Grelling.

§14.- Parmi les traitements respectueux de l'orthodoxie classique -du moins en un sens particulier- celui de Kripke dans K:25 est, à nos yeux, le plus captivant. Il nous semble préférable à calui de Tarski et à tous ceux que nous avons mentionnés ci-dessus; il conduit à plusieurs résultats fort souhaitables, comme un langage contenant son propre prédicat de vérité. Le caractère technique de la deuxième moitié de l'article de Kripke nous empêche d'en aborder ici l'examen, car nous ne voulons pas allonger excessivement ce chapitre. Parmi les grands mérites de ce travail il faut compter celui d'avoir démontré qu'aucun procédé ne peut être établi qui permette, par simple inspection syntaxique de la forme d'un énoncé, de déterminer s'il enfreint ou non les interdictions dénivellatrices (bien que Kripke repousse le terme 'interdiction' dans de tels contextes).

La solution de Kripke, pour captivante qu'elle soit, ne nous satisfait pas. Tout d'abord, si elle n'établit aucune indexicalisation à la Tarski, elle maintient tout de même un concept de vérité par paliers : une phrase étant donnée qui contienne le mot 'vrai', il faudra en chercher le niveau empiriquement; une fois son niveau trouvé, on pourra alors décider si elle a ou elle n'a pas de valeur de vérité (et, éventuellement, connaître la valeur de vérité qu'elle a, si tant est qu'elle en possède une). Face à cela, nos deux notions de vérité sententielle (aussi bien celle, primitive, de notre première approche -à laquelle était associé le schéma (U)- que celle, définie, de notre seconde approche) sont non dénivellées. Dans nos deux approches, le sens du mot 'sententiellement vrai' est univoque et chaque phrase possède une valeur de vérité, même si nous ignorons laquelle.

Deuxièmement, Kripke admet des phrases sans aucune valeur de vérité, ce qui nous semble inacceptable, puisqu'ou bien il faut alors sacrifier le principe de tiers exclu, ou bien il faut sacrifier le principe d'instanciation des vérités logiques par n'importe quelle fbf, ou bien enfin il faut recourir aux procédés supervaluationnels que nous avons critiqués au §11.

Enfin, et surtout, le traitement de Kripke (et l'auteur lui-même met cela fort énergiquement en évidence ; K:25, p. 714) ne nous rapproche nullement de l'admission d'une langue universelle. Ainsi, p.ex., les phrases comme celle du menteur ne sont pas vraies dans le langage-objet, mais on ne peut pas le diredans lui. On doit le dire dans un métalangage atteint dans 'some later stage in the development of natural language'. Et Kripke de conclure : 'The necessity to ascend to a metalanguage may be one of the weaknesses of the present theory. The ghost of the Tarski hierarchy is still with us'. Qui plus est : le langage où perlent les locuteurs non prévenus philosophiquement serait différent de celui où Kripke a écrit son article.

Chapitre 8.- LA PREVENTION DES APORIES LOGIQUES DANS Am ET Amj

§1.- L'axiome de compréhension (ou de séparation) peut être formulé de plusieurs façons différentes, selon qu'on admette ou non la préfixation par des quantificateurs universels et/ou existentiels, soit de l'axiome, soit du membre biconditionnel de droite (i.e. du résultat de substituer dans la formule abstractive à chaque occurrence de la variable du préfixe abstracteur une occurrence de la variable du quantificateur préfixé à l'axiome). Ces diverses possibilités furent étudiées il y a une quinzaine d'années par Th. Skolem qui montra que, pour certains modèles, on peut avec une logique sententielle trivalente ou infinivalente asserter une version de l'axiome de compréhension où on ne place aucune restriction (sur le caractère stratifiée de la matrice abstractive, p.ex.) (Cf.S:15). Toutefois, généralement parlant, une logique multivalente peut engendrer des apories dans la théorie des ensembles.

Maydole, dans M:8, aborde ce sujet d'une manière approfondie et présente nombre de résultats intéressants (pour la plupart négatifs, hélas!; cf. notamment chaps. II et III). Le caractère quelque peu décevant des résultats obtenus peut être en partie -mais en partie seulement- mis sur le compte du fait que Maydole étudie seulement -sauf erreur de notre part- des systèmes surconsistants. Mais il n'y a jusqu'aux systèmes paraconsistants qui ne soient impuissants à asserter un shéma de compréhension naïf (c-à-d sans restrictions) sauf, peut-être, lorsque la logique sententielle sous-jacente est relevante. (Notons toutefois que Maydole lui-même parvient à quelques résultats positifs, conçus par lui sous l'inspiration des travaux de Zadeh : M:8, pp. 246ss; et notamment il affirme -ce qui est confirmé dans Am et Amj- le caractère flou de la classe russellienne).

§2.- La solution que nous proposons aux apories logiques dans le cadre de Am est, pour une part, semblable à celle de Quine dans NF (système dont on a prouvé, apparemment, la consistance récemment; cette preuve semble -en vertu d'un théorème préalablement prouvé- démontrer aussi la consistance de ML); mais elle en diffère à deux points de vue :

1) A la différence de NF, Am admet l'existence de n'importe quelle classe (c-à-d de chaque classe caractérisée par une matrice donnée, quelle qu'elle soit). Ce que Am restreint ce sont les conditions qui nous permettent d'asserter le degré (ou seuil) d'appartenance d'un élément à un ensemble donné.

2) A la différence de NF, Am admet non seulement l'existence de classes à matrice non stratifiée, mais même l'assertabilité des conditions déterminant le degré d'appartenance à certaines de ces classes-là.

Quant au point (1), remarquons en effet que "x̂p" (pour chaque substitut de p) est un théorème de Am; or "x̂p" veut dire précisément : la classe des choses qui p existe (puisque dans Am chaque chose x est strictement identique au fait que x existe).

Venons-en au point (2). Selon l'axiome de compréhension A2008, on peut affirmer, dans Am, ce qui suit :

x̂NxIIgNx x̂FxIIgFx x̂PxIIgPx x̂LYxIIgLYx

En outre, on prouve aisément que chacune de ces classes-là (x̂Nx, x̂Fx, x̂Px, x̂LYx...) est un élément, c-à-d est telle que le résultat de préfixer du foncteur 'H̸' la formule qui la désigne est une phrase vraie (mieux : ce résultat est, dans les cas mentionnés, une thèse du système). Or, les matrices de ces classes sont abstractivement recevables de type (b). On peut, par suite, en vertu du fait que ce sont des éléments, insérer ces formules abstractives dans la matrice d'une classe dont la matrice est abstractivement recevable de type (c) (i.e. stratifiée). Soit, p.ex. :

(3) ẑEv(vyIIzy'.Bf(zy").H̸v&N(zv))

Substituons maintenant dans (3) à y, y' et y" 'x̂Px', et on aura alors ce que nous avons appelé 'classe néo-russellienne' (en notation symbolique : neor), puisqu'on aura à la place de (3)

(4) ẑEv(H̸v.BPv.(gPzIIgPv)&N(zv))

Or (4) équivaut -on le prouve aisément- à (5) :

(5) ẑ(BPz&N(zz))

ce qui est précisément la formule abrégée comme 'neor'. Dès lors, en vertu de A2008 :

(6) Uz(Hz+.zneorIIg(BPz&N(zz))

Or neor -c-à-d la classe désignée par (5)- est un élément comme on le prouve fort aisément. En effet : x̂l est un élément divers de la classe nulle -donc de l'infinitésimalement vrai; si neor n'était pas un élément, c-à-d si neor était strictement identique à l'être -au référent de 'l'-, alors nous aurions (7), donc (8) :

(7) Jf(x̂lneor) (8) JN(x̂lx̂l)

Or (8) est une absurdité. Par conséquent, neor est un élément. Nous pouvons maintenant prouver commodément tous les résultats sur la classe neor que l'on trouve dans les théorèmes A2239ss de l'annexe N° 2 du Livre I.

On pourrait penser que d'autres classes quasi-russelliennes ou para-russelliennes pourraient nous donner du fil à retordre. Soit, p.ex., ꭆF(xx). En vertu de A2001 nous avons que :

(9) F(xx)II0

Dès lors, nous avons ce théorème : ꭆF(xx)IIꭆ0; donc : ꭆF(xx)II∅ (et, par conséquent, en vertu de A2009, ꭆF(xx)IIà)). De tout cela il découle (10), donc (11)

(10) Ux(Y(xꭆF(xx)+Hx) (11) Y(ꭆF(xx)ꭆF(xx))

Cela veut dire que la classe de toutes les classes qui ne s'appartiennent point à elles-mêmes s'appartient à elle même infinitésimalement. Et cela n'engendre aucune aporie logique, mais une simple antinomie non trivialisante, à savoir: ꭆF(xx)ꭆF(xx).N(ꭆF(xx)ꭆF(xx)). D'une manière générale, nous avons, en vertu de A2001, que (12) est vrai :

(12) Ux(xꭆF(xx)IIgF(xx))

(La preuve de (12) utilise aussi A2009; sans cet axiome tout ce que nous pourrions prouver serait (12bis)).

(12bis) Ux(xꭆF(xx)IIgF(xx)+Hx)

Le principe de compréhension est donc applicable à la matrice 'F(xx)', même si celle-ci n'est pas abstractivement recevable. (Ces résultats sont exposés dans l'Annexe N° 2 du Livre I; théorèmes A2241ss).

Il n'en va pas de même pour la matrice 'N(xx)', celle qui détermine la classe purement et authentiquement russellienne -celle que nous avons appelée 'rus'-. Ceci constitue une particularité remarquable de Am, à la différence d'autres théories inconsistantes des ensembles, où les matrices qui posent problème sont celles qui, sans être stratifiées, contiennent une négation forte. Mais, rassurons-nous!, l'axiome de compréhension de Am (A2008) ne permet point d'affirmer (13) :

(13) Ux(xrusIIgN(xx)+Hx)

(13) entraînerait des apories. En effet, en vertu de A2008, on peut prouver la démonstration qui va de (14)à(18), si l'on se donne la prémisse (13) :

(14) Hx+Hy+.xꭆP(xy)IIgP(xy)
(15) ~~H~~rus
(16) Hx+.P(xꭆP(xrus))IIP(xrus)
+.P(xꭆPN(xx))IIPN(xx)
(17) ~~H~~ꭆPN(xx)
(18) P(ꭆPN(xx)ꭆPN(xx))IIPN(ꭆPN(xx)ꭆPN(xx))

Or (18) est une surcontradiction. Dès lors (13) = absolument faux. Mais (13) n'est pas un théorème de Am (au contraire, la surnégation de (13) est un théorème de Am, comme nous venons de le prouver à l'instant). Cela veut dire que la classe russellienne, bien qu'elle existe selon Am (comme toute autre classe), n'a pas pour condition d'appartenance la simple satisfaction de sa matrice caractéristique, mais des conditions plus compliquées que nous ignorons. Tout ce que nous savons c'est que chaque élément est tel que, ou bien il appartient à rus dans la mesure où il ne s'appartient pas à lui-même, ou bien il appartient à rus infinitésimalement; car un élément quelconque appartient à une classe caractérisée par une matrice donnée p, quelle qu'elle soit, ou bien infinitésimalement ou bien dans la mesure ou il satisfait la matrice p. Cela nous permet de prouver dans Am un certain nombre de théorèmes concernant la classe russellienne -c-à-d concernant les conditions d'appartenance à cette classe-là-. Ces théorèmes figurent dans l'Annexe N° 2 du Livre I (théorèmes A2240ss). Aucun de ces théorèmes ne semble renfermer quelque risque d'aporie que ce soit.

Par les mêmes procédés que nous avons employés pour obtenir (6) à partir de (3), (4) et (5), on peut obtenir d'autres classes quasi-russelliennes, dont il est question, p.ex., dans les théorèmes A2242ss de l'Annexe N° 2 du Livre I.

Notons que, si la restriction des substituts des variables libres à des termes désignant des éléments (ou des variables prenant comme valeurs uniquement des éléments) était abandonnée, des apories s'ensuivraient, car on aurait (19) :

(19) ẑEv(zyIIvy'&LY(zv))

Or (19) est stratifié; on pourrait donc avoir par instanciation et en vertu de Aq :

(20) f(ẑLY(zz)ẑLY(zz))=Y(ẑLY(zz)ẑLY(zz))

Or (20) est une surcontradiction. Mais (20) ne découle pas des axiomes de Am, car tout ce que A2008 permet d'obtenir ce sont des formules comme (21)

(21) f(ẑ(B$z&LY(zz))ẑ(B$z&LY(zz)))=.B$ẑ(B$z&LY(zz)).Y(ẑ(B$z& LY(zz))ẑ(B$z&LY(zz)))

(où l'on substitue à '$' un des foncteurs : Y, f, t, tN, P, P, N, etc.). Dans chacun de ces cas-là on aura que la classe définie par la matrice en question, u, s'appartient infinitésimalement à elle-même et qu'il est relativement tout à fait faux que B$u. Tout cela est paradoxal, parce que le réel est paradoxal; mais rien de tout cela n'est surcontradictoire. (Notons que même pour la classe x̂LY(xx), dont la matrice est non abstractivement recevable, on peut démontrer dans Am des théorèmes intéressants, tels que ceux énumérés dans l'Annexe N° 2 du Livre I, théorèmes A2243ss). Avant de fermer ce paragraphe, notons que si la restriction des quantificateurs (dans les matrices stratifiées) à des éléments était abandonnée, des résultats aporétiques s'ensuivraient; et de même si l'on permettait dans les matrices stratifiées des occurrences de variables affectées par des foncteurs, ou concaténées avec des fbf qui ne fussent pas des variables individuelles. La démonstration de ces affirmations est fort simple, et nous l'omettons ici.

§3.- Venons-en à la solution des apories logiques dans le cadre de Amj. Amj divise les éléments en deux grands groupes : les éléments turbulents et les éléments rangés. Les éléments turbulents sont les individus qui, à certains égards, existent plus qu'infinitésimalement et qui à d'autres égards n'existent qu'infinitésimalement.

Grosso modo (mais grosso modo seulement) les classes dont Am définit les conditions d'appartenance (les classes caractérisées par des matrices abstractivement recevables de Am) correspondent à des individus rangés de Amj. Il y a pourtant des exceptions, à savoir les classes dont les matrices sont

sont constituées par une seule variable individuelle précédée d'une suite de foncteurs où figurent des occurrences de : f,Y, b, j. (Certaines de ces matrices peuvent être montrées, indirectement, comme déterminant des élément rangés; tel est le cas, p.ex., de x̂Lfx, c-à-d du support de l'être; d'autres, apparemment, ne peuvent pas l'être). D'autres matrices abstractivement recevables dans Am sont soumises à une restriction ultérieure dans Amj : les seuls substituts des variables libres sont, dans Amj, les éléments rangés; et les quantificateurs doivent être restreints, non pas à des éléments en général, mais à des éléments rangés. Cela dit, il reste que, à ces exceptions et restrictions près, les matrices abstractivement recevables des deux systèmes coïncident.

Les éléments turbulents de Amj appartiennent à une zone intermédiaire entre le foncièrement un rien réel (la classe nulle ou vide) et les éléments foncièrement plus qu'un rien réels. Les éléments turbulents sont donc non rangés et non rangeables. Ils n'appartiennent à aucune classe si ce n'est infinitésimalement.

Dans Amj, en dépit des restrictions supplémentaires par rapport à Am concernant les formules abstractivement recevables, on peut obtenir, à cause de l'axiome de compréhension -qui, lui, ne connaît aucune restriction (sauf, évidemment, l'interdiction de toute occurrence du foncteur 'T')- Amj007, presque tous les résultats -voire peut-être tous- qu'on obtenait dans Am plus directement. Ainsi, p.ex., à propos du support de l'être, on peut même prouver qu'il s'agit d'un élément rangé et, par suite, on peut démontrer ce théorème de Am :

suplsuplIILfsupl

Mieux : dans Amj, on peut prouver (et ceci n'est pas prouvable dans Am) ce qui suit : H(suplsupl. Pour prouver ces résultats on exploite le fait que suplIIx̂l°supconfià .

Dans Amj nous savons beaucoup plus de choses que dans Am sur la classe russellienne (c-à-d x̂N(xx)), car Amj détermine non seulement les conditions nécessaires mais aussi les conditions suffisantes pour appartenir plus qu'infinitésimalement à rus. Toutefois, rus n'est pas un élément rangé; cela est facile à prouver (d'une manière analogue à celle où nous avons prouvé tantôt, dans Am, que 'Ex(M̸x.Ƀ(xrusIgN(xx))'). Autrement dit : dans Amj ceci est un théorème : ǯx̂N(xx). Dès lors, rus s'appartient à elle-même infinitésimalement. Nous avons donc les théorèmes suivants dans Amj :

UzY(rusz) Jfrus.JYrus rusrus.N(rusrus) Ff(rusrus)

Dans Amj on a, comme dans Am, que x̂F(xx) est la classe nulle (i.e. l'infinitésimalement réel).

D'autres matrices quasi-russelliennes déterminent dans Amj des éléments rangés; p.ex. ẑ(BfNz&LY(zz)), et bien d'autres identiques à des matrices de Am qui s'avèrent -indirectement- abstractivement recevables, bien qu'elles ne soient pas stratifiées. (Le procédé par lequel ces matrices s'avèrent abstractivement recevables est toujours le même : insérer dans une matrice stratifiée des abstracteurs de classe abstractivement recevables mais non stratifiés).

Une classe qui est turbulente selon Amj c'est x̂LY(xx). Si cette classe était rangée nous aurions : f(x̂LY(xx)x̂LY(xx))=Y(x̂LY(xx)x̂LY(xx)). On aura donc la conclusion par Modus Tollens : ǯx̂LY(xx). Cela dit, dans Amj nous pouvons déterminer une foule de classes qui appartiennent tout à fait audit ensemble, comme : ẑ(BfNz&LY(zz)), ẑ(BPz&LY(zz)), ẑ(BPz&LY(zz)), etc.; et aussi : iẋl, iiẋl, iiiẋl, iiiiẋl... ; ià, iià, iiià, iiiià... Chacune de ces classes est telle qu'il est, tout à la fois, infiniment faux et infinitésimalement vrai qu'elle s'appartient à elle-même. Nous parvenons ainsi, dans Amj, à de nouveaux résultats paradoxaux; mais aucun de ces résultats ne semble engendrer des conséquences aporétiques.

§4.- L'aporie de Curry-Moh Shaw-kwei (cf. M:16) peut, elle aussi, être traitée avec succès dans Am et Amj. Soit, p.ex., la classe de Curry : /cur/ eq /ẋ(xxCp)/

(A vrai dire, cela n'est pas une définition, mais un schéma définitionnel; il n'y a donc pas une classe de Curry, mais un nombre infini de telles classes, en vertu des divers substituts non équivalents de "p" dans ledit schéma définitionnel). Am ne permet pas d'affirmer : Ux(Hx+.xcurIIg(xxCp)) , car la matrice de cur n'est pas abstractivement recevable. Mais on peut introduire, par voie d'instanciation, des classes néo-curryennes ou quasi-curryennes, telles celle-ci :

ẋ(xxRp.BLPx) ẋ(xxRp.FYNx) ẋ(xxRp.LBfNx)

Prenons la première de ces classes. Plus exactement -rappelons-le- il s'agit d'une famille de classes. Nous aurons donc (puisque ~~H~~ẋ(xxRp.BLPx)) :
ẋ(xxRp.BLPx)ẋ(xxRp.BLPx)IIg(ẋ(xxRp.BLPx)ẋ(xxRp.BLPx)Rp.
.BLPẋ(xxRp.BLPx))

Les lois d'absorption sont valides dans As. Certes, les procédés utilisés dans la logique classique pour prouver qu'une théorie naïve des ensembles conduit à l'aporie de Curry ne sont pas, tels quels, applicables dans As, car As n'admet pas le MP pour le conditionnel fort 'C', à moins qu'il ne soit affecté d'un foncteur 'B'. Toutefois, moyennant certaines modifications (semblables à celles nécessaires pour adapter la preuve à un calcul modal comme S5, où le MP serait restreint au conditionnel strict) on obtient :

BPẋ(xxRp.BPx)GBfp

Si on substitue à la variable sententielle p une formule q telle que "Bfq" soit tout à fait faux, la conclusion, par contraposition, sera : ~~B~~Pẋ(xxRq.BPx) . Mais cela n'a rien d'aporétique.

Venons-en à Amj. De la même façon que nous venons de prouver dans Am que ~~B~~Pẋ(xxRq.BPx) (si q est une formule telle que "Bfq" soit tout à fait faux), on obtient des résultats analogues dans Amj, car on peut prouver que ẋ(xxRp.BPx) est un élément rangé (plus exactement : on peut prouver cela pour un certain nombre de substituts de p; il en va de même, au demeurant, pour Am; mais, pour simplifier, on peut supposer que p est une formule stratifiée quelconque telle qu'il soit tout à fait faux que "Bfp"). Mais dans Amj on peut, au surplus, prouver un autre résultat : la classe des classes qui s'appartiennent plus qu'un rien à elles-mêmes seulement s'il est plus qu'un rien vrai que p -si p est une formule telle que "Bfp" soit entièrement faux- cette classe-là donc est un élément turbulent; en notation symbolique : $ẋ(xxRp) . Par conséquent, l'axiome de compréhension de Amj empêche d'affirmer:

f(ẋ(xxRp)ẋ(xxRp))IIf(ẋ(xxRp)ẋ(xxRp)Rp)

L'aporie est donc évitée.

§5.- Une question que l'on pourra se poser à propos du traitement des apories logiques dans le cadre de Am et Amj est celle-ci : qu'apporte-t-il de neuf par rapport aux traitements de Quine dans NF et ML respectivement? Ce qu'il apporte de neuf c'est : 1° -et comme nous l'avons déjà indiqué- la démalthusianisation de la théorie des ensembles -au regard de NF-- et l'affirmabilité des conditions d'appartenance à des nombreuses classes caractérisées par des matrices non stratifiées -dont certaines sont abstractivement recevables et d'autres, sans l'être, peuvent être l'objet d'une détermination (dans Am et, encore plus, dans Amj) des conditions d'appartenance qu'elles imposent aux divers éléments-. 2° le fait que bien des classes caractérisées par des matrices non stratifiées appartiennent plus qu'infinitésimalement à d'autres ensembles, et que toute classe, quelle qu'elle soit, appartient -ne serait-ce qu'infinitésimalement- à chaque ensemble. Sur ce dernier point, Amj est plus restrictif que Am, puisque, tandis que pour Am il est vrai, p.ex., que "P(rusirus)", selon Amj, en revanche, rus étant un élément turbulent, il n'appartient qu'infinitésimalement à quelque classe que ce soit. Mais Amj confère le statut d'élément rangé à des ensembles caractérisés par des matrices non stratifiées qui s'avèrent -indirectement- abstractivement recevables, tels :
$\hat{x}$(BPx&xx) , $\hat{x}$(BPx&LY(xx)) , $\hat{x}$(BPx&N(xx)) , etc.

On obtient ainsi dans Am et dans Amj un élargissement considérable des horizons, un accroissement ontologique (par rapport à NF) et un assouplissement fort important des conditions imposées aux éléments rangés (par rapport à ML, si nous identifions les éléments de ML aux éléments rangés de Amj). Cela dit, il demeure que le profil de Am et Amj garde une ressemblance certaine avec celui de NF et ML (la ressemblance est plus prononcée entre Amj et ML que ne l'est entre Am et NF).

Si Quine était parvenu, dans le cadre de la logique classique, à surmonter partiellement les contraintes de dénivellation, les théories des ensembles Am et Amj poursuivent dans le sillage de l'oeuvre logique de Quine, cette entreprise et la mènent beaucoup plus loin. Ce franchissement de certaines barrières, tout en gardant des précautions nécessaires pour prévenir des apories, est conforme à nos intuitions.

Un avantage majeur des deux systèmes NF et ML c'est l'admission d'une classe de tous les éléments, classe qui, au surplus, est elle-même un élément et, dès lors, s'appartient à elle-même. Or, on ne niera pas, croyons-nous, que des expressions comme 'toutes les choses', 'n'importe quoi', 'tout ce qui existe', etc. sont des expressions extrêmement fréquentes dans le parler courant et, encore plus, dans le parler philosophique. A ce propos, néanmoins, NF peut paraître préférable à ML, où dans de telles expressions il faut toujours ajouter une nuance précisant que l'on parle, non pas des choses en général, mais seulement des éléments. On pourrait craindre que cet inconvénient de ML ne fût partagé par Amj. Mais non: dans Amj la classe de toutes les choses (l'être) est telle que même les éléments non rangés en sont des membres; seulement , ils en sont des membres dans une mesure infinitésimale.

En regard d'autres théories classiques des ensembles, NF et surtout ML (en dépit de la réserve que nous venons de formuler) nous semblent beaucoup plus satisfaisantes : elles n'introduisent pas les ensembles par bribes et morceaux; elles ne placent pas des bornes contre-intuitives et encombrantes aux fbf. Am et Amj conservent et développent ces bons résultats de l'investigation quinéenne.

ANNEXE N° 1

L'ENGLOBEMENT D'AUTRES SYSTEMES DE LOGIQUE DANS A

Un des arguments avancés contre la considération des logiques non classiques comme pouvant être traitées de plain-pied avec la logique classique c'est que ces systèmes sont soit triviaux soit incomplets. Cette thèse ressort d'une analyse de Tarski (T:5). Les Kneale en tirent cette conclusion (K:10, p. 575) :

> It appears therefore that even from the purely formal point of view the ordinary two-valued system has a unique status among deductive systems which can plausibly be called logic, since it contains all the others as fragments of itself. In short, they are not alternatives to classical logic in the sense in which Lobachevsji's geometry is alternative to Euclid's.

La preuve formelle de Tarski est impeccable. Les conclusions qu'on veut en tirer ne sont cependant pas fondées.

Premièrement, le travail de Tarski se fonde sur le théorème (ou lemme) de Lindenbaum. Or ce théorème n'est pas valide sans restriction pour le système A. Le théorème de Lindenbaum paraît applicable -dans sa version entière- à des théories fermées par rapport à la règle simple de détachement. Il faudrait une preuve spéciale pour démontrer que des systèmes qui ne sont pas fermés par rapport à ladite règle possèdent, eux aussi, des extensions simples complètes non saturées. (En fait, nous montrerons dans l'Annexe N° 3 de ce Livre que le théorème de Lindenbaum est infirmé par Amj, car toute extension complète de Amj est incohérente).

Deuxièmement (et ceci est beaucoup plus important), il faut <u>prouver</u> qu'un système complet est préférable à un système incomplet. Si l'on peut éviter des apories en payant le prix de l'incomplétude, alors le prix nous paraît dérisoire car les solutions dénivellatrices ont des inconvénients par trop manifestes.

Troisièmement, et surtout, la preuve de Tarski concerne des systèmes possédant <u>un seul</u> foncteur conditionnel 'C', ainsi qu'un seul foncteur de négation 'F', pour lesquels certaines tautologies sont vraies (les équivalents de "pC.qCp", "FpC.pCq", "pC.pCqCq", "qCrC.pCqC.pCr", "FpC.pCq", "pC.FqC.F(pCq)", "pCFFp"). Or un système comme As (ou bien comme les systèmes Cn -pour n fini- de da Costa) reproduit dans son sein pour certains foncteurs, exactement le CSC, tout en constituant une extension conservative de ce calcul, tout en possédant, au surplus, d'autres foncteurs pourvus d'autres propriétés. Ce cas n'est pas prévu dans la preuve de Tarski. Cette preuve ne prévoit pas non plus, du reste, la présence dans des systèmes non classiques de logique (pas forcément simplement inconsistants) de foncteurs non classiques en sus des foncteurs classiques et ayant d'autres rôles sémantiques, comme les foncteurs flous 'il est à peine vrai que', 'il est plutôt vrai que' etc.

Par conséquent, loin de considérer le système A comme un système plus pauvre que la logique classique, il faut le considérer, au contraire, comme un système plus riche, puisqu'il englobe la logique classique.

Pour être plus précis, il faut distinguer deux types d'englobement d'un système par un autre (une classification des relations d'englobement entre des systèmes de logique sententielle ayant des matrices caractéristiques finies est présentée par Rescher dans R:2, pp. 71ss). Un système S T-englobe un système S' ssi S est une extension, conservative ou non, de S'; un système S C-englobe un système S' ssi S est une extension conservative de S'. Ainsi on peut dire que S5 T-englobe S4, sans qu'il soit vrai pour autant que S5 C-englobe S4. Un système S C-englobe un système S' ssi pour un certain sous ensemble E des signes de S il y a un isomorphisme entre E et la classe des signes de S', isomorphisme qui induit une bijection entre la classe des théorèmes de S' et la classe des théorèmes de S qui ne contiennent que des signes de E. Des deux relations d'englobement entre des systèmes différents, c'est le C-englobement qui constitue la relation la plus importante.

En ce sens, il est intéressant de constater divers faits touchant le C-englobement de divers systèmes de logique par *A*.

1) *A* C-englobe le CSC et aussi la logique classique quantificationnelle de premier ordre. En effet : la classe des théorèmes de *Aq* qui ne contiennent que les foncteurs 'F' et '+' (ou, alternativement, 'F' et '•'; ou encore : 'F' et 'C') est un décalque de la logique classique.

2) Pour chaque n fini, toute logique n-valente complète est C-englobée par *A*. Une preuve détaillée de cela n'est pas difficile. Il suffit de faire voir que *A* contient des sous-ensembles de signes pour chacun desquels on peut établir un isomorphisme entre le sous-système de *A* qu'il détermine et une algèbre de Post. En exploitant des résultats de la recherche de Rasiowa (cf. R:29, p. 133), on peut introduire pour chaque logique n-valente n-1 foncteurs monadiques de *As*, 'du', définis ainsi : /du(p)/ eq /uDp&p/, en substituant à 'u' les constantes que voici : 'à' seulement pour la logique à deux valeurs (ce qui nous fournit encore une autre manière d'introduire définitionnellement le CSC comme sous-système propre de *As*, i.e. comme C-englobé en lui); 'à' et 'l' pour la logique à trois valeurs; 'à', 'ù' et 'l' pour la logique à quatre valeurs; 'à', '$\frac{1}{2}$', 'ù' et 'l' pour la logique à cinq valeurs; 'à', 'X$\frac{1}{2}$', 'K$\frac{1}{2}$', 'ù', 'l' pour la logique à six valeurs; 'à', 'X$\frac{1}{2}$', '$\frac{1}{2}$', 'K$\frac{1}{2}$', 'ù', 'l' pour la logique à sept valeurs; 'à', 'XX$\frac{1}{2}$', 'X$\frac{1}{2}$', 'K$\frac{1}{2}$', 'KK$\frac{1}{2}$', 'ù', 'l' pour la logique à huit valeurs et ainsi de suite. Sur cette base, on définit des conditionnels, des biconditionnels et des négations appropriées et on obtient le résultat recherché. (Comme un cas particulier, et à titre de simple illustration, citons le fait -dont nous omettrons ici la preuve- que le système de logique trivalente de Vuckovic-Sobocinski -que Vuckovic appela A, soit dit en passant- est C-englobé par *As*; il faudrait modifier seulement la règle de détachement de façon à en restreindre l'application aux seuls théorèmes de logique).

3) *As* C-englobe le calcul sententiel de logique constructiviste avec négation forte (cf. R:29, p. 279). Il suffit de prendre l'ensemble de foncteurs (ç,ç̈,•,+,N,-) et de prendre comme théorèmes de ce sous-système de *As* les tautologies de *As* qui ne contiennent que ces foncteurs-là et qui sont préfixées d'une occurrence de 'H' -i.e. de la suite de foncteurs 'N-'-.

4) A C-englobe le calcul G_{aleph} (prenant comme seuls foncteurs +, ., c, F, mais préfixant en même temps chaque formule du foncteur 'H', c-à-d écartant les tautologies qui cessent de l'être lorsqu'elles sont préfixées d'un 'H'). Ce système est le calcul intuitionniste élargi de l'axiome "H(pcq+.qcp)". On peut aussi relever que l'axiome qui caractérise G_3 en sus de ceux du calcul intuitionniste, savoir "H(Fpcqc.qcpcqcq)" n'est pas une tautologie de G_{aleph} ni non plus, par suite, du sous-système de As construit de la manière que nous venons d'indiquer.

Des problèmes restent posés quant à l'élucidation des relations de C-englobement (et/ou de T-englobement) entre le système A et des systèmes tels que : le système de logique infinivalente de Lukasiewicz; des systèmes non strictement vérifonctionnels; certains systèmes tensoriels (ou logiques-produit) contenant des foncteurs qui sont le "produit" de deux foncteurs divers d'une (ou de deux) logique(s) scalaire(s); le calcul intuitionniste de Heyting, non renforcé, etc.

ANNEXE N° 2

COINCIDENCES ET DIVERGENCES ENTRE L'APPROCHE PROPOSEE DANS CETTE ETUDE ET D'AUTRES THEORIES DES ENSEMBLES FLOUS

Les travaux de recherche de Lofti Zadeh et ses coéquipiers dans la fondation de la théorie des ensembles flous revêtent une importance qu'on ne saurait exagérer; (cf., p.ex., Z:7 et Z:8; cf. aussi un travail de Moisil reproduit dans M:21, pp. 157-63, où l'apport de Zadeh est examiné dans son rapport aux logiques lukasiewicziennes).

La fertilité de l'approche de Zadeh et ses collaborateurs est remarquable. Elle a suscité des recherches approfondies dans de nombreux domaines du savoir. Dans la logique philosophique on peut constater, hélas!, un incontestable retard dans l'exploitation des idées de Zadeh au regard d'autres disciplines. Il nous est cependant agréable de signaler un travail récent, celui du professeur Peter Schotch, S:30, qui expose une intéressante application de la théorie des ensembles flous à la logique modale. La logique modale débordant le cadre de ce Livre, nous nous abstiendrons d'exposer les intéressants résultats de l'investigation du professeur Schotch. Il mérite toutefois d'être signalé une des conclusions auxquelles parvient M. Schotch, en parfait accord avec tous les systèmes de logique paraconsistante -contradictoires ou non- : la non-validité de la loi de Pseudo-Scot (pour la négation simple, bien entendu) :

> Thus, that a contradiction implies anything need not be necessary (in the sense that it is false that it must be necessary).

D'une manière générale, il faut dire que notre approche coïncide avec celle de Zadeh -et avec celles qui ont été plus directement inspirées que la nôtre par les travaux de Zadeh- sur des points importants. Tout comme elle, la nôtre insiste sur la nécessité de concevoir des ensembles dont les limites soient des transitions graduées et non pas des bords tranchants; sur le besoin d'avoir des degrés infiniment variés d'appartenance et, par suite, une infinité de valeurs de vérité; sur l'importance d'introduire des modificateurs aléthiques flous, comme 'passablement', 'très', 'plutôt', etc.; sur l'assignation de fonctions caractéristiques floues, et non pas vulgaires, à ces modificateurs aléthiques (ce en quoi ils diffèrent des opérateurs 'J' de Rosser & Turquette, lesquels envoient les phrases possédant une valeur de vérité donnée sur 1, toutes les autres sur 0; notons cependant que, pour certaines de ses valeurs de vérité, As possède aussi ce type d'opérateurs vulgaires, p.ex. ceux-ci : 'H', 'LY', 'LYN', 'LPS', 'L(pINp)', etc.).

A côté de toutes ces convergences si marquantes, nous ne pouvons pas omettre des différences entre les deux doctrines Notre traitement est axiomatisé et, non seulement il accorde beaucoup d'importance aux problèmes classiques de consistance absolue (non trivialité) et de rigueur formelle, mais soutient même la possibilité d'atteindre grâce à la logique floue de nouveaux sommets qui demeuraient inaccessibles pour la logique classique; il vise, par ce biais, à depasser certaines limitations des systèmes formels classiques. En revanche, Bellman et Zadeh affirment (B:2, p. 151) :

> Clearly, the problems, the aims and the concerns of fuzzy logic are substantially different from those which animate the traditional logical systems. Thus, axiomatization, decidability, completeness, consistency, proof-procedures and other issues which occupy the center of the stage in such systems are, at best, of peripherical importance in fuzzy logic.

Par ailleurs, de par son inspiration réaliste-radicale (le flou étant conçu par nous comme appartenant au réel, nullement comme un ajout de l'esprit connaissant), notre approche établit seulement des règles d'inférence exactes et non pas approximatives, demeurant, à ce propos, sur le même plan que la logique classique; notre approche n'inclut pas non plus les solutions ad hoc ou stochastiques que Zadeh envisage.

On trouve chez Zadeh une certaine tendance (cf. spm. B:2) à cantonner le flou au domaine du subjectif, à le regarder comme ressortissant à la considération de l'esprit humain et non pas à la nature même du référent réel et objectif. Nous trouvons dans B:2 (p. 106) des affirmations comme celle-ci:

> ... the model of reasoning embodied in fuzzy logic aims, instead, at an accommodation with the pervasive imprecision of human thinking and cognition. ... we frequently use a mixture of precise and approximate reasoning in problem-solving situations... On the whole, however, it is evident that all but a small fraction of human reasoning is approximate in nature...

Tout ceci met bien en relief une tendance que nous appellerions volontiers 'flavidéalisme', à laquelle s'oppose notre propre point de vue flavo-réaliste selon lequel la flavicité est une propriété objective des choses mêmes.

Une autre tendance que l'on trouve aussi surtout dans l'article de Bellman et Zadeh c'est celle de considérer la vérité comme locale, tandis que notre approche maintient la conception universaliste de la vérité en général et de la vérité logique en particulier défendue par la logique classique et ses fondateurs (Frege et le premier Russell, p.ex.), tout en acceptant aussi l'existence de vérités relatives.

Dans le traitement de Zadeh (cf., p.ex., B:2, pp. 143ss) la règle d'inférence principale est une règle d'inférence compositionnelle qui est présentée ainsi :

X est F
<u>X est dans la relation G avec Y</u>
Y est (F°G)

Mais on n'y dit rien qui permette de discerner, selon un critère fixe, quels types d'ensembles sont héréditaires ou quasi héréditaires pour quelles relations (en entendant par 'quasi-héréditaire' vis-à-vis d'une relation u un ensemble y tel que: xy.x;zuD§(zy) -où '§' est un foncteur d'assertion ou semi-assertion-). Il est évident que tous les ensembles ne sont pas quasi-héréditaires (et, a fortiori, ne sont pas héréditaires) pour une relation quelconque, que du fait qu'Olaf soit propriétaire du chien Baltcha et que celui-ci soit noir il ne découle rien sur la couleur d'Olaf. La relation que Zadeh considère est celle de "approximativement égal", mais il ne définit pas les conditions et les limites de remplaçabilité de x par y dans une phrase donnée à partir de la prémisse : 'x est approximativement égal à y'; peut-on en conclure, p.ex., que si x est le fils aîné de z, y est le fils aîné de z? Bellman et Zadeh laissent cela indéterminé, car ils pensent que 'the inference processes in fuzzy logic are, in most part, approximate rather than exact'; il s'agit donc d'un calcul approximatif ou de probabilités : si nous savons que x et y sont approximativement égaux, alors on risque peu de se tromper en remplaçant un nom de x par un nom de y dans une phrase quelconque; certes, la conclusion ne serait pas sûre, mais elle serait probable. (Peut-être l'approche en question serait-elle utile pour mieux articuler une théorie de la "plausibilité" au sens de Rescher). Notre propos à nous est différent : étudier l'imprécision du réel et les inférences tout à la fois sûres et floues. Toute idée d'incertitude est étrangère à notre traitement.

Une autre différence entre notre approche et celle de Zadeh c'est que cette dernière fait fond sur la logique infinivalente de Lukasiewicz dont l'ensemble des théorèmes est un sous-ensemble propre de l'ensemble des théorèmes de la logique classique, tandis que <u>As</u> contient comme sous-ensemble propre la logique classique. La différence saute aux yeux, p. ex., pour les principes de non-contradiction et de tiers exclu, qui ne sont pas des théorèmes de $Ł_{aleph}$ ni, partant, des thèses valides dans la théorie de Zadeh, et qui sont bien, en revanche, des théorèmes de <u>As</u>, donc de <u>Am</u> et <u>Amj</u>. Il en ressort que <u>Am</u> et <u>Amj</u> se doivent d'être des systèmes simplement inconsistants, ce qui n'est pas le cas pour la théorie de Zadeh. La raison en est que <u>As</u> contient : le principe de non contradiction, les lois de De Morgan et la loi involutive de la négation simple, plus la règle d'adjonction. Sur cette base toute reconnaissance de situations qui impliquent une négation du tiers exclu -c-à-d de situations floues- aboutit à des antinomies.

D'autres différences sont encore à relever : la logique sous-jacente de la théorie de Zadeh est scalaire, alors que <u>As</u> est un système tensoriel; la logique sous-jacente de la théorie de Zadeh ne contient comme valeurs que les (corrélats des) réels, tandis que l'ensemble des items aléthiques de la sémantique propre à As contient outre les réels de l'intervalle [0,1] des nombres chacun desquels peut être considéré intuitivement soit un réel positif diminué d'un infinitième ou bien un réel non négatif et plus petit que 1 augmenté d'un infinitième. Cela permet de tenir pour désignée toute valeur ne contenant qu'un nombre fini d'items nuls, alors que, sans l'existence de ces nombres aléthiques non-standard dans sa sémantique, une telle politique de désignation des valeurs aboutirait à une omega-surincomplétude, puisqu'on pourrait avoir que, pour chaque x, p/x/ fût un théorème et que, en même temps, "Uxp" ne fût pas un théorème; mieux : le système serait quasi omega-surinconsistant, en entendant par là ceci : on pourrait avoir pour chaque x "p/x/" comme théorème et, tout à la fois, "BExFp" comme théorème (et le système pourrait être même oméga-surinconsistant, en ayant "p/x/" comme théorème, pour chaque x, et, tout à la fois "ExFp" comme théorème -ou tout au moins comme formule à laquelle on devrait assigner une valeur fortement désignée, en vertu des règles sémantiques-). En regard de ces conséquences extrêmes, l'oméga-incomplétude et l'oméga-inconsistance forte qui caractérisent effectivement des extensions suffisamment riches de Am et Amj sont anodines (cf. le §7 du chap. 3 de la Section III du Livre III de cette étude; p. 229-30 du Livre III). L'oméga-incomplétude, telle que nous la concevons, est diverse: est oméga-incomplète une extension de Am ou de Amj ssi, pour chaque x, "Jp/x/" est une thèse de la théorie en question, mais "JUxp" n'en est pas une thèse. Il s'agit donc d'une propriété infiniment plus bénine que l'oméga-surincomplétude ci-dessus définie. C'est pourquoi, quand bien même aucune autre raison ne militerait en faveur de l'introduction des infinitièmes dans l'ensemble des nombres aléthiques de la sémantique d'une logique floue tensorielle comme As (nous croyons qu'il y a d'autres motifs aussi : formaliser des expressions comme 'il est un rien vrai que', ou la différence des conditions de vérité entre 'il est infiniment vrai que p' et 'il est entièrement vrai que p', etc.), la nécessité de prévenir l'oméga-surinconsistance et l'oméga-surincomplétude serait un motif suffisant.

Une différence plus apparente que réelle entre la conception de Zadeh et la nôtre sur la nature d'une logique floue c'est que, pour Zadeh, 'très vrai', 'un peu vrai', 'passablement vrai', etc. sont des valeurs de vérité floues, tandis que nous les traitons comme des foncteurs monadiques; mais, à notre avis, cette différence relève essentiellement de la façon de présenter les choses, et, au fond, aucune divergence sérieuse ne semble exister sur ce point entre les deux approches.

La divergence est aussi apparente en ce qui concerne la caractérisation que Zadeh propose de certains ensembles, tel jeune, comme des sous-ensembles des réels, c-à-d comme des sous-ensembles flous de l'ensemble des valeurs de vérité admises dans sa théorie. Cela est acceptable dans notre approche, si l'on identifie un ensemble à sa fonction caractéristique. Il nous semble cependant que la terminologie choisie dans cette étude est plus rigoureuse.

La conclusion qu'il faut -ce nous semble- tirer de cet ensemble de considérations c'est qu'il y a une différence incontestable d'optique entre l'approche de Zadeh et celle que nous proposons dans cette étude, différence qui semble tenir à une diversité de motivations philosophiques. Toutefois les divergences, pour importantes qu'elles soient, apparaissent -du moins actuellement et comparativement aux logiques et théories des ensembles non floues- comme secondaires.

ANNEXE N° 3

QUESTIONS OUVERTES

I.- La sémantique que nous proposons au chap. 3 de ce Livre par As et Aq pourrait probablement être généralisée; on pourrait peut-être trouver une sémantique caractéristique (ce que la dite sémantique ne semble pas être), non pas de Aq certes, puisque Aq est un système béant, mais tout au moins d'un système Aq' qui fût le résultat de réduire Aq aux seules fbf engendrées par les règles de formation explicitées; ou bien d'une extension simple non conservative de Aq'; ou bien enfin du résultat de retrancher de Aq' certains axiomes ou de les affaiblir (peut-être A4 et/ou A5 et/ou une partie de A11). En particulier, il faudrait montrer que le système ainsi formé pourrait être satisfait, non pas par une seule algèbre, mais par chaque algèbre appartenant à une classe d'algèbres donnée, possédant une caractéristique commune déterminée.

2.- Une approche algébrique de Aq est aussi une tâche à réaliser; il faudrait, en particulier, effectuer une étude comparative de cette algébrisation de Aq et des algèbres caractéristiques d'autres systèmes de logique non classique.

3.- Amj contient l'arithmétique élémentaire. La preuve de cela n'a pas été incluse dans ce Livre à cause de sa longueur. Nous comptons l'exposer dans un travail ultérieur de plus grande envergure sur Am et Amj. Apparemment, Am contient aussi l'arithmétique, mais il faudra le prouver. Il faudrait étudier aussi les rapports entre ces deux théories des ensembles et la théorie des ordinaux transfinis.

4.- Il faudrait étudier l'adaptabilité au moins partielle à Aq des procédés de décision établis pour la logique sententielle et quantificationnelle (de premier ordre) classique (comme, p. ex., ceux qui sont exposés par Quine dans Q:8). Quant aux procédés de décision qui s'avéreraient inapplicables, il faudra en prouver l'inapplicabilité. (En particulier, il faudra étudier les conséquences qui découlent de la non-prénexabilité générale de toutes les formules de Aq en ce qui concerne le foncteur d'implication).

5.- Une étude comparative plus poussée du système A et d'autres systèmes de logique paraconsistante s'avère aussi nécessaire. Le chapitre 2 de ce Livre constitue une simple et modeste ébauche en ce sens.

6.- La possibilité de construire sur la base de Aq des théories des ensembles diverses de Am et de Amj devrait être exploitée. Il vaudrait la peine d'explorer, notamment, la construction d'un système AZF, qui serait une adaptation de ZF ayant pour logique sous-jacente Aq.

7.- Nous devons constater que la combinatorisation du système A pose des difficultés apparemment insurmontables. D'un côté, As est un des rares (peut-être le seul) système de logique sententielle qui ne peut être satisfait par aucune matrice finie.

Cela veut dire que les combinatorisations habituelles de la logique bivalente ne peuvent pas être adaptées à As ni, partant, à Am. Nous ne sommes pas parvenu à imaginer une combinatorisation alternative. Par ailleurs, certains opérateurs usuels de la logique combinatoire (les opérateurs B, C, W, et K -en utilisant, bien entendu, ces signifiants d'une manière qui n'a rien à voir avec l'emploi qu'ils reçoivent dans A-) peuvent être tous réduits à des opérateurs redondantiels dans Am, qui n'ajoutent rien à leur argument. En voici la preuve (cf. à ce propos F;6, p. 188; selon notre habitude, nous supprimons des parenthèses en vertu de l'associativité vers la gauche) :

Kxy=x	Bxyz=x(yz)	Cxyz=xyz	Wxy=xyy
Kxl=x	Bxll=x(ll)	Cxll=xll	Wxl=xll
Kx=x	Bx=x	Cx=x	Wx=x

Comme on le voit, tous ces opérateurs se réduiraient à l'opérateur combinatoire 'I' (la fonction-identité). En outre, avec ces opérateurs on engendrerait une aporie dans Am. Soit, p.ex., le seul opérateur 'W' et son axiome caractéristique "Wxy=xyy". On aurait :

Wl=l
Wlx=lxx
lx=lxx
x=xx
X̂LxX̂Lx=X̂Lx
l=X̂Lx
àl=àX̂Lx
à=l
O

Ces résultats ferment-ils définitivement la porte à tout espoir de combinatorisation de Am? Ou peut-on les prévenir avec des mesures restrictives, en restreignant les équations combinatoires à des éléments, p.ex.?

8.- Am semble incompatible -tout comme NF- avec l'axiome de choix. Mais est-ce que Am est compatible avec des versions mitigées ou restreintes de l'axiome de choix? Et, pour ce qui est de Amj, quel est le rapport entre ce système et l'axiome de choix, ainsi qu'avec le théorème de Cantor et la théorie des grands cardinaux (théorème qui peut être traduit dans Am et Amj de plusieurs manières alternatives, du reste)?

9.- On peut conjecturer que, pour les raisons invoquées au chapitre 7 de ce Livre (dans le cadre de notre seconde approche pour prévenir les apories sémantiques), le théorème de Gödel n'est pas prouvable pour un système béant. Cette conjecture est-elle fondée?

10.- Le théorème de la déduction n'est pas valide pour As (ni donc pour Aq). Ce nonobstant, peut-on trouver des affaiblissements dudit théorème valides pour Aq et qui permettent tout au moins une gentzenisation partielle de ce système?

11.- Le théorème de Lindenbaum n'est pas valide pour Amj, si par théorème de Lindenbaum nous entendons ceci : chaque système non trivial possède une extension cohérente, simple et complète (en entendant par 'extension complète' d'un système S un système S' tel que, si p n'est pas une thèse de S', alors S'+{p} est trivial). Appelons 'théorie lindenbaumienne' toute théorie pour laquelle le théorème de Lindenbaum est valide. Amj n'est pas une théorie lindenbaumienne. En effet : supposons qu'on construit une extension complète A' de Amj; supposons que p n'est pas dans A'. Alors A'+{p} est trivial. Mais, en vertu des règles d'inférence primitives de Am, cela est possible seulement si "Fp" est un théorème de A'. Cela veut dire que, pour chaque formule p telle que p n'est pas dans A', "Fp" est dans A'. Prenons la formule 'fx̂(xx)' et abrégeons-la comme 'e'. On prouve dans Amj : FFe.JFe. Or, en vertu de la définition de complétude, ou bien e appartient à A' ou bien Fe appartient à A' -comme nous venons de l'indiquer ci-dessus pour le cas d'une formule p quelconque-. Si e appartient à A', A' est un système quasi-trivial, car nous aurions dans A' une thèse qui, si elle était un théorème de logique, engendrerait une aporie dans A'. En effet, si e était un théorème de logique, 'Be' serait aussi un théorème de logique; mais dans Amj 'BeIIO' est un théorème. Dès lors -en vertu des définitions que nous avons introduites dans l'Introduction de cette étude, (cf.p.3 du Livre I)-, si A' est cohérente, A' ne contient pas e. Mais pour la même raison A' ne contient pas non plus 'Fe', si A' est cohérente. Or, puisque A' est complète, elle contient l'une des deux formules e ou 'Fe'. Dès lors, A' n'est pas cohérente.

Supposons maintenant que A' contient e. Or dans Amj (donc dans A') il est un théorème que "J(eCO)". Dès lors, si nous ajoutions à Amj la règle rinfJ, à savoir :

p , J(pCq) ⊢ Jq

et que le résultat de cet ajout est appelé 'A'mj', alors nous pouvons affirmer ce théorème : toute extension complète de Am'j est triviale. Notons que, cependant, A'mj ne semble pas être triviale. Si, au lieu de former A'mj en ajoutant à Amj rinfJ, nous la formions en ajoutant l'axiome :

J(pCq).pCJq

alors le résultat serait effectivement trivial, en vertu de rinf 1 de As; en effet, ce théorème-ci serait alors prouvable:

JeCBe

ce qui trivialiserait le système. Mais rinfJ n'entraîne, apparemment, aucune conséquence similaire. Par ailleurs, si nous modifions la notion de complétude de A'mj en ce sens : un système S est complet ssi, au cas où p n'est pas un théorème de S, "Fp" est un théorème de S, dans ce cas aussi toute extension complète de A'mj est triviale, car aussi bien l'ajout de e que l'ajout de 'Fe' rendent le système trivial. Si A'mj est un système non saturé, notre théorème prouverait -contrairement à la formulation courante, sans restrictions, du théorème de Lindenbaum (cf.p.ex. C:48, p. 10; les différences terminologiques sont secondaires)- l'existence de théories non triviales n'ayant aucune extension complète non triviale.

Ces résultats constituent, sans doute, un tissu d'anomalies du point de vue de la théorie des modèles classique. Il faudra étudier plus en détail ces faits, en mettre à jour les conséquences pour ce qui est des diverses versions des preuves de compacité et de complétude et étudier quel renforcement de la classe des règles d'inférence de As peut être effectué sans entraîner la trivialité de Am ni celle de Amj. En particulier nous posons cette question : y a-t-il un renforcement des règles d'inférence de As qui permette d'engendrer des extensions cohérentes simples et complètes de Am? Quel serait l'impact de l'ajout à As d'une de ces règles-ci : le MP (illimité) pour le conditionnel fort 'C'; la règle p ⊢ p (qui n'est pas une règle d'inférence de As, ni de Aq, ni de Am ni de Amj); la règle d'adjonction illimitée (p, q ⊢ p.q); la règle p ⊢ Bp, non restreinte aux seuls théorèmes de logique?