LIVRE I

UN EXPOSE DU SYSTEME A

SECTION I : As (SYSTEME DE LOGIQUE SENTENTIELLE)

Chapitre 1.- BASE DU SYSTEME

§1.- Nous commencerons cet exposé du calcul logique 0-adique As par quatre règles de formation -qui ne sont pas forcément exhaustives, puisque As est un système béant (cf. l'Introduction pour la définition de ce terme)-.

Règles de formation

1.- Une variable sententielle seule (p, q, r, s, p', q', r', s', p", q" ...) est une fbf.
2.- La constante 'à' est une fbf.
3.- Si p est une fbf, alors "Np", "Fp", "Bp" et "Tp" sont des fbf.
4.- Si p et q sont des fbf, alors "p.q", "p^q" et "pIq sont des fbf

Nous utiliserons en outre la notation

...p---

comme schéma syntaxique pour mentionner n'importe quel contexte constitué exclusivement par des fbf de As et dont p fasse partie.

Dans notre notation, les guillemets simples sont des marques de mention d'une expression; quant aux guillemets doubles, suivant l'exemple de Hintikka (H:4, p.4), nous les employons d'une manière équivalente aux corners de Quine, i.e. comme des schémas de noms d'expressions (et lorsqu'une variable sententielle joue le rôle d'un schéma de nom d'une fbf quelconque, alors elle apparaît sans aucun guillemet).

§2.- Définitions

df 1	/0/	eq	/q.Fq/	df 15	/Pp/	eq	/NpISp&p/
df 2	/p+q/	eq	/N(Np.Nq)/	df 16	/P̳p/	eq	/Pp.FPNp/
df 3	/pZq/	eq	/N(p.Nq)/	df 17	/½/	eq	/pIp/
df 4	/Lp/	eq	/NFp/	df 18	/1/	eq	/N0/
df 5	/Hp/	eq	/FNp/	df 19	/p%q/	eq	/pDq.F(qDp)/
df 6	/-p/	eq	/NFNp/	df 20	/p(-)q/	eq	/pDq..qCp/
df 7	/pCq/	eq	/Fp+q/	df 21	/pQq/	eq	/PpCPq/
df 8	/pVq/	eq	/NpCq/	df 22	/Xp/	eq	/p^p/
df 9	/p&q/	eq	/N(NpVNq)/	df 23	/Kp/	eq	/NXNp/
df 10	/pDq/	eq	/pI.p.q/	df 24	/p¯q/	eq	/p+q..K(p^q)+.p.q/
df 11	/p=q/	eq	/pCq..qCp/	df 25	/pIIq/	eq	/B(pIq)/
df 12	/pGq/	eq	/B(pCq)/	df 26	/pI̶q/	eq	/F(pIIq)/
df 13	/pDDq/	eq	/B(pDq)/	df 27	/p≡q/	eq	/pGq..qGp/
df 14	/Sp/	eq	/p.Np/	df 28	/Jp/	eq	/FBFp/

df 29 /kp/ eq /NBNp/
df 30 /Yp/ eq /pIà.p/
df 31 /fp/ eq /FYp.p/
df 32 /pIq/ eq /p^NàI.q^Nà/
df 33 /pİq/ eq /pIq+(pI.q^Nà)+(qI.p^Nà)+(pIN(Nq^Nà))+.
qIN(Np^Nà)/
df 34 /pḌq/ eq /pỊ.p.q/
df 35 /pRq/ eq /fpCfq/
df 36 /P̂p/ eq /K½Dp&p/
df 37 /p$\overline{\overline{=}}_1$q/ eq /Pp=Pq..PNp=PNq/
df 38 /p$\overline{\overline{=}}_2$q/ eq /p$\overline{\overline{=}}_1$q..P̂p=P̂q..P̂Np=P̂Nq/
df 39 /P̂̂p/ eq /KK½Dp&p/
df 40 /p$\overline{\overline{=}}_3$q/ eq /p$\overline{\overline{=}}_2$q..P̂̂p=P̂̂q..P̂̂Np=P̂̂Nq/
df 41 /gp/ eq /p+à/
df 42 /hp/ eq /NgNp/
df 43 /pRRq/ eq /B(pRq)/
df 44 /pQQq/ eq /B(pQq)/
df 45 /P̤p/ eq /X½Dp&p/
df 46 /np/ eq /p^Nà/
df 47 /mp/ eq /N(Np^Nà/
df 48 /jp/ eq /Yp&Nà+.fp&à/
df 49 /p$\hat{\mp}$q/ eq /N(Np^Nq)/
df 50 /pc̣q/ eq /pDq&1+.q%p&q/
df 51 /pçq/ eq /-p+q/
df 52 /pç̈q/ eq /pçq..NqçNp/
df 53 /p%̲q/ eq /J(p%q)/
df 54 /p%%q/ eq /pDDq.F(qDDp)/
df 55 /bp/ eq /NàDp&p/
df 56 /p_q/ eq /p+q..p.q+.Kp^Kq/
df 57 /ù/ eq /Nà/
df 58 /pccq/ eq /H(pcq)/
df 59 /p¨q/ eq /pcq..qcp/
df 60 /pīq/ eq /pccq..qccp/
df 61_1 /pâq/ eq /XpDq/
df 61_2 /pââq/eq /Xpâq/
df 61_n /pâ.$_n$.âq/ eq /Xpâ$_{n-1}$âq/
df 62_1 /päq/ eq /pDKq/
df 62_2 /päq̈q/eq /päKq/

df 62_n /pd̈.ṅ.d̈q/ eq /pd̈ ṅ-1 d̈Kq/

df 63_n /p≙.ṅ.≙q/ eq /pd̂.ṅ.d̂q..qd̂.ṅ.d̂p/

df 64_n /p=̈.ṅ.=̈q/ eq /pd̈.ṅ.d̈q..qd̈.ṅ.d̈p/

df 65_n /pḍ̂.ṅ.ḍ̂q/ eq /npd̂.ṅ.d̂q/

df 66_n /pḓ̂.ṅ.ḓ̂q/ eq /pd̂.ṅ.d̂mq/

df 67_n /pḓ̈.ṅ.ḓ̈q/ eq /pd̈.ṅ.d̈mq/

df 68_n /pḍ̈.ṅ.ḍ̈q/ eq /npd̈.ṅ.d̈q/

df 69_n /p≙̣.ṅ.≙̣q/ eq /np≙.ṅ.≙nq/

df 70_n /p=̭̈.ṅ.=̭̈q/ eq /mp=̈.ṅ.=̈mq/

df 71 /pd̈̂q/ eq /Xpd̈q/

df 72 /pd̂̈q/ eq /pd̂Kq/

df 73_n /pd̂̈d̈.ṅ.d̈q/ eq /pd̂̈K.ṅ.Kq

df 74_n /pd̂.ṅ.d̂d̂̈q/ eq /pd̂.ṅ.d̂Kq/

df 75_n /pd̈̂d̈.ṅ.d̈q/ eq /Xpd̈.ṅ.d̈q/

df 76_n /pd̂.ṅ.d̂d̂̂q/ eq /X.ṅ.Xpd̈̂q

df 77_n /pd̂̈.ṅ.d̂̈q/ eq /pd̂ ṅ-1 d̂d̈K ṅ-1 Kq/

df 78_n /pd̈̂.ṅ.d̂̂q/ eq /X ṅ-1 Xpd̂̂d̈ ṅ-1 d̈q/

df $79_{n,m}$ /p≙.ṅ.≙≚.ṁ.≙̈q/ eq /pd̂.ṅ.d̂d̂̈.ṁ.d̂̈q..qd̂.ṅ.d̂d̂̈.ṁ.d̂̈p/

df $80_{n,m}$ /p≙̂.ṅ.≙̂=̈.ṁ.=̈q/ eq /pd̂̂.ṅ.d̂̂d̈.ṁ.d̈q..qd̂̂.ṅ.d̂̂d̈.ṁ.d̈p/

df 81 /pḍ̂̂q/ eq /npd̂̂q/

df 82 /pḓ̂̂q/ eq /pd̂̂mq/

df 83_1 /p∷q/ eq /p≙q..p=̈q

df 83_n /p∷ṅ..∷q/ eq /p≙.ṅ.≙q..p=̈.ṅ.=̈q/

df 84_n /p≙̂.ṅ.≡̄q/ eq /B(p≙.ṅ.≙q)/

df 85_n /p≡̈.ṅ.≡̈q/ eq /B(p=̈.ṅ.=̈q)/

df 86_n /p∷̲.ṅ.∷̲q/ eq /B(p∷.ṅ.∷q)/

df 87 /tp/ eq /NfNp/ df 88 /pMq/ eq /pQq..qQp/

df 89 /N̲p/ eq /XNp/ df 90 /N̳p/ eq /KNp/

df 91 /P̂p/ eq /N̲pDp&p/ df 92 /P̲̂p/ eq /N̲p%p&p/

/p⊆q/ eq /T(p⊂q)/ /pD̲q/ eq /T(pDq)/

$/p\underline{I}q/$ eq $/T(pIIq)/$

df 93 $/\ddot{\not{P}}p/$ eq $/\underline{\underline{N}}pDp\&p/$

df 94 $/\ddot{\underline{P}}p/$ eq $/\underline{\underline{N}}p\%p\&p/$

df 95 $/\underline{H}p/$ eq $/BHp/$

df 96 $/\not{B}p/$ eq $/JFp/$

df 97 $/\underline{F}p/$ eq $/BFp/$

df 98 $/Wp/$ eq $/FTFp/$

df 99 $/\underline{\underline{H}}p/$ eq $/THp/$

df 100 $/\underline{\underline{F}}p/$ eq $/TFp/$

df 101 $/\not{H}p/$ eq $/N\underline{H}p/$

df 102 $/p?q/$ eq $/mnp\%mnq/$

Nous pourrions, bien entendu, introduire définitionnellement beaucoup d'autres foncteurs ayant aussi bien des propriétés syntaxiques que des applications sémantiques intéressantes. On peut démontrer même que le système $\underline{As}$ contient virtuellement un nombre infini de foncteurs, aussi bien monadiques que dyadiques, non équivalents et que, dès lors, aucune algèbre finivalente ne peut pas satisfaire ce système, encore moins en être caractéristique.

Il appert que beaucoup parmi les définitions ci-dessus sont, non pas des définitions proprement dites, mais bien des schémas définitionnels; la lettre minuscule 'n' est une variable à laquelle il faudra substituer, dans chaque cas, un numéral désignant un entier positif; cette lettre (ou le numéral concret qui lui soit substitué) indique, placée sous les points de suspension, n répétitions du foncteur situé à la gauche (et à la droite) des points de suspension, ces deux occurrences comprises.

Avant de poursuivre notre exposé, il nous faut expliquer l'utilisation que nous faisons des parenthèses et des points. Cette utilisation s'inspire de l'emploi recommandé par Church (C:6, pp. 74ss). Les foncteurs monadiques régissent la fbf la plus courte qui les suit. Les foncteurs dyadiques sont tous du même poids, et ils sont associatifs vers la gauche. Un point placé après un foncteur dyadique veut dire que toute la partie de la formule située à la droite du point est affectée par l'occurrence du foncteur précédant le point; autrement dit : cette partie constitue le membre droit de la formule régie par l'occurrence en question du foncteur dyadique, dont le membre gauche est toute la partie de la formule totale située à la gauche du foncteur suivi du point et à la droite d'un autre foncteur antérieur suivi d'un point s'il y en a. Les parenthèses sont employées si nécessaire pour défaire une associativité vers la gauche, autrement obligatoire (ou bien, dans certains cas, pour économiser des points). Aussi les formules suivantes doivent elles être lues comme on l'indique au moyen des parenthèses:

"p^q+r&s" doit être lu comme : "((p^q)+r)&s"

"p^.q+r&s" doit être lu comme : "p^((q+r)&s)"

"p^q+.r&s" doit être lu comme : "((p^q)+(r&s))"

"pDq.rCs" doit être lu comme : "((pDq).r)Cs"

"pD.q.rCs" doit être lu comme : "pD((q.r)Cs)"

"pD.q..rCs"doit être lu comme : "pD(q.(rCs))"

"pDq..rCs" doit être lu comme : "(pDq).(rCs)"

Ces exemples suffisent très largement à montrer le fonctionnement du procédé indiqué et à écarter tout risque d'ambiguïté, notamment en ce qui concerne une éventuelle possibilité de double emploi des points comme foncteur de conjonction et comme séparateurs ou renforçateurs de n'importe quel foncteur dyadique.

§3.- Dans ce paragraphe nous expliciterons les lectures en langage naturel que nous proposons pour ces différents foncteurs. Pour certains d'entre eux, nous proposerons plusieurs lectures alternatives, car, à notre avis, il y a dans ces cas-là, tout au plus, une simple différence stylistique, non pas sémantique.

"Np"	doit	être	lu	:	"il n'est pas vrai que p" ou "non p";
"Fp"	"	"	"	:	"il est entièrement faux que p", "il n'est pas du tout vrai que p", "il n'est point vrai que p", "il n'est nullement vrai que p";
"Tp"	"	"	"	:	"il est totalement vrai que p";
"Wp"	"	"	"	:	"il est en quelque sorte vrai que p", "il est pour ainsi dire vrai que p";
"$\underline{\underline{H}}$p"	"	"	"	:	"il est suprêmement vrai que p", "il est superabsolument vrai que p", "il est totalement et absolument vrai que p";
"$\underline{H}$p"	"	"	"	:	"il est absolument vrai que p";
"$\underline{F}$p"	"	"	"	:	"il est absolument faux que p";
"$\underline{\underline{F}}$p"	"	"	"	:	"il est suprêmement faux que p", "il est superabsolument faux que p", "il est totalement et absolument faux que p";
"$\not{H}$p"	"	"	"	:	"il n'est pas absolument vrai que p", "il est relativement faux que p";
"Bp"	"	"	"	:	"il est vrai à tous les égards que p", "il est vrai à tous les points de vue que p", "il est globalement vrai que p", "il est foncièrement vrai que p";
"Jp"	"	"	"	:	"il est vrai à certains égards que p", il est vrai à certains points de vue que p", "il est relativement vrai que p";
"$\not{B}$p"	"	"	"	:	"il est relativement tout à fait faux que p", "il n'est point foncièrement vrai que p";
"Hp"	"	"	"	:	"il est tout à fait vrai que p", "il est entièrement vrai que p", "il est exact que p"; "il est cent pour cent vrai que p";
"Lp"	"	"	"	:	"il est tant soit peu vrai que p", "il est vrai, du moins dans une certaine mesure, que p", "il est vrai, du moins jusqu'à un certain point, que p", "dans une mesure ou dans une autre il est vrai que p", "il est vrai, peu ou prou, que p", "il est plus ou moins vrai que p";
"-p"	"	"	"	:	"il est tant soit peu faux que p", etc.
"Sp"	"	"	"	:	"il est vrai et faux tout à la fois que p", "p et non p", "il est vrai, sans l'être, que p", "il n'est ni vrai ni faux que p", "ni p ni non p";

"Yp" doit être lu : "il est infinitésimalement vrai que p", "il est imperceptiblement vrai que p", "il est insaisissablement vrai que p", "il est un rien vrai que p", "il est un brin vrai que p";

"fp" " " " : "il est plus qu'infinitésimalement vrai que p", "il est plus qu'à peine vrai que p", "il est plus qu'un rien vrai que p", etc.;

"Pp" " " " : 'il est plutôt vrai que p", "il est du moins à moitié vrai que p", "dans une large mesure, il est vrai que p";

"$\underset{..}{P}p$" " " " : "il est quelque peu vrai que p";

"$\underline{\underline{P}}p$" " " " : "il est plus vrai que faux que p", "il est assez vrai que p", "il est plus qu'à moitié vrai que p";

"$\underset{\wedge}{P}p$" " " " : "il est remarquablement vrai que p", "dans une très large mesure, il est vrai que p";

"$\underset{\wedge\wedge}{P}p$" " " " : "il est extrêmement vrai que p", "dans une très, très large mesure il est vrai que p";

"$\hat{P}p$" " " " : "il est du moins passablement vrai que p";

"$\ddot{P}p$" " " " : "il est (du moins) considérablement vrai que p";

"$\hat{\underline{P}}p$" " " " : "il est plus que passablement vrai que p";

"$\ddot{\underline{P}}p$" " " " : "il est plus que considérablement vrai que p";

"bp" " " " : "il est infiniment vrai que p";

"Xp" " " " : "il est très vrai que p";

"Kp" " " " : "il est (tout au moins) un peu vrai que p";

"$\underline{N}p$" " " " : "il est très faux que p", "il n'est même pas un peu vrai que p";

"$\underline{\underline{N}}p$" " " " : "il est (tout au moins) un peu faux que p", "il n'est pas très vrai que p";

"gp" " " " : "il est vrai, ou peu s'en faut, que p";

"hp" " " " : "il est excessivement vrai que p", "il est plus que vrai que p", "il n'est pas faux, loin de là, que p";

"jp" " " " : "il est quasiment tout à fait faux que p", "il n'est guère vrai que p";

"np" " " " : "il est véritablement vrai que p";

"mp" " " " : "il ne laisse pas d'être vrai que p";

"p.q" " " " : "p et q";

"p^q" " " " : "et p et q", "non seulement p, mais aussi q", "il est vrai aussi bien que p que q";

"p+q" doit être lu : "p ou q";

"p&q" " " " : "p et surtout q";

"pVq" " " " : "il est exact que p à moins que q", = "p sinon q";

"pCq" " " " : "p seulement si q", "p pourvu que q";

"pQq" " " " : "il est plutôt vrai que p seulement == s'il est plutôt vrai que q";

"pRq" " " " : "il est plus qu'un rien vrai que p = seulement s'il est plus qu'un rien = vrai que q";

"p$\underline{=}$q" " " " : "p si, et seulement si, q" (abrégé : = "p ssi q");

"pIq" " " " : "il est vrai que p (exactement) dans = la même mesure où il l'est que q", "p dans la mesure, et seulement dans la = mesure, où q", "p pour autant que q et réciproquement", "qu'il soit vrai que= p équivaut à ce qu'il soit vrai que q";

"pDq" " " " : "il est au moins aussi vrai que q que= (que) p, il est tout au plus aussi == vrai que p que (que) q", "p pour autant seulement que q", "p dans la mesure = seulement où q", "qu'il soit vrai que= p implique qu'il soit vrai que q";

"pDDq" " " " : "qu'il soit vrai que p implique strictement qu'il soit vrai que q";

"p%q" " " " : "il est plus vrai que q que non pas = que p", "il est moins vrai que p que = non pas que q";

"p$\underset{\cdot}{I}$q" " " " : "il est fondamentalement aussi vrai = que p que (que) q";

"p$\ddot{d}$q" " " " : "p pratiquement seulement dans la mesu re où q";

"p$\hat{d}$q" " " " : "p presque seulement dans la mesure où q";

"p$\hat{=}$q" " " " : "il est presque aussi vrai que p que q";

"p$\ddot{=}$q" " " " : "il est pratiquement aussi vrai que p= que q";

"p$\ddot{\hat{d}}$q" " " " : "p pratiquement presque seulement dans= la mesure où q";

"p?q" " " " : "il est nettement plus vrai que q = que non pas que p";

'à' " " " : 'l'infinitésimalement vrai', 'l'imperceptiblement vrai, 'ce qui est à peine vrai', 'le quasiment tout à fait faux';

'0' " " " : 'le tout à fait faux', 'la pure et == simple absence de vérité' (ou, d'une = manière abrégée: le faux);

'1' " " " : 'le tout à fait vrai', 'la pleine vérité', 'le Vrai';

'½' " " " : 'le pareillement vrai et faux', 'le = point d'équidistance entre le vrai et le faux', ce qui est à la fois plutôt vrai et plutôt faux', 'le point de croisement aléthique';

'ù' doit être lu : 'l'infinitésimalement faux', 'l'imperceptiblement faux', 'le presque tout à fait vrai'.

Pour adoucir certaines tournures, nous avons eu recours à l'archaïsme et l'haplologie (cf. G:4, §975). Il faut préciser, pour ce qui est des lectures proposées, que le parler quotidien de l'homme de la rue recourt très souvent à deux procédés pour accourcir les foncteurs aussi bien monadiques que dyadiques : l'un d'eux c'est l'ellipse; très fréquemment, au lieu de dire, p.ex., 'p presque seulement dans la mesure où q', on dit simplement 'p dans la mesure où q', sans que pour autant le locuteur ait l'intention de s'engager par là à soutenir que p est vrai exactement seulement dans la mesure où q l'est. Le second procédé c'est le remplacement d'un foncteur par un autre plus court dont le sens soit apparenté : 'dans la mesure seulement où ...' peut être remplacé parfois par 'seulement si ...'; cette oblitération de différences vérifonctionnelles importantes est réputée non nuisible en vertu de contraintes pragmatiques qui excluent certaines interprétations littérales. Quelles contraintes? Nous avouons que rester ici dans le vague et renvoyer la balle à la pragmatique, comme s'il s'agissait d'un dépotoir où l'on déverserait tout ce dont on ne sait que faire, n'est pas très convaincant. Mais force nous est de circonscriire quelque peu notre enquête et prévenir un excès de dispersion. Nous nous cantonnerons donc, ici comme dans la Section IV de ce même livre, à la formalisation des phrases-échantillons où ces deux procédés ne sont pas employés.

Une autre difficulté est constituée par le fait que plusieurs foncteurs différents peuvent avoir une même lecture en langue naturelle, car la différence entre leurs conditions de vérité n'est pas pertinente dans la grande majorité des contextes, si bien que les langues naturelles n'ont pas établi des distinctions suffisamment fines pour exprimer ces nuances. D'autres foncteurs encore n'ont aucun équivalent exact en langue naturelle, car, de par un principe compréhensible d'économie, la langue naturelle n'a eu garde de forger des signifiants pour toutes les nuances possibles de la vérifonctionalité.

Le premier type de faille se rencontre, p.ex., dans le cas des foncteurs '‾' et '_', qui ont une même lecture : la juxtaposition; "p‾q" se lira, tout comme "p_q", "p, q". Cela prouve que la juxtaposition n'est pas strictement vérifonctionnelle en langue naturelle. Certains foncteurs, comme 'Ï' et '+̂', seront lus, respectivement, comme 'I' et '+', car la langue naturelle ne fait pas de distinctions suffisantes à leur égard. Toutefois, dans ces deux cas, la formalisation la plus adéquate de 'fondamentalement dans la même mesure où' et de 'ou' sera, respectivement, 'I' et '+', non pas 'Ï' ou '+̂', qui sont déviants.

D'une manière analogue, 'moins que' peut être formalisé, soit comme '%', soit comme '%̲'. Dans ce dernier cas, il vaut mieux dire : 'relativement moins que', mais cette précision est souvent omise. Nous verrons, dans l'annexe I du Livre III que cette ambiguïté explique la non absurdité de certaines thèses énoncées par des poètes pétrarquistes.

Parmi les lectures proposées, il y en a une qui peut être plus vulnérable que les autres : celle du foncteur 'T' comme 'il est totalement vrai que'. Comme on le verra à la fin de cette Section (et en compulsant les théorèmes énumérés dans l'Annexe N° 2 de ce Livre I) un fait peut être à la fois totalement vrai et infinitésimalement vrai. Comment cela?, se demandera-t-on. L'explication c'est que la notion de totalité est extensive, et ne comporte, dès lors, aucune indication de degrè. Une surface uniformément rose est totalement rouge, même si elle ne l'est que dans une faible mesure. Une autre surface ayant des taches rouge-foncé sur un fond blanc n'est point totalement rouge, même si, par endroits, elle est tout à fait rouge; elle sera donc pour une part -ou relativement- entièrement rouge, ce qui était faux de la première, en dépit du fait -vrai, mais pas extrêmement vrai- qu'elle était totalement rouge. Il est donc nécessaire de distinguer soigneusement 'totalement', d'un côté; 'entièrement' ou 'tout à fait', d'autre part.

En tout cas, et comme on le voit aisément, le système <u>A</u> possède, en dépit de ces quelques accrocs, une connexion intrinsèque avec la langue naturelle et est à même de formaliser de nombreuses expressions taxées naguère par les logiciens de sémantiquement vides, de simples procédés stylistiques ou rhétoriques. Ce système a été précisément conçu pour formaliser de telles expressions; il n'est donc pas le simple fruit de la fantaisie mathématique de l'auteur de ce travail. Au contraire; il y a toutes sortes de raisonnements et de formulations nuancés dans notre langue de tous les jours qui ne survivent pas aux tortures uniformisantes qu'ils subissent dans le lit de Procuste que constitue le principe maximaliste de <u>oui ou non</u> (plus exactement : du <u>tout à fait oui ou tout à fait non</u>). Dans le cadre de la <u>logique classique</u>, des <u>formulations</u> où l'on parle du plutôt vrai, du presque vrai, d'équivalence aléthique approximative, etc., et des raisonnements où de pareilles formulations sont présentes, soit en tant que prémisses, soit en tant que conclusions, tout cela apparaissait comme irrecevable. Notons que la démarche de la logique classique était légitime à un moment donné, car il s'agissait de débroussailler un territoire bien déterminé et nettement délimité, d'y mettre en vigueur, sans aucune restriction, les lois propres à une rigueur logique permettant seule l'essor de la pensée exacte. Toutefois, ces nécessités compréhensibles imposaient, il faut bien l'avouer, des sacrifices douloureux, car le flou, le nuancé, les plus et le moins, l'approximatif ont une présence massive, voire prépondérante, non seulement dans le parler quotidien et dans la littérature, l'essai, la fiction, mais aussi dans des traités de philosophie, voire même dans des sciences particulières (surtout,mais point exclusivement, les sciences humaines). Néanmoins, le lien exact entre l'ensemble du langage naturel et un système de logique est bien difficile à cerner. D'innombrables problèmes surgissent et tout ce que l'on peut faire c'est de trouver des réponses plus ou moins satisfaisantes à des problèmes sectoriels, surtout si l'on prend la judicieuse décision de se cantonner à des fragments de la langue ou, peut-être mieux encore, de certains idiolectes. C'est ce que nous tenterons de faire à la fin de ce livre. Nous y aborderons notamment le traitement des modificateurs aléthiques ('X', 'P', 'f', 'b', etc.) incrustés à l'intérieur d'une phrase, modifiant -en surface-, non pas la phrase, mais un de ses constituants. Nous essayerons de formaliser aussi certains foncteurs dyadiques no traités dans la logique classique, comme les comparatifs. Quoi qu'il en soit, l'idée même que notre système entend véhiculer est celle de l'existence d'une multiplicité — au demeurant infinie — de degrés de vérité. Dans le Livre III, Section III, nous défendrons cette idée sur le plan philosophique.

§4.- AXIOMES

A0/1 Bp+BFBp

A0/2 Tp+TFTp

A1/1 BpC.BpIp

A1/2 TpC.TpIBp

A2/1 pGqC.BpCBq

A2/2 p$\underline{C}$qC.TpCTq

A3/1 pDDqC.BpDBq

A3/2 p$\underline{D}$qC.TpDTq

A4 $\hat{\underline{P}}$(p.q)+K(p^q)D.Kp^Kq

A5 $\ddot{\underline{P}}$(p.q)+X(Kp^Kq)D.Xp$\hat{\ddagger}$Xq

A6 XpDXqC.pDq

A7 p.pIp

A8 pI.p..p+q

A9 q.pI.p.q

A10 p.q.rI.p..q.r

A11 p^q(-)(p.q)..p^q^rD(p^$\hat{r}$^q)..p^q$\underset{\wedge}{I}$(p^r).fpC.q$\underset{\wedge}{I}$r

A12 f(Sp.Sq)+(YNp.fSq.F(qInq))+(YNq.fSp.F(pInp))CF(p.qD.p^q)

A13 (p.q^r)I.r^p..r^q

A14 pD.p^1

A15 p.(q+r)I.p.q+.p.r

A16 FpC.pIO

A17 F(p.q)I.Fp+Fq

A18 F(p+q)I.Fp.Fq

A19 NFpIFFp

A20 pIqC.pCq

A21 NNpIp

A22 q.pCq

A23 pIq.(p'Iq')C.pIqI.p'Iq'

A24 pDq+(qDnp)+.pImq

A25 pINp$\underline{=}$.pI$\frac{1}{2}$

A26 Y(p^q)C.Yp+Yq

A27 mpDnp$\underline{=}$.Yp+YNp

A28 F($\frac{1}{2}$Dà)

A29 pC.nmpDnp

A30 KnpInKp

Sch 1 pIqC. ...p---I...q---

(pourvu que les deux conditions suivantes soient remplies : 1°, la formule "...p---" est telle que p ne s'y trouve affecté que par les foncteurs 'I', '.', '^', 'N', 'F' ou par d'autres définis à partir de =

la constante 'à'; 2°, q ne remplace qu'une seule = occurrence de p dans "...p---").

Dans la formulation du schéma 1, il faut préciser = ce que nous entendons par affectation d'une variable par un foncteur :

-Si p est précédé immédiatement par un foncteur monadique, p est affecté par ledit foncteur;

-Si \$ est un foncteur dyadique et, pour quelque formule q, p se trouve constituer une formule du type "p\$q" ou "q\$p", alors p est affecté par \$;

-Si p est une sous-formule d'une formule q qui est affectée = par un foncteur quelconque, p est aussi affecté par ledit foncteur (où être une sous-formule de q veut dire être une fbf = qui fait partie de q).

§5.- Règles d'inférence

rinf 1.- p ::: Bp (pourvu que p soit un théorème)
rinf 1 bis.- p ::: Tp (pourvu que p soit un théorème)

rinf 2.- Bp , B(pCq) ::: q

rinf 3.- Si p est un théorème, alors le résultat de substituer uniformément dans p à une variable sententielle une variable sententielle ou une constante sententielle= est aussi un théorème.

(Le signe syntaxique ':::' veut dire que l'expression située à la droite du signe peut être déduite à partir de l'expression située à la gauche).

Avant d'aller plus loin, nous commencerons par dériver quelques règles d'inférences non primitives.

rinf 2' .- pCq , p ::: q (pourvu que "pCq" et p soient = des théorèmes)

Dérivation :

1er th.d.: pCq
2d th.d.: p

(2)	B(pCq)	1er th.d., rinf 1
(3)	Bp	2d th.d., rinf 1
	q	(2), (3), rinf 2

Dans cette dérivation, nous avons employé l'abréviation 'th.d.' qui veut dire : théorème donné. Par ailleurs, = nous avons mis en pratique un procédé qui se répètera tout au long des trois premières Sections de ce Livre I : chaque preuve ou dérivation commence par une ligne numérotée '(2)' -car= la première ligne de la preuve est constituée, en quelque sorte, par l'énoncé du théorème à démontrer ou de la règle d'inférence à dériver-; chaque ligne est précédée à gauche par = son numéro. Les références indiquées à droite justifient = chaque pas dans la preuve ou dérivation. A l'intérieur d'une preuve ou dérivation, on emploi, à droite, les références '(2)', '(3)', ... pour désigner précisément les lignes précé-- dentes portant de tels numéros.

rinf 4.- pIq ::: ...p---I...q---
(pourvu que "pIq" soit un théorème et que p ne se = trouve affecté dans "...p---" que par ... -cf.Schl- et que le remplacement concerne une seule occurrence)

Dérivation :

th.d.: pIq

(2)	B(pIq C...p---I...q---)	Sch 1, rinf 1
(3)	B(pIq)	th.d., rinf 1

...p---I...q--- (3), (2), rinf 2

rinf 5.- pIq , ...p--- ::: ...q---

(mêmes restrictions que ci-dessus)

Dérivation :

ler th.d.: pIq

2d th.d.: ...p---

(2)	B(...p---)	2d th.d., rinf 1
(3)	B(pIqC. ...p---I...q---)	Sch 1, rinf 1
(4)	B(pIq)	ler th.d., rinf 1
(5)	...p---I...q---	(3), (4), rinf 2
(6)	B(...p---I...q---)	(5), rinf 1
(7)	B(...p---I...q---C. ...p---C...q---)	A20, rinf3,rinf1
(8)	...p---C...q---	(6), (7), rinf 2
(9)	B(...p---C...q---)	(8), rinf 1
	...q---	(9), (2), rinf 2

rinf 6.- pIq ::: qIp (pourvu que "pIq" soit un théorème)

Dérivation :

th.d.: pIq

(2)	p.pIp	A7
(3)	p.pIp	A7
(4)	pIp	(2), (3), rinf 5
(5)	qIp	(4), th.d., rinf 5

En vertu de rinf 1, chaque fois que nous avons comme théorème une formule p, nous pouvons obtenir immédiatement = "Bp". Ainsi, si nous avons comme n^e ligne dans la démonstration d'un théorème p, et comme m^e ligne "pCq", nous pouvons = avoir comme $n+1^e$ ligne "Bp" et comme $m+1^e$ ligne "B(pCq)". Dès lors, rinf 2 peut être appliquée. Nous pouvons donc nous passer désormais d'exposer ces pas de l'argumentation conduisant à la conclusion.

Ceci étant, pourquoi ne nous donnons-nous pas directement et dès le début comme règle d'inférence un modus ponens ordinaire? En ce qui concerne exclusivement la dérivation de règles d'inférence applicables à des théorèmes et la preuve = de théorèmes à partir de théorèmes, nos règles d'inférence = 2 + 1 équivalent à un MP ordinaire. Il n'en va pas de même= néanmoins, pour ce qui est de formules qui ne soient pas des= théorèmes. Si nous voulons appliquer notre système déductif= A à des prémisses extralogiques, il faut absolument que chacune de ces prémisses soit une formule qui commence par un = 'B'; autrement, aucune règle d'inférence ne peut leur être appliquée. En effet, pour ce qui est des règles primitives, = rinf 3 ne peut donner pour résultat que des substituts de == théorèmes; rinf 1 n'est applicable qu'à des théorèmes; et = rinf 2 n'est applicable qu'à des prémisses commençant par un 'B'.

Comme toutes les règles d'inférence que nous dérivecons dans ce chapitre ont pour seul but la preuve de théorèmes ultérieurs, il va sans dire que chaque règle dérivée est applicable seulement à des théorèmes, puisque les dérivations = de règles ultérieures s'appuient sur les règles déjà obtenues et que celles-ci sont applicables seulement à des théorèmes.= Cette restriction ne sera donc plus explicitement mentionnée. Par ailleurs, nous pourrons lire librement, après ce qui précède, rinf 2 comme rinf 2' (toujours dans le cadre de la démonstration de théorèmes à partir de théorèmes).

rinf 7.- pIq , qIr ::: rIp

Dérivation :

	1er th.d.: pIq	
	2d th.d.: qIr	
(2)	pIqC.pIrI.qIr	Sch 1
(3)	pIrI.qIr	(2), 1er th.d., rinf 2
(4)	qIrI.pIr	(3), rinf 6
(5)	qIrC.pIr	(4), A20, rinf3,rinf2
	pIr	2d th.d., (5), rinf 2

La règle rinf 7 nous permet de raccourcir l'exposé de certaines preuves comme suit. Nous pouvons exploiter itérativement cette règle d'inférence, ce que nous ne manquerons pas de faire. Si, en vertu d'une ligne antérieure d'une preuve ou d'un théorème préalablement démontré, nous avons "qIr", nous pourrons écrire des chaînes de ce type:

...p---I...q---
          I...r---

Ce raccourci exploite simultanément la rinf 7, la rinf 6 et la rinf 4. Par surcroît, l'emploi de la rinf 6 sera d'ordinaire passé sous silence.

Nous conclurons ce paragraphe par l'exposé d'une notation utile qui nous permettra de raccourcir les preuves. Le procédé est emprunté à la <u>Mathematical Logic</u> de Quine. Une ligne de la forme :

pC7q

est une abréviation de l'ensemble suivant de pas déductifs :

(n)	p	(th. ou ligne préalablement démontrée)
(n+1)	Bp	(n), rinf 1
(n+2)	pCq	(th. ou ligne préalablem. prouvée)
(n+3)	B(pCq)	(n+2), rinf 1
(n+4)	q	(n+1); (n+3), rinf 2

Par ailleurs, l'ordinal situé à la gauche d'une ligne du type mentionné n'est une abréviation que de la partie située à la droite du crochet.

Nous emploierons aussi, pour un numéral 'n' tel que (n) est une ligne antérieure dans la même preuve, 'n' dans une ligne ultérieure, qui y joue le rôle de simple abréviation de la ligne (n). Pareillement, les expressions 'dext n' et 'sin n' (où 'n' est un numéral) sont des abréviations des parties de (n) situées, respectivement, à la droite et à la gauche du foncteur dyadique principal; lorsqu'il y a -sans être enfermés dans des parenthèses- plusieurs foncteurs dans une ligne suivis d'un point, le foncteur principal est le foncteur principal est le premier d'entre eux. (Cf. Q:1, pp. 91, 92, 129).

Chapitre 2.- REGLES D'INFERENCE DERIVEES

Il nous a paru préférable de confiner à ce chapitre l'exposé et la dérivation des règles d'inférence qui seront employées dans cette Section. Comme on aura l'occasion de le constater, aucune règle d'inférence ne sera utilisée par la suite avant que n'aient été démontrés tous les théorèmes utilisés dans sa dérivation.

rinf 6 bis.- pDq , p ::: q
Dérivation :
ler th.d.: pDq
2d th.d.: p

(2)	pDqC.pCq	A126 bis
(3)	pCq	(2), ler th.d.
	q	(3), 2d th.d., rinf 2

rinf 8.- p , q ::: p.q
Dérivation :
ler th.d. : p
2d th.d. : q

(2)	pC.qC.p.q	A117
(3)	qC.p.q	(2), ler th.d., rinf 2
	p.q	(3), 2d th.d., rinf 2

rinf 9.- pCq , qCr ::: pCr
Dérivation :
ler th.d.: pCq
2d th.d.: qCr

(2)	pCqC.qCrC.pCr	A125
(3)	pCq.(qCr)C.pCr	(2) , A129, rinf 5, rinf 3
(4)	pCq..qCr	ler th.d., 2d th.d., rinf 8
	pCr	(3), (4), rinf 2

rinf 9 bis.- pCq , Fq ::: Fp
Dérivation :
ler th.d.: pCq
2d th.d.: Fq

(2)	ler th.d./FqCFp	A133, rinf 3
	Fp	(2), 2d th.d., rinf 2

rinf 10 : on peut, devant chaque foncteur L ou H, supprimer ou ajputer n'importe quelle suite de foncteurs L et/ou H, tout en gardant une formule équivalente dans tous les contextes où la formule en question est affectée seulement par les foncteurs I, ., ^, N, F ou d'autres définis exclusivement à partir de ceux-là et possiblement aussi de la constante 'à'.
Dérivation : par induction mathématique sur les théorèmes A145-A148, + Sch 1.

rinf 11 a.- p=q ::: pCq
rinf 11 b.- p=q ::: qCp

Dérivation des deux règles :
th.d.: p=q

(2)	p=qI.pCq..qCp	A101, df 11, rinf 3
(3)	pCq..qCp	(2), th.d., rinf 5
(4)	pCq	(3), A22, rinf 3, rinf 2
(5)	qCp	(3), A115, rinf 2, rinf 3

rinf 13a.- ...Fp+Lp+q.r--- ::: ...r---
rinf 13b.- ...r--- ::: ...Fp+Lp+q.r---

Le dérivation de ces deux règles est immédiate à partir de A205 et rinf 5. Le contexte qui peut remplacer les points et tirets est sujet aux mêmes restrictions que pour Sch 1.

rinf 14.- p=q , q=r ::: p=r
Dérivation : A199, rinf 2

rinf 15.- Hp , pZq ::: q
Dérivation : A252, A129, rinf 3, rinf 2

rinf 16.- ...p--- ::: qIpC....q---
Dérivation :

	th.d.: ...p---	
(2)	qIpC. ...q---I...p---	Sch 1
	C. ...p---I...q---	A196, rinf 5
(3)	...p---I...q---C. ...p---C...q---	A20, rinf 3
(4)	qIpCdext3	(2), (3), rinf 9
(5)	...p---C.qIpC. ...q---	(4), A123, rinf 2,rinf 5
	qIpC. ...q---	th.d., (5), rinf 2

Observation : dans la règle précédente et les trois suivantes les restrictions sont les mêmes que pour Sch 1.

rinf 16 bis.- pIq ::: ...p---C...q---
Dérivation : rinf 4, A20, rinf 2

rinf 17.- ...p--- ::: (pIq+.pIr)C. ...q---+...r---
Dérivation : rinf 16, rinf 8, A194, rinf 3, A9, A10, rinf 5, A129

rinf 17 bis.- ...p---p'... ::: (pIq..p'Iq')C....q---q'...
Dérivation :

	th.d.: ...p---p'...	
(2)	pIqC. ...q---p'...	th.d., rinf 16
(3)	p'Iq'C.pIqC. ...q---q'...	(2), rinf 16
(4)	(p'Iq'..pIq)C. ...q---q'...	A129, rinf 3, rinf 5,(3)
	(pIq..p'Iq')Cdext4	(4), A9, rinf 3, rinf 5

rinf 18.- Si "p=q" et "...p---" sont des théorèmes et que "...p---" est une formule où p n'est affecté que par les foncteurs / ., &, C, =, L, +, F, alors "...q---" est un théorème. Cette règle est dérivée par induction mathématique à partir des théorèmes A198, A199, A206, A207 bis, A208, A220, A220bis A223 (+Sch 1), A164.

rinf 19.- pDq ::: BpDBq
Dérivation : rinf 1 + df 12, A653, rinf 6 bis.

rinf 20.- pCq ::: BpCBq
Dérivation : rinf 1 + df 13, A2, rinf 2

rinf 21.- pDDq , p ::: q
Dérivation : A660, rinf 6 bis

rinf 22.- pGq , p ::: q
Dérivation : A661, rinf 6 bis, rinf 2

rinf 23.- p=q ::: Bp=Bq
Dérivation: A663, rinf 6 bis, rinf 1, A664

En vertu de rinf 1 et A664, on peut lire rinf 23 comme permettant de dériver "Bp=Bq" à partir d'une prémisse "p=q".

rinf 24.- pIq ::: BpIBq
Dérivation : rinf 1, df 25, A665, rinf 6 bis

En vertu de A650 + rinf 6 bis + df 25, chaque fois que nous avons "pIIq" comme théorème nous avons aussi "pIq", et réciproquement, si bien que les règles rinf 24 et rinf 25 peuvent se lire indifféremment comme elles sont écrites ou = bien comme ayant pour prémisse ou théorème donné "pIIq".

rinf 25.- pIq , ...p--- ::: ...q---

(si p n'est affecté dans "...p---" que par les foncteurs ., ^, I, N, F, B)

Dérivation : rinf 1 + df 25, Sch 2, rinf 2

rinf 26a.- On peut ajouter ou effacer n'importe quel nombre = de foncteurs 'B' devant une formule ou sous-formule précédée= de 'B' ou de 'J'.

rinf 26b.- On peut ajouter ou effacer n'importe quel nombre = de foncteurs 'J' devant une formule ou sous-formule précédée= 'BL', 'LB' ou 'J'.

La dérivation de ces deux règles d'inférence est immédiate par induction mathématique sur les théorèmes A650, = A667, A651, A657, A679, A680, A689, rinf 1, Sch 2.

rinf 27.- pCq ::: JpDJq
Dérivation : rinf 1 + df 12, A706, rinf 2

rinf 27 bis.- pDq ::: JpDJq
Dérivation: rinf 1 + df 13, A707, rinf 6 bis

rinf 28.- p ::: JqDJ(p.q)
Dérivation : rinf 1, A717, rinf 2

rinf 29.- JpDq ::: pDBq
Dérivation : rinf 19, A724, Aa

rinf 29 bis.- JpCq ::: pCBq
Dérivation : rinf 20, A724, Aa

La notation 'Aa' qui apparaît dans la dérivation des = deux dernières règles sera expliquée au Chapitre 20 de cette= même section.

On peut enfin introduire des règles pour les foncteurs 'T', 'W', 'D', 'I', 'C' strictement parallèles, respectivement à celles qui concernent les foncteurs 'B', 'J', 'DD', 'II' et 'G', plus une règle de remplacement libre de p par q dans == n'importe quel contexte engendré par une des règles de formation explicitées de <u>As</u> lorsque la prémisse 'pIq' est vraie. = Vu le parallélisme qu'on vient de mentionner, nous nous abs-- tiendrons de pousser plus loin les développements, afin de ne pas alourdir le texte.

<u>Chapitre 3.- CONDITIONNEL FORT</u>

Dans ce chapitre, nous étudierons principalement des théorèmes relatifs au conditionnel fort 'C', qui est, plus = exactement, le plus faible de ceux qui possèdent la propriété du MP. En dépit de sa faiblesse -au regard, p.ex., de 'D', = que nous étudierons plus loin-, 'C' joue un rôle absolument = privilégié dans le système <u>A</u>, car c'est lui le principal véhicule de la déduisibilité, le principal foncteur tel que pour= tout couple de phrases p et q, "pCq" est, dans une mesure ou dans une autre, vrai ssi ou bien p est tout à fait faux, ou =

bien q est tant soit peu vrai, ou bien ces deux conditions-là sont réunies. Un autre foncteur étroitement apparenté à 'C'= et qui partage la plupart de traits c'est le conditionnel 'c' que nous étudierons au Chapitre 21.

A101 pIp
Preuve :

(2)	p.pIpC.p.pIpI.pIp	Sch 1
(3)	sin2	A7
(4)	dext2	(2), (3), rinf 2
(5)	sindext2	(2), (3), rinf 2
	pIp	(4), (5), rinf 5

A101 bis ½
Preuve : A101, df 17

A101 ter pDp
Preuve :

(2)	pI.p.p	A7, rinf 6
	pDp	(2), df 10

A102 p+pIp
Preuve :

(2)	Np.NpINNp	A7, rinf 3
(3)	27.N(Np.Np)INp	Sch 1
(4)	p+pINNp	(3), df 2
(5)	A21C.74I.p+pIp	Sch 1
	p+pIp	(4), (5), rinf 5

A103 pCp
Preuve : A101C.7pCp A20

A103 bis Hp+Np
Preuve :

(2)	NpCNp	A103, rinf 3
(3)	FNp+Np	(2), df 7
	Hp+Np	(3), df 5

A104 p+qI.q+p
Preuve :

(2)	Np.NqI.Nq.Np	A9, rinf 3
(3)	N(Np.Nq)IN(Nq.Np)	(2), rinf 4
	p+qI.q+p	(3), df 2

A105 N(p+q)I.Np.Nq
Preuve :

(2)	p+qIN(Np.Nq)	A101, df 2, rinf 3
(3)	N(p+q)INN(Np.Nq)	(2), rinf 5
	A105	(3), A21, rinf 3, rinf 5

A105/2 N(Np+Nq)I.p.q
Preuve :

(2)	N(Np+Nq)I.NNp.NNq	A105, rinf 3
	A105/2	(2), A21, rinf 3, rinf 5

A106 N(p.q)I.Np+Nq
Preuve :

(2)	N(NNp.NNq)I.Np+Nq	A101, rinf 3, df 2
	A106	(2), A21, rinf 3, rinf 5

A106/2 pZqI.Np+q
Preuve :

(2)	pZqI.pZq	A101, rinf 3
(3)	pZqIN(p.Nq)	(2), df 3
(4)	N(p.Nq)I.Np+NNq	A106, rinf 3
(5)	Np+NNqI.Np+q	A101, rinf 3, A21, rinf 5
	A106/2	(2), (3), (4), (5), rinf 7 bis

A106/3 SpIN(p+Np)
Preuve :

(2)	SpI.p.Np	A101, df 14, rinf 3
(3)	SpI.NNp.Np	(2), A21, rinf 3, rinf 5
(4)	SpIN(Np+p)	(3), A105, rinf 6, rinf 3, rinf 5
	A106/3	(4), rinf 3, A104, rinf 5

A104/4 SpISNp
Preuve : df 14, A21, rinf 3, rinf 5, A9

Les théorèmes ci-dessus démontrés, plus les définitions utilisées dans leurs preuves, mettent en évidence lavalidité des lois de De Morgan pour la conjonction et la disjonction simples, aussi bien de l'équivalence de "pZq" avec "N(p.Nq)" et "Np+q". On ne doit pas se méprendre sur la portée de cette équivalence, car 'Z' n'est pas un conditionnel pourvu de la condition du MP. Il se peut fort bien que "pZq" et p soient, dans une mesure ou dans une autre, vrais, sans que pour autant q soit vrai du tout. Un autre résultat intéressant des preuves précédentes c'est l'idempotence de la conjontion simple et sa commutativité stricte, à quoi s'ajoute son associativité -que nous démontrerons immédiatement- plus la deuxième loi d'absorption (qui s'ajoute à A8) et la deuxième loi de distributivité : la distributivité de la disjonction par rapport à la conjonction. Il faut aussi noter l'entrée en scène du foncteur 'S'. Les théorèmes A106/3 et A106/4 montrent que la semiaffirmation d'une phrase est identique à sa seminégation et à la négation de la vérité, pour elle, du principe de tiers exclu (qu'elle est aussi la négation du principe de contradiction, cela va de soi par df 14 + A21, c-à-d la loi de la double négation).

A107 p+q+rI.p+.q+r
Preuve :

(2)	Np.Nq.NrI.Np..Nq.Nr	A10, rinf 3
(3)	N(Np.Nq.Nr)IN(Np..Nq.Nr)	(2), rinf 4
(4)	N(N(p+q).Nr)IN(Np..N(q+r)	(3), A105, rinf 3, rinf 5
	A107	(4), df 2

A108 pI.p+.p.q
Preuve :

(2)	NpI.Np.N(NNp.q)	A8, rinf 3, df 2
(3)	NNpIN(Np.N(NNp.q))	(2), rinf 4
(4)	pIN(Np.N(NNp.q))	(3), A21, rinf 5
(5)	pI.p+.NNp.q	(4), df 2
	A108	(5), A21, rinf 5

A109 p+(q.r)I.p+q..p+r
Preuve :

(2)	Np.(Nq+Nr)I.Np.Nq+.Np.Nr	A15, rinf 3
(3)	Np.N(q.r)I.Np.Nq+.Np.Nr	(2), A106, rinf 3
(4)	Np.N(q.r)I.N(p+q)+N(p+r)	(3), A105, rinf 5
(5)	N(Np.N(q.r))IN(N(p+q)+N(p+r))	(4), rinf 4
(6)	p+(q.r)IN(N(p+q)+N(p+r))	(5), df 2
(7)	p+(q.r)I.NN(p+q).NN(p+r)	(6), A105, rinf 3, rinf 5
	A109	(7), A21, rinf 3, rinf 5

A109/2 F(p.Fp)
Preuve :

(2)	FpCFp	A103, rinf 3
(3)	FFp+Fp	(2), df 7
(4)	F(Fp.p)	A17, rinf 3, rinf 5
	A109/2	(4), A9, rinf 3, rinf 5

A109/3 p.FpIO
Preuve : A109/2, A16, rinf 3, rinf 2

A110 OI.p.O
Preuve :

(2)	p.FpI.p.Fp	A101, rinf 3
(3)	p.FpI.p.p.Fp	(2), A7, rinf 5
(4)	p.FpI.p..p.Fp	(5), A10, rinf 3, rinf 5
	A110	(4), A109/2, rinf 5

A110/2 1I.p+1
Preuve :

(2)	OI.Np.O	A110, rinf 3
(3)	NOIN(Np.O)	(2), rinf 4
(4)	1IN(Np.O)	(3), df 18
(5)	1IN(Np.NNO)	(4), A21, rinf 3, rinf 5
(6)	1I.p+NO	(5), df 2
	A110/2	(6), df 18

A110/3 pI.p+O
Preuve :

(2)	OI.p.O	A110
(3)	p+OI.p.O+O	(2), rinf 4
(4)	p+OI.p+.p.O	(3), A104, rinf 3, rinf 5
(5)	p+OIp	(4), A108, rinf 3, rinf 5
	A110/3	(5), rinf 6

A111 pI.p.1
Preuve :

(2)	NpI.Np+O	A110/3, rinf 3
(3)	NNpIN(Np+O)	(2), rinf 4
(4)	pIN(Np+NNO)	(3), A21, rinf 3, rinf 5
(5)	pI.NNp.NNNO	(4), A105, rinf 3, rinf 5
(6)	pI.p.NO	(5), A21, rinf 3, rinf 5
(7)	pI.p.1	(6), df 18

A112 NpVp
Preuve :

(2)	pCp	A103
(3)	NNpCp	(2), A21, rinf 5
	NpVp	(3), df 8

A113 N(p&Np)
Preuve :

(2)	NpVNNp	A104, A21, rinf 5
(3)	NN(NpVNNp	(2), A21, rinf 5
	N(p&Np)	(3), df 9

A114 p.FpI.q.Fq
Preuve : A109/3, df 1

A114/2 pC(q+r)I.pCq+.pCr
Preuve :

(2)	FpI.Fp+Fp	A102, rinf 3, rinf 6
(3)	Fp+q+rI.Fp+Fp+q+r	(2), rinf 4

```
(4)  Fp+Fp+q+rI.Fp+q+Fp+r      A104, A107, rinf 3, rinf 5
                I.Fp+q+.Fp+r   A107, rinf 3
                I.pCq+.pCr     df 7
(5)  Fp+q+rI.Fp+.q+r           A107, rinf 3
           I.pC.q+r            df 7
     pC(q+r)I.pCq+.pCr         (3), (4), (5), rinf 7 bis
```

Dans la preuve ci-dessus, nous avons eu recours à = un procédé que nous avions annoncé et justifié dans le Chapitre 1, immédiatement après la dérivation de la rinf 7. Une précision s'impose : le numéral enfermé entre parenthèses devant une chaîne de lignes pareille désigne l'équivalence(i.e. la formule dont le foncteur principal est un 'I') dont le == membre de gauche est celui de la première ligne de la chaîne= et dont le membre de droite est celui de la dernière ligne de la chaîne.

```
A115  q.pCp
Preuve :
(2)  p.qCp                     A22, rinf 3
     q.pCp                     (2), A9, rinf 5

A116  pC.p+q
Preuve :
(2)  p.(p+q)C.p+q              A115, rinf 3
(3)  pI.p..p+q                 A8, A21, rinf 3
     pC.p+q                    (3), rinf 6, (2), rinf 5

A116/2  p.qC.p+q
Preuve :
(2)  Fp+p                      A103, df 7
(3)  2C./Fp+p+.Fq+q            A106, rinf 3
(4)  Fp+Fq+.p+q                (3), A104, A107, rinf (3),rinf 5
(5)  F(p.q)+.p+q               (4); A17, rinf 5
   p.qC.p+q                    (5), df 7

A116/3  FpCF(p.q)
Preuve :
(2)  FpC.Fp+Fq                 A116, rinf 3
(3)  Fp+FqIF(p.q)              A17, rinf 6
     A116/3                    (2), (3), rinf 5

A117  pC.qC.p.q
Preuve :
(2)  p.qC.p.q                  A103, rinf 3
(3)  F(p.q)+.p.q               (2), df 7
(4)  Fp+Fq+.p.q                (3), A17, rinf 5
(5)  Fp+.Fq+.p.q               (4), A107, rinf 5
(6)  pC.Fq+.p.q                (5), df 7
     A117                      (6), df 7

A117/2  pIpI.qIq
Preuve :
(2)  pIp                       A101
(3)  qIq                       A101, rinf 3
(4)  pIp..qIq                  (2), (3), rinf 8
     4C./pIpI.qIq              A23

A118  pCqC.rCpC.rCq
Preuve :
(2)  FpCFp                     A103, rinf 3
(3)  FqCFq                     id
(4)  rCr                       id
```

(5)	FFp+Fp	(2), df 7
(6)	FFq+Fq	(3), df 7
(7)	Fr+r	(4), df 7
(8)	FFp+Fp+.r+.FFq.Fr	(5), A116, rinf 2, rinf 3
(9)	FFq+Fq+.Fp+r	(6), A116, rinf 2, rinf 3
(10)	Fr+r+.Fp+Fq	(7), A116, rinf 2, rinf 3
(11)	FFp+(FFq.Fr)+Fp+r	(8), A106, A109, rinf 3,rinf 5
(12)	Fp+r+Fq+FFq	(9), A106, A109, rinf 3,rinf 5
(13)	Fp+r+Fq+Fr	(10),A106, A109, rinf 3,rinf 5
(14)	12.13	(12), (13), rinf 8
(15)	Fq+(FFq.Fr)+Fp+r	(14), A109, A104, rinf 3, rinf 5
(16)	11.15	(11), (15), rinf 8 / rinf 5
(17)	FFp+(FFq.Fr+.Fp+r)..Fq+.FFq.Fr+.Fp+r	(16), A107,rinf3,
(18)	FFp.Fq+.FFq.Fr+.Fp+r	(17), A109, A104, rinf 3, rinf 5
(19)	F(Fp+q)+.FFq.Fr+.Fp+r	(18), A18, rinf 3, rinf 5
(20)	F(pCq)+.FFq.Fr+.Fp+r	(19), df 7
(21)	pCqC.FFq.Fr+.Fp+r	(20), df 7
(22)	pCqC.F(Fq+r)+.Fp+r	(21), A18, rinf 3, rinf 5
(23)	pCqC.F(qCr)+.Fp+r	(22), df 7
	C.qCrC.Fp+r	df 7
	C.qCrC.pCr	df 7

A119 pC(pCq)I.pCq

Preuve :

(2)	Fp+(Fp+q)I.Fp+Fp+q	A117, rinf 3, rinf 6
(3)	Fp+Fp+qI.Fp+q	A102, rinf 3, rinf 5
(4)	Fp+(Fp+q)I.Fp+q	(2), (3), rinf 7, rinf 6
(5)	pC(Fp+q)I.Fp+q	(4), df 7
	A119	(5), df 7

A120 Fp+p+q

Preuve :

(2)	pCp	A103
(3)	Fp+p	(2), df 7
(4)	3C.73+q	A116 rinf 3
	A120	(4)

A120/2 p+qCrI.pCr..qCr

Preuve :

(2)	F(p+q)+rI.Fp.Fq+r	A18, rinf 5
(3)	Fp.Fq+rI.r+.Fp.Fq	A104, rinf 3
(4)	r+(Fp.Fq)I.r+Fp..r+Fq	A109, rinf 3
(5)	r+FpI.Fp+r	A104, rinf 3
(6)	r+FqI.Fq+r	A104, rinf 3
(7)	dext4I.pCr..qCr	(5), (6), rinf 5, df 7
(8)	sin2Idext7	(2), (3), (4), (7), rinf7 bis
	A120/2	(8), df 7

Comme on le voit, dans cette dernière preuve nous = avons fait usage de certains procédés pour diminuer quelque = peu la longueur de la démonstration, comme, p.ex., accumuler= diverses inférences dans une même ligne (qui, à la rigueur, = devrait être déployée en plusieurs) et une utilisation ité rative de la rinf 7 par simple induction mathématique.

A120/3 p.qCrI.pCr+.qCr

Preuve :

(2)	F(p.q)I.Fp+Fq	A17
(3)	p.qCrI.Fp+Fq+r	df 7, A101, (2), rinf 3, rinf 5
	I.Fp+Fq+.r+r	A102, rinf 3, rinf 5
	I.Fp+Fq+r+r	A107, rinf 3, rinf 5
	I.Fp+r+Fq+r	A104, A107, rinf 3, rinf 5
	I.Fp+r+.Fq+r	A107, rinf 3, rinf 5
	I.pCr+.qCr	df 7

A120/4 pCq+.qCr
Preuve :

(2)	Fq+q+.r+Fp	A120, rinf 3
(3)	q+Fq+.r+Fp	A104, (2), rinf 3, rinf 5
(4)	q+Fq+r+Fp	A107, (3), rinf 3, rinf 5
(5)	Fp+q+Fq+r	A104, (4), rinf 3, rinf 5
(6)	Fp+q+.Fq+r	A107, (5), rinf 3, rinf 5
	A120/4	(6), df 7

A121 pC.pCqCq
Preuve :

(2)	FFp+Fp+q	A120, rinf 3
(3)	Fq+q+Fp	A120, rinf 3
(4)	2.3	(2), (3), rinf 8
(5)	Fp+.FFp.Fq+q	(4), A104, A107, A109, rinf 3, rinf5
(6)	Fp+.F(Fp+q)+q	(5), A18, rinf 3, rinf 5
(7)	Fp+.F(pCq)+q	(6), df 7
	pC.F(pCq)+q	(7), df 7
	C.pCqCq	df 7

A122 pC(p.q)C.pCq
Preuve :

(2)	p.qCqC.(pC.p.q)C.pCq	A118, rinf 3
(3)	sin2	A115, rinf 3
	A122	(2), (3), rinf 2

A122/2 pC(q.r)C.pCr
Preuve : A115, rinf 3, A118

A123 pC(qCr)I.qC.pCr
Preuve :

(2)	Fp+(Fq+r)I.Fp+Fq+r	A107, rinf 6, rinf 3
(3)	Fp+(Fq+r)I.Fq+Fp+r	(2), A104, rinf 3, rinf 5
	A123	(3), df 7

Le Sch 1, en dépit de sa grande puissance et du rôle majeur qu'il a joué jusqu'ici, ne permet, à chaque application, que le remplacement d'une formule par une autre, à partir de l'antécédent affirmant leur équivalence, dans une seule occurrence de l'une d'entre elles. On peut prouver maintenant une généralisation où cette restriction est éliminée.

Sch 1' pIqC. ...p---I...q---
(quel que soit le nombre d'occurrences où p est remplacé par q dans "...p---", pourvu que les seuls foncteurs qui affectent ces occurrences soient ... -comme pour Sch 1)

Preuve :

(2)	pIqC. ...p---p---p-----...I...q---p---p----...	Schl
(3)	pIqC.2I.pIcC. ...p---p---p-----...I...q---q---p------...	Schl
(4)	dext3C.2C.dextdext3	A20, rinf 3
(5)	4C.3C.7pIsCdext4	A118, rinf 3
(6)	2C.7pIqC.dextdext3	(5), A123, rinf 3, rinf 5
	pIqCdextdextdext3	(6), A119, rinf 3, rinf 5

Ainsi, nous avons prouvé que chaque fois que, en vertu de Sch 1, nous pouvons procéder à n remplacements, nous pouvons aussi procéder à n+1 remplacements.

Désormais, nous lirons toujours Sch 1 comme Sch 1', et de même chaque règle d'inférence obtenue à partir de Sch 1 comme permettant d'effectuer simultanément un nombre quelconque de remplacements d'équivalents, dans les contextes où elles permettent un tel remplacement. Il faut préciser, par ailleurs, que, si jusqu'ici nous avons parfois fait un emploi itératif du Sch 1 ou de rinf 4 ou de rinf 5, cela était, à ce moment-là, une simple abréviation informelle; la différence réside donc en ce que, maintenant, nous avons à considérer de semblables emplois itératifs comme pleinement formels et non plus comme de simples abréviations

A123/2 pIqC.qIp
Preuve :

(2)	pIqC.pIpI.qIp	Sch 1
(3)	pIpI(qIp)C.pIpC.qIp	A20, rinf 3
(4)	pIqC.pIpC.qIp	(2), (3), rinf 3
(5)	pIpC.pIqC.qIp	(4), A123, rinf 3, rinf 5
	A123/2	(5), A101, rinf 3, rinf 2

A124 pC(qCr)C.qC.pCr
Preuve : A123, A20, rinf 3, rinf 2

A125 pCqC.qCrC;pCr
Preuve :

(2)	qCrC.pCqC.pCr	A118, rinf 3
	A125	(2), A124, rinf 3, rinf 2

A125/2 pCqC.r.pCq
Preuve :

(2)	r.pCpC.pCqC.r.pCq	A125, rinf 3
(3)	sin2	A115, rinf 3
	A125 bis	(2), (3), rinf 2

A126 pI(p.q)C.pCq
Preuve :

(2)	pI(p.q)C.pC.p.q	A20, rinf 3
(3)	dext2C.pCq	A122
	2C.3C./sin2Cdext3	A125, rinf 3

A126/2 pDqC.pCq (Preuve : A126, df 10)

A127 pC.qCp
Preuve :

(2)	Fp+p	A103, df 7
(3)	2C./Fp+p+Fq	A116, rinf 3
(4)	Fp+.p+Fq	(3), A107, rinf 3, rinf 5
(5)	Fp+.Fq+p	(4), A104, rinf 3, rinf 5
	A127	(5), df 7

A127/2 pCqC.pC.rCq
Preuve :

(2)	qC.rCq	A127, rinf 3
	2C./pCqC.pC.rCq	A118, rinf 3

A128 pC.FpCq
Preuve :

(2)	FpCFp	A103, rinf 3
(3)	FFp+Fp	(2), df 7
(4)	Fp+FFp	(3), A104, rinf 3, rinf 5
(5)	4C./Fp+FFp+q	A116, rinf 3
(6)	Fp+.FFp+q	(5), A107, rinf 5
	A128	(6), df 7

A128/2 FpC.pCq
Preuve :

(2)	FFp+Fp	A103, rinf 3, df 7

(3)	FFp+Fp+q	(2), A116, rinf 3, rinf 2
(4)	FFp+.Fp+q	(3), A107, rinf 5
	A128/2	(4), df 7

A129 pC(qCr)I.p.qCr

Preuve :

(2)	pC(qCr)I.Fp+.Fq+r	A101, rinf 3, df 7
	I.Fp+Fq+r	A107, rinf 3, rinf 5
	I.F(p.q)+r	A17, rinf 3, rinf 5
	I.p.qCr	df 7

A129/2 pCq.(qCr)C.pCr (Preuve : A125, A129, rinf 3, rinf 5)

A130 p.FpCq (Preuve : A128, A129, rinf 3, rinf 5)

A130/2 OCq (Preuve : A130, A114, df 1)

A131 pC.qCrC.qC.r.p

Preuve :

(2)	Fp+p	A103, df 7
(3)	2C.Fp+p+.Fq+Fr	A116, rinf 3
(4)	Fr+r	A103, df 7
(5)	4C.Fr+r+.Fp+Fq	A116, rinf 3
(6)	FFq+Fq	A103, df 7
(7)	6C.FFq+Fq+.Fp+.r.p	A116, rinf 3
(8)	3.5	(3), (5), rinf 8
(9)	Fp+Fq+(r.p)+Fr	(8), A109, rinf 3, A104, A107, rinf 5
(10)	Fp+Fq+(r.p)+FFq	(7), A104, A107, rinf 3, rinf 5
(11)	9.10	(9), (10), rinf 8
(12)	Fp+(FFq.Fr)+.Fq+.r.p	(11), A109, rinf 3, A104, A107
(13)	pC.FFq.Fr+Fq+.r.p	(12), df 7
(14)	pC.F(Fq+r)+.Fq+.r.p	(13), A18, rinf 3, rinf 5
	C.Fq+rC.Fq+.r.p	df 7
	C.qCrC.Fq+.r.p	df 7
	C.qC.r.p	df 7

A131/2 pCq.(pCr)I.pC.q.r

Preuve :

(2)	Fp+(q.r)I.Fp+.q.r	A101, rinf 3
(3)	Fp+q.(Fp+r)I.Fp+.q.r	A109, (2), rinf3, rinf 5
	A131/2	(3), df 7

A131/3 pCqC.pCrC.pC.q.r

Preuve :

(2)	A131/2C.pCq.(pCr)C.pC.q.r	A20, rinf 3
	A131/3	(2), A129, rinf3, rinf5

A131/4 pCqC.pC.p.q (Preuve : A131/3, A103, rinf 3, rinf2)

A131/5 pCqC.p.rC.q.r

Preuve :

(2)	pCqC.p.rCq	A125/2, A9, rinf 5
(3)	p.rCqC.p.rC.p.r.q	A131/4, rinf 3
(4)	p.r.qC.q.r	A9, A10, A115, rinf 3, rinf 5
(5)	dext3C.p.rC.q.r	A125, rinf 3
(6)	sin3Cdext5	(3), (5), A125, rinf 3, rinf 2
	A131/5	(2), (6), A125, rinf 3, rinf 2

A132 pC(qCr)C.pCqC.pCr

Preuve :

(2)	FFp+Fp	A103, df 7, rinf 3
(3)	Fp+Fq+rC.Fp+Fq+r	A103, rinf 3
(4)	FFp+Fp+r	(2), A106, rinf 3, rinf 2

```
(5)  4C.7Fp+Fq+rC.Fp+Fq+r+4             A131, rinf 3   / rinf 5
(6)  Fp+Fq+rC.FFp.Fq+.Fp+r              (5), A104,A109,rinf3,
(7)  Fp+Fq+rC.F(Fp+q)+.Fp+r             (6), A18, rinf 5,rinf 3
(8)  Fp+(Fq+r)C.F(pCq)+.Fp+r   (7), A107, df 7, rinf 3,rinf 5
     A132                               (8), df 7
```

```
A132/2  rCsC.pC(qCr)C.pC.qCs
Preuve :
(2)  qCrC.rCsC.qCs                 A125, rinf 3
(3)  2C.7pC2                       A127, rinf 3
(4)  3C.7pC(qCr)C.pC.rCsC.qCs      A132, rinf 3
(5)  pC(rCs.qCs)C.(pC.rCs)C.pC.qCs    A132, rinf 3
(6)  pC(rCs)C.dext4C.pC.qCs        (5), A124, rinf 3, rinf 2
(7)  rCsCsin6                      A127, rinf 3
(8)  rCsC.dext4C.pC.qCs            (6), (7), rinf 9
(9)  dext4C.rCsC.pC.qCs            (8), A123, rinf 3, rinf 5
(10) sin4Cdext9                    (4), (9), rinf 9
     rCsC.sin4C.pC.qCs             (10), A123, rinf 3, rinf 5
```

Nous expbiterons par la suite ce théorème pour obtenir des raccourcis de preuves, puvant greffer un conditionnel valide, non seulement sur le foncteur conditionnel principal= d'une ligne, mais aussi sur des foncteurs conditionnels situés plus à droite. Supposons que "rCs" soit un théorème; = alors on peut construire une chaîne comme suit :

```
(n)  pC.qCr
         Cs
```

(La dernière ligne de la preuve de A131 préfigurait cet emploi mais là il s'agissait seulement d'une substitution définitionnelle).

```
A132/3  p+qC.rC.r.p+.r.q
Preuve :  p+qC.rC.p+q        A127, rinf 3
             C.rC.r..p+q     A131/4     rinf 3
                C.r.p+.r.q   A15, rinf 3, rinf 5
```

```
A133 pCqC.FqCFp
Preuve :
(2)  FFp+Fp+q             A120, rinf 3
(3)  FFq+Fq+Fp            id
(4)  2.3                  (2), (3), rinf 8
(5)  FFp.Fq+.FFq.Fp       A104, A109, (4), rinf 3,rinf 5
(6)  F(Fp+q)+.FFq+Fp      (5), A18, rinf 3, rinf 5
     A133                 (6), df 7
```

```
A134  FO  (Preuve : A109/2, df 1, rinf 3)
A134/2  pCq.(pCFq)CFp   (Preuve : A131/2, A133, A123, A134, / rinf3,rinf5)
A135  H1   (Preuve : A134, A21, df 18, rinf 3, rinf 5)
A135/2 OIN1   (Preuve : A101, rinf 3, A21, rinf 5, df 18)
```

```
A136  NpINqC.pIq
Preuve :  NpINqC.NNpINNq     Sch 1
                C.pIq        A21, rinf 3, rinf 5
```

```
A137  pC.LpI1
Preuve :  pCFFp              A103, rinf 3, df 7, A104,rinf 5
           C.FpIO            A16
           C.NFpINO          Sch 1
           C.LpI1            df 18, df 4
```

```
A137/2  pC.FpIO   (Preuve : A137, df 18, df 4, A136, rinf3)
```

Chapitre 4.- SURNEGATION ET SURAFFIRMATION

Tout en poursuivant la démonstration de théorèmes relatifs au conditionnel fort, nous consacrerons l'essentiel de ce chapitre à prouver certains théorèmes sur les foncteurs = de suraffirmation ('H') et de surnégation ('F'), de même que= sur l'affirmation affaiblie ('L').

A138 FpINLp

Preuve :	FpIFp	A101, rinf 3
	INNFp	A21, rinf 3, rinf 5
	INLp	df 4

A139 HpINLNp

Preuve :	HpIFNp	A101, rinf 3, df 5
	INLNp	A138, rinf 7

A139/2 LpINHNp

Preuve :

(2)	HNpINLNNp	A139, rinf 3
	INLp	A21, rinf 3, rinf 7
(3)	NHNpINNLp	(2), rinf 4
	ILp	A21, rinf 3, rinf 5
	A139/2	(3), rinf 6

A140 -pILNp

Preuve :	-pINFNp	A101, rinf 3, df 6
	INNLNp	A138, rinf 7
	ILNp	A21, rinf 3, rinf 5

A140/2 -pIFHp

A141 -pINHp (Preuve : A101, rinf 3, df 6, df 5)

A142 FpIHNp (Preuve : A101, rinf 3, df 5, A21, rinf 5)

A145 HHpIHp

Preuve :	HHpIFNFNp	A101, rinf 3, df 5
	IFFFNp	A19, rinf 3, rinf 5
	INFFNp	id
	INNFNp	id
	IFNp	A21, rinf 3, rinf 5
	IHp	df 5

A146 HLpILp

Preuve :	LpINFp	A101, rinf 3, df 4
	IFFp	A19, rinf 3, rinf 5
	IHLp	A142, A139, rinf 5

A147 LHpIHp

Preuve :	LHpINHNNLNp	A139
	INHLNp	A21
	INLNp	A146
	IHp	A139

A148 LLpILp

Preuve :	LLpINFNFp	A101, rinf 3, df 4
	INHNNHNp	A142
	INHHNp	A21, rinf 3
	INHNp	A145
	ILp	A139/2

Comme on l'aura constaté, nous avons sous-entendu = dans les dernières preuves les références aux règles d'inférence suivantes : rinf 4, rinf 5, rinf 6 et rinf 7. Nous nous en tiendrons à cette pratique désormais. Un nombre de théorèmes complémentaires énonçant des équivalences concernant les foncteurs 'F', 'L', 'H' et '-' pourront être trouvés dans l'Annexe N° 2 de ce Livre. Les preuves en sont une simple affaire de routine.

A159 L(p+q)I.Lp+Lq
Preuve : L(p+q)INF(p+q) A101, rinf 3, df 4
IN(Fp.Fq) A18
I.NFp+NFq A106, rinf 3
I.Lp+Lq df 4

A160 H(p+q)I.Hp+Hq
Preuve : H(p+q)IFN(p+q) A101, rinf 3, df 5
IF(Np.Nq) A105
I.FNp+FNq A17, rinf 3
I.Hp+Hq df5

A161 L(p.q)I.Lp.Lq
Preuve : L(p.q)INF(p.q) A101, rinf 3, df 4
IN(Fp+Fq) A17
I.NFp.NFq A105, rinf 3

A162 H(p.q)I.Hp.Hq
Preuve : H(p.q)IFN(p.q) A101, rinf 3, df 5
IF(Np+Nq) A106, rinf 3
I.FNp.FNq A18, rinf 3
I.Hp.Hq df 5

A163 pVqI.Hp+q
Preuve : pVqI.NpCq A101, rinf 3, df 7
I.FNp+q df 7
I.Hp+q df 5

A164 p&qI.Lp.q
Preuve : p&qIN(NpVNq) A101, rinf 3, df 9
IN(HNp+Nq) A163
I.NHNp.NNq A105, rinf 3
I.Lp.q A139/2, A21, rinf 3

A165 pCqIN(Lp.Nq)
Preuve : pCqI.Fp+q A101, rinf 3, df 7
I.NLp+q A138
I.NLp+NNp A21, rinf 3
IN(Lp.Nq) A106, rinf 3

A166 pCqI.LpZq (Preuve : A165, df 3)

A167 p+qC.pCr.(qCr)Cr
Preuve :
(2) FFp+Fp+.(FFq.Fr)+r A120, rinf 3
(3) Fp+FFp+(FFq.Fr)+r (2), A107, A104, rinf 3
(4) Fr+r+.Fp+.FFq.Fr A107, rinf 3
(5) Fp+Fr+(FFq.Fr)+r (4), A107, A104, rinf 3
(6) FFq+Fq+.(FFp.Fr)+r A120, rinf 3
(7) Fq+(FFp.Fr)+FFq+r (6), A107, A104, rinf 3
(8) Fr+r+.Fq+.FFp.Fr A120, rinf 3
(9) Fq+FFp.Fr)+Fr+r (8), A107, A104, rinf 3
(10) 3.5 (3), (5), rinf 8
(11) Fp+(FFp.Fr)+(FFq.Fr)+r (10), A109, rinf 3
(12) 7.9 (7), (9), rinf 8
(13) Fq+(FFp.Fr)+(FFq.Fr)+r (12), AL09, rinf 3

(14)	11.13	(11), (13), rinf 8
(15)	Fp.Fq+.FFp.Fr+(FFq.Fr)+r	(14), A109, A107, rinf 3
(16)	F(p+q)+.F(Fp+r)+F(Fq+r)+r	(15), A18, rinf 3
(18)	F(p+q)+.F((Fp+r).5Fq+r))+r	(16), A17, rinf 3
	A167	(17), df 7

A168 pC.FpDq

Preuve :

(2)	pC.FpIO	A137/2
(3)	FpIOC.A110IFpI.q.Fp	Sch 1
	I.Fp.q	A9, rinf 3
(4)	dext3C.A110C.FpI.Fp.q	A20, rinf 3
(5)	FpIOCdext4	(4), (3), rinf 9
(6)	pCdext4	(2), (5), rinf 9
(7)	A110C.7pC.FpI.Fp.q	(6), A123, rinf 3
	A168	(7), df 10

A169 p+q.(qCr)C.p+r

Preuve :

(2)	Fp+p+(FFq.Fr)+r	A120, rinf 3
(3)	FFq+Fq+.p+r	id
(4)	Fr+r+.Fq+p	id
(5)	3.4	(3), (4), rinf 8
(6)	Fq+(FFq.Fr)+p+r	(5), A109, A104, A107, rinf 3
(7)	2.6	(2), (6), rinf 8
(8)	Fp.Fq+(FFq.Fr)+.p+r	(7), A109, A107, rinf 3
(9)	F(p+q)+F(Fq+r)+.p+r	(8), A18, rinf 3
(10)	F(p+q..Fq+r)+.p+r	(9), A17, rinf 3
	A169	(10), df 7

A169/2 pC(q+r)C.F(p.r)C.pCq

Preuve :

(2)	FLp+Lp+q+.Lp.Fq.Fr	A120, rinf 3
(3)	FLr+Lr+.Fp+q	id
(4)	Fq+q+.Fp+Lr	id
(5)	FLp+Lp+.q+Lr	id
(6)	3.4.5	(3), (4), (5),rinf8 (itérativement)
(7)	Lr+Fp+q+.Lp.Fq.Fr	(6),A156/2,A104,A107,A109,rinf3
(8)	2.7	(2), (7), rinf 8
(9)	Lp.Lr+.(Lp.Fq.Fr)+.Fp+q	(8), A156/2,rinf3,A104,A107,A109
(10)	FFp.FFr+.(FFp..Fq.Fr)+.Fp+q	(9), A157, A10
(11)	F(Fp+Fr)+.F(Fp+.q+r)+.Fp+q	(10), A17, A18, rinf 3
(12)	Fp+FrC.(Fp+.q+r)C.pCq	(11), df 7
(13)	F(p.r)C.(pC.q+r)C.pCq	(12), df 7, A17, rinf 3
	A169/2	(13), A123, rinf 3

A169/3 pC(q+r)C.rCFpC.pCq

Preuve : A169/2, A9, A17 + df 7, rinf 3

A170 LpCp

Preuve :

(2)	Fp+p	A103, df 7
(3)	FLp+p	(2), A156
(4)	LpCp	(3), df 7

A171 pCLp

Preuve :

(2)	FFp+Fp	A103, df 7
(3)	Fp+FFp	(2), A104, rinf 3
(4)	Fp+Lp	(3), A157
(5)	pCLp	(4), df 7

A171/2 pCFqC.qCFp
Preuve :

```
(2)  pCFqC.FFqC.Fp               A133, rinf 3
(3)  FFqC.pCFqCFp                (2), A123, rinf 3
(4)  LqC.pCFqCFp                 (3), A157, rinf 3
(5)  qCLq                        A171, rinf 3
      Cdext4                     (4), A118, rinf 3, rinf 2
     A171 bis                    (5), A123, rinf 3
```

A172 p=Lp (Preuve: A170, A171, rinf 8, df 11)

A172/2 Np=-p (Preuve : A172, A140, rinf 3)

A173 p+q=.Lp+Lq (Preuve : A172, rinf 3, A159

A173/2 p.q=.Lp.Lq (Preuve : A172, rinf 3, A161)

A174 FpC.pDq (Preuve : A110, A16, df 10, Sch 1, A20, rinf 3 /rinf 2

A175 pDLp
Preuve :

```
(2)  pC.LpIl                     A137
(3)  LpIlC.AlllI.pI.p.Lp         Sch 1, A123/2, rinf 9
                    I.pDLp       df 10
(4)  dext3C.AlllC.pDLp           A20, rinf 3
(5)  sin3Cdext4                  (3), (4), rinf 9
(6)  pC.AlllC.pDLp               (2), (5), rinf 9
(7)  AlllC./pC.pDLp              (6). A123, rinf 3
(8)  Fp+pC.((FpC.pDLp).(pC.pDLp))C.pDLp    A167, rinf 3
(9)  dext8                       (8), A103, df 7, rinf 2
(10) FpC.pDLp                    A174, rinf 3
(11) 10.7                        (10), (7), rinf 8
     pDLp                        (9), (11), rinf 2
```

A175/2 p(-)Lp (Preuve : A175, A171, rinf 8, df 20)

A176 pDq=.qI.p+q
Preuve :

```
(2)  pI(p.q)C.p+qI.p.q+q         Sch 1
           C.p+qIq               A104, A108
           C.qI.p+q              A123/2
(3)  qI(p+q)C.p.qI.p..p+q        Sch 1, rinf 9
           C.pI.p.q              A123/2, A8
(4)  2.3                         (2), (3), rinf 8
     A176                        (4), df 10, df 11
```

A177 pDq=.NqDNp
Preuve :

```
(2)  pI(p.q)C.qI.p+q             A176, df 11, A22, rinf 3,rinf 9
           C.NqI.Np.Nq           Sch 1, rinf 9, A105
(3)  NqI(Np.Nq)C.NpIN(p.q)       A176,rinf3,rinf9,df11,A22, A106 =
                C.pI.p.q         A136
     A177                        (2), (3), rinf 8, df 10, df 11
```

A177/2 pDNq=qDNp (Preuve : A177, A21, rinf 3)

A177/3 NqC.pDqCNp
Preuve :

```
(2)  pDqC.NqDNp                  A177, df 11, A22, rinf 3,rinf 9
       C.NqCNp                   A126/2, rinf 3
     A177/3                      (2), A129, rinf 3, rinf 2
```

A178 HpDp
Preuve :

```
(2)  NpDLNp                      A175, rinf 3
```

(3) NLNpDNNp (2), A177, rinf 3, rinf 12a
HpDp (3), A139, A21

A178/2 1 (Preuve : A135,A178, rinf 3, A126/2 , rinf 2)

A178/3 p=.LpIl
Preuve :
(2) LpIlC.lILp A123/2, rinf 3
C.1CLp A20, rinf 3
(3) A178/2C./LpIlCLp (2), A123
(4) A137.3 A137, (3), rinf 8
A178/3 (4), df 11

A178/4 Ll (Preuve : A178/2, A175, rinf 3, A126/2, rinf 2)

A178/5 FpDNp (Preuve : A178, A142, rinf 3)

Avant d'aborder le Chapitre 5, quelques remarques = sur les résultats déjà acquis paraissent s'imposer. Nous == avons pu voir dans les quelques pages qui précèdent comment = les propriétés des foncteurs 'C' et 'D' se ressemblent à certains égards, tout en différant très nettement sous d'autres= rapports. Pour la négation forte, les deux conditionnels possèdent la propriété du modus tollens, tandis que pour la négation simple seul 'D' la possède. Chaque fois que nous avons= une négation, nous avons aussi un conditionnel fort, mais non pas réciproquement. Pareillement, chaque fois que nous avons une équivalence, nous avons un biconditionnel, mais non pas = vice versa. Par ailleurs, nous avons rencontré -et nous rencontrerons encore par la suite- de très nombreuses versions = de théorèmes du CSC qui sont valides pour les foncteurs 'C' et 'D'; mais -et c'est là précisément que réside l'intérêt d'un système plus complexe- il ne s'agit pas des mêmes théorèmes vis-à-vis des mêmes foncteurs.

Un des traits les plus saillants du corps de théorèmes déjà démontrés est la distributivité et de la suraffirmation et de la sous-affirmation ('H' et 'L', respectivement) = aussi bien vis-à-vis de la conjonction que vis-à-vis de la = disjonction. On pourrait considérer en quelque sorte le foncteur de suraffirmation comme un foncteur de nécessité, celui= de sous-affirmation comme un foncteur de possibilité; et, par suite, on serait à même de s'attendre à ce que le premier fût distributif par rapport à la conjonction seulement, le second par rapport à la seule disjonction. Eh bien, non! Leur distributivité est, à ce propos, identique et générale. Il y a cependant une différence essentielle entre eux : "Hp" ne peut pas être vrai sans que p soit -plus ou moins- vrai, mais, en revanche, p peut être v et "Hp" tout à fait faux (à savoir,= si p possède une valeur de vérité intermédiaire). Au contraire, bien que "LpDp" ne soit pas valide (car du fait qu'il soit tout à fait vrai qu'il est plus ou moins vrai que p, il ne == s'ensuit point, bien entendu, qu'il soit au moins aussi vrai= que p), "LpCp" est valide (cf. A170); dès lors, p et "Lp" == sont solidaires, l'un d'eux ne pouvant pas être vrai sans= que l'autre ne le soit, ne fût-ce qu'infinitésimalement. Il faut noter que les foncteurs 'L' et 'H' se comportent, quant à la préfixation itérative, comme les foncteurs de nécessité= et de possibilité dans S5. Ceci est dû au fait qu'une formule comme "Hp" ou "Lp" ne peut prendre que deux valeurs : = soit elle est tout à fait vraie, soit elle est tout à fait= fausse. (Ceci se réfère, bien sûr, seulement à chaque composante aléthique; car il se peut fort bien qu'à certains égards il soit tout à fait vrai, et à d'autres égards tout à fait ==

faux, p.ex., qu'il est plus ou moins vrai que p (c-à-d que Lp) ou bien qu'il est exact que p (c-à-d que Hp).

Chapitre 5.- CONDITIONNEL FAIBLE; IMPLICATION

Si le conditionnel fort est 'C', qui possède la propriété du modus ponens, comme nous le savons, le conditionnel faible est, en revanche, 'Z', qui ne la possède pas. Néanmoins, 'Z' partage avec l'implication ou surconditionnel = 'D' une propriété qui manque à 'C' : la formule du modus tollens par rapport à la négation simple est un théorème, aussi bien pour 'D' que pour 'Z', tandis qu'elle ne l'est pas pour 'C'. Toutefois, pour une formule en 'Z', on ne peut pas utiliser un pareil théorème pour conclure, p.ex., à partir des prémisses "Nq" et "pZq" (même si elles sont préfixées du foncteur 'B') que "Np", car, 'Z' ne possédant pas la propriété du MP, il ne possède pas non plus la propriété du modus tollens, même si -ce qui est tout autre chose- la formule du modus tollens est valide. Au surplus, il faut noter que, par rapport à la surnégation, le modus tollens n'est pas valide, même comme simple formule théorématique, pour le conditionnel faible, tandis qu'il l'est pour l'implication comme pour le conditionnel fort.

Nous avons déjà rencontré plusieurs formulations valides dans As des principes de non-contradiction et de tiers exclu. Nous continuerons d'en rencontrer, et tout de suite on pourra s'en apercevoir (nous verrons aussi comment le principe d'identité est valide lorsqu'il s'agit du conditionnel faible, comme il l'est pour les autres conditionnels). Enfin, ce chapitre se terminera par une série de théorèmes concernant l'équivalence, qui seront largement utilisés dans les chapitres suivants, et surtout au Chapitre 9.

Dans ce qui suit nous omettrons toute référence aux règles d'inférence rinf 3 et rinf 2.

A179 pVqC.p+q
Preuve :

(2)	q+Hp.(HpCp)C.q+p	A169
(3)	HpCp	df 10, A178, A126
(4)	q+HpC.q+p	(2), (3), A129, A124
(5)	Hp+qC.p+q	(4), A104
	A179	(5), A163

A180 Np+p (Preuve : A112, A179)

A180/2 Np+q+p
Preuve :

(2)	Np+p	A180
(3)	Np+p+q	(2), A116
	Np+q+p	(3), A104, A107

A180/3 pZqC.qZrZ.pZr
Preuve :

(2)	Np+Nr+r	A180/2, A104
(3)	Np+qC.Np+q+r	A116
(4)	2C.3C./Np+qC.Np+q+r..Np+Nr+r	A131
	C.Np+r+q..Np+r+Nr	A104, A107
	C.Np+r+.q.Nr	A109
	C.q.Nr+.Np+r	A104
	C.qZrZ.pZr	A20, A105, A106/2
	A180/3	(4), A106/2

A180/4 pZHp (Preuve : A103/2, A104, A106/2

A181 N(p.Np)
Preuve :

(2)	p+Np	A180, A104
(3)	N(Np.NNp)	(2), df 2
(4)	N(Np.p)	A21
	A181	(4), A9

A181/2 N(p.q.Np) (Preuve à partir de A180/2, comme celle de A181 à partir de A180, en utilisant en outre A9)

A181/3 NpCN(p.q) (Preuve : A116, A106)

A182 pZp (Preuve : A181, df 3)

A182/2 pCq.(NpCq)Cq (Preuve : A180, A104, A167)

A182/3 pCq.(FpCq)Cq (Preuve similaire, à partir de A103 + df 7, au lieu de A180)

A183 NSp (Preuve : A181, df 14)

A184 pCqCpCp
Preuve :

(2)	FFFpIFp	A157/2
(3)	Fp+p+.FFq.Fp	A120
(4)	FFFp+p+.FFq.Fp	(2), (3)
(5)	4.3	(4), (3), rinf 8
(6)	FFFp.Fp+(FFq.Fp)+p	(5), A104, A107, A109
(7)	FFFp+FFq.Fp+p	(6), A15
(8)	F(FFp.Fq).Fp+p	(7), A17
(9)	FFp.Fq+pCp	(8), A18, df 7
(10)	F(Fp+q)+pCp	(9), A18
(11)	A184	(10), df 7

A185 pCqC.rCsC.p.rC.q.s
Preuve :

(2)	FFp+Fp+.FFr.Fs+Fr+.q.s	A120
(3)	Fq+q+.FFr.Fs+Fp+r	A120
(4)	FFr+Fr+.Fp+s	A120
(5)	Fs+s+.Fq+Fp+Fr	A120
(6)	Fq+(FFr.Fs)+Fp+Fr+s	(4), (5), A104, A107, A109
(7)	Fq+(FFr.Fs)+Fp+Fr+.q.s	(3), (6), id
(8)	FFp.Fq+.FFr.Fs+.Fp+Fr+.q.s	(2), (7), id
(9)	F(Fp+q)+.F(Fr+s)+.F(p.r)+.q.s	(8), A18
	A185	(9), df 7

A185/2 p.qCrC.p'Cp.(q'Cq)C.p'.q'Cr
Preuve :

(2)	p'.q'C(p.q)C.p.qCrC.p'.q'Cr	A125
(3)	p'Cp.(q'Cq)C.p'.q'C.p.q	A185, A129
(4)	p'Cp.(q'Cq)C.p.qCrC.p'.q'Cr	(3), (2), rinf 9
	4C.7A185/2	A124

A185/3 pCq+(p'Cq')I.p.p'C.q.q'
Preuve :

pCq+(p'Cq')I.Fp+q+.Fp'+q'	df 7
I.Fp+.q+Fp'+q'	A107
I.Fp+Fp'+q+q'	A104, A107
I.Fp+Fp'+.q+q'	A107
I.F(p.p')+.q+q'	A17
I.p.p'C.q+q'	df 7

A186 pCrC.qCrC.p+qCr (Preuve : A167, A124, A129)

A187 p=qI.p.q+F(p+q)

Preuve :

(2)	F(p+q)+OIF(p+q)	A110/3
(3)	F(p+q)+(q.Fq)IF(p+q)	(2), df 1
(4)	Fp.p+(q.p)I.q.p	A110/3, A109/3
(5)	3C.7sin3+dext4I.dext3+dext4	Sch 1
(6)	4C.5I.7sin3+sin4I.dext3+dext4	Sch 1
(7)	sin3+sin4I.Fp+q..Fq+p	A15
	I.p=q	df 7, df 11
(8)	dext3+dext4I.p.q+F(p+q)	A101, A9, A104
	A187	(6), (8), (9)

A187/2 p=qI.p+qC.p.q (Preuve : A187, A104, df 7)

A187/3 pC.p.q=q

Preuve :

(2)	pC.qC.p.q	A117
(3)	pC.p.qCq	A22, A9, A127
(4)	pC.dext2.dext3	(2), (3), A131/3
	A187/3	(4), df 11

A187/4 N p.q+p=.p+q

Preuve :

(2)	Np.q+pI.p+Np..p+q	A109, A104
(3)	p+NpC.dext2=.p+q	A187/3
(4)	p+NpC.sin2=p+q	(3), (2)
	dext4	A180, A104

A187/5 Fp.q+p=.p+q (Preuve similaire, par A103 + df 7, au lieu de A180)

A187/6 Fp+q.pI.p.q

Preuve :	Fp+q.pI.Fp.p+.p.q	A15, A9
	I.p.q+O	A9, A104, A109/3
	I.p.q	A110/3

A188 pI(q.r).(qCq').(rCr')C.pC.q'.r'

Preuve :

(2)	qCq'C.rCr'C.q.rC.q'.r'	A185
(3)	pI(q.r)C.2I.qCq'C.rCr'C.pC.q'.r'	Sch 1
(4)	dext3C.2C.dextdext3	A20
(5)	sin3C2Cdextdext3	(3), (4), rinf 9
(6)	sin3Cdextdext3	(2), (5), A124
(7)	pI(q.r).(qCq')C.rCr'C.pC.q'.r'	(6), A129
	A188	(7), A129

A189 pIqC.pIrC.qIr

Preuve:

(2)	pIqC.pIrI.qIr	Sch 1
	C.pIrC.qIr	A20

A189/2 pIq.(pIr)C.pIr (Preuve : A189, A129)

A189/3 qIp.(rIp)C.qIr (Preuve : A189/2, A123/2, A185/2)

A189/4 pIqC.pI.p.q

Preuve :

(2)	pIqC.pI(p.p)I.pI.p.q	Sch 1
	C.pI(p.p)C.pI.p.q	A20
(3)	pI(p.p)C.pIqC.pI.p.q	(2), A124
	A189/4	A7, (3)

A189/5 pIq.(pIr)C.pI.q.r

Preuve :

(2)	pIqC.pI.q.p	A189/4, A9
(3)	pIrC.pI(q.p)I.pI.q.r	Sch 1

(4) pIrC.pI(q.p)C.pI.q.r A124, A20
(5) sin2.sin4C.dext2.dext4 A185
(6) dext2.dext4C.pI.q.r A121, A129
A189/5 (5), (6), rinf 9

A189/6 pIq.F(pIr)CF(qIr) (Preuve : A189, A133, A129, A125)

A190 pI(q+q')C.qCr.(q'Cr)I.pCr
Preuve :
(2) pI(q+q')C.pCrI.q+q'Cr Sch 1
I.F(q+q')+r df 7
I.Fq.Fq'+r A18
I.Fq+r..Fq'+r A104, A109
I.qCr..q'Cr df 7
(3) dext2C.qCr.(q'Cr)I.pCr A123/2
A190 (2), (3), rinf 9

A191 pIq=(p'Iq')C.pIq'I.p'Iq'
Preuve :
(2) pIq=(p'Iq')I.pIq.(p'Iq')+F(pIq+.p'Iq') A187
(3) sindext2C.pIqI.p'Iq' A23
(4) dextdext2I.F(pIq).F(p'Iq') A18
(5) F(pIq)C.pIqIO A16
(6) F(p'Iq')C.p'Iq'IO A16
(7) dextdext2C.pIqIO..p'Iq'IO (4),(5),(6),A188
(8) pIqIO.(p'Iq'IO)C.pIqI.p'Iq' A189/3
(9) dextdext2C.pIqI.p'Iq' (7), (8), rinf 9
2C.3.9I.7sin2C.pIqI.p'Iq' A190, rinf 8

La preuve précédente est telle que l'utilisation = = de rinf 8 justifie un pas déductif situé d'emblée à la gauche du crochet de séparation. Désormais, dans de tels contextes= nous ne mentionnerons plus 'rinf 8'.

A191/2 pIqI.NpINq (Preuve : Sch 1, A136, rinf 8, df 11, A195)

A192 pDqI.qI.p+q (Preuve : A176, df 10, A191)

A193 pDqI.NqDNp (Preuve similaire, par A177 et A191)

A193/2 N pDqI.NqDp (Preuve : A193, A21)

A194 p+q.(pCr..qCr')C.r+r'
Preuve :
(2) rC.r+r' A116
(3) r'C.r+r' A116, A104
(4) pCrC.pC.r+r' A118, (2)
(5) 4C.7qCr'.(p+q..pCr)Cdext4 A125/2
(6) qCr'C.qC.r+r' A118, (3)
(7) 6C.7pCr.(p+q..qCr')Cdext6 A125/2
(8) sin5Isin7 A9, A10
(9) pC(r+r').qC(r+r')C.p+qC.r+r' A186, A129
(10) sin5C.pC(r+r')..qC.r+r' A131/3, (7), (8), (5)
(11) sin5C.p+qC.r+r' A118, (9), (10)
(12) p+q.(pCr..qCr')C.p+qC.r+r' (11), A9, A10
A194 (12), rinf 9,A22,A12

A194/2 pDq.(qDr)C.pDr
Preuve :
(2) pI(p.q)C.p.rI.p.q.r Sch 1
(3) qI(q.r)C.q.pI.q.r.p Sch 1
(4) sin2.sin3C.dext2.dext3 (2), (3), A185
(5) dext2.dext3C.p.rI.p.q A9, A10, A189/3
(6) sin2.sin3Csin2 A22
(7) sin2.sin3Cdext5 (4), (5), rinf 9

```
(8)  sin2.sin3C.sin2.dext5           (6), (7), A185
             C.pI.p.r                A189/3
     A194/2                          (8), df 10

A194/3  p^qDp
Preuve :
(2)  p^qD(p.q)..p.qC.p^q     A11, A22; df 20
(3)  p^qD.p.q                (2), A22
(4)  p.qI.p.p.q              A101, A7
(5)  p.qI.p.q.p              (4), A10, A9
(6)  p.qDp                   (5), df 10
(7)  p^qD(p.q)..p.qDp        (3), (5), A117
     A194/3                  (6), A194/2

A194/4a  pDN(Np^Nà)
Preuve :
(2)  Np^NàDNp                A194/3
(3)  NNpDN(Np^Nà)            (2), A193
     A194/4a                 (3), A21

A194/4b  pDmp  (Preuve = A194/4a, df 47)

A194/5  pDq+.qDp
Preuve :
(2)  pDq+(qD.p^Nà)+.pIN(Nq^Nà)             A24, df 46, df 47
(3)  p^NàDpC.qD(p^Nà)C.qD(p^Nà)..p^NàDp    A117, A9
(4)  sin3                                  A194/3
(5)  dext3                                 (3), (4)
(6)  qD(p^Nà).(p^NàDp)C.qDp                A194/2
(7)  qD(p^Nà)C.qDp                         (3) , (6), A125
(8)  pDq+(qD.p^Nà)C.pDq+.qDp               A167,A129,(7),A123
(9)  pIN(Nq^Nà)C.qDpI.qDN(Nq^Nà)           Sch 1
                C.qDN(Nq^Nà)C.qDp          A123, A20
(10) qDN(Nq^Nà)C.pIN(Nq^Nà)C.qDp           (9), A129
(11) sin 10                                A194/4
(12) dext10                                (10); (11)/A129,A123
(13) pDq+(qD.p^Nà)+(pIN(Nq^Nà))C.pDq+(qDp)+.qDp   (8), A194,A117
     A194/5                          (13),(2),A107, A102

A195  p+qIp+.p+qIq
Preuve :
(2)  pDqC.qI.p+q             A176, rinf 11a
         C.p+qIq             A123/2
(3)  qDpC.p+qIp              similairem.
(4)  sin3+sin2               A194/5
     5.4.3C.7A195            A194

A196  pIqI.qIp
Preuve :
(2)  qIpC.pIq                A123/2
(3)  pIqC.qIp                id
(4)  pIq=.qIp                (2), (3), rinf 8, df 11
     A196                    (4), A191

A196/2  qIr.(pIr)C.pI.q+r
Preuve :
(2)  pIq.(qIr)C.pIr                  A189/2, A196
(3)  pIrC.pI.p+r                     A102, Sch 1, A20,rinf 9
(4)  sin2Cdext3                      (2), (3), rinf 9
(5)  sin2C.qIr                       A115
         C.4I.pIr.(qIr)C.pI.q+r      Sch 1
         C.4C.qIr.(pIr)C.pI.q+r      A20, A9
(6)  4C.7sin2Cdextdext5              (5), A123
```

A196/2 A132, (6), rinf 9

A196/3 qIrC.pIq+(pIr)C.pIq..pIr

Preuve :

(2) qIr.(pIq+.pIr)I.qIr.(pIq)+.qIr..pIr A15
(3) sindext2C.pIq..pIr A196,A189/2,A131/4
(4) dextdext2C.pIq..pIr id
(5) 3.4I.dext2Cdext4 A120/2
(6) sin2Cdext4 (3), (4), rinf 8,(5),(2)
A196/3 (6), A129

A196/4 pIq.pI.pIq.q

Preuve :

(2) pIqC.pIq.pI.pIq.q Sch 1
(3) F(pIq)CF(pIq.p) A116/3
(4) F(pIq)CF(pIq.q) id
(5) dext3C.pIq.pIO A16
(6) dext4C.pIq.qIO id
(7) dext3.dext4C.dext5.dext6 (5), (6), A185
C.pIq.pI.pIq.q A189/3
(8) sin4C.dext3.dext4 (3), (4), A131/3
C.pIq.pI.pIq.q (7), A118
A196/4 (2),(8),A103+df7,A117,A167

Avant de clôturer ce chapitre, il convient de préciser certains points sur les résultats acquis. Tout d'abord, il ne faut pas se méprendre sur la portée de certaines conclusions. Par exemple, nous n'avons pas encore démontré que "pDq.(qDr)D.pDr"; ceci dépasse A194/2, car, s'il est vrai (cf. A126/2) que toute formule en 'D' peut être l'antécédent d'un conditionnel valide dont le conséquent est le résultat de substituer à l'occurrence principale de 'D' dans l'antécédent une occurrence de 'C', la réciproque n'est pas vraie. De même, on aurait pu incliner à croire que certains théorèmes étaient des réduplications oiseuses, mais il faut relever que, bien souvent, nous démontrons d'abord un théorème en 'C' ou en '=', et seulement par la suite un théorème semblable en 'D' ou en 'I'. Toutes les formules valides en 'C' ou en '=' ne le demeurent pas si on substitue à l'occurrence principale de ces foncteurs une occurrence, respectivement, de 'D' ou 'I'.

Le théorème A194/3 nous a présenté une première propriété de la surconjonction '^'. Nous étudierons plus tard, surtout au Chapitre 15, d'autres propriétés intéressantes de cette surconjonction non idempotente. Pareillement, l'introduction du théorème A194/4 était nécessaire pour passer de l'axiome A24 à A194/5. Cette fugitive apparition de l'infinitésimalement vrai demeurera isolée pour l'instant, et nous ne retrouverons la constante 'à' que beaucoup plus tard; elle sera étudiée en détail au Chapitre I4. Le rôle absolument privilégié que cette constante joue dans l'énonomie de tout le système <u>A</u> sera constaté surtout dans la Section III de ce même Livre I, où nous étudierons la théorie des ensembles <u>Am</u>.

Un avertissement avant d'aborder le Chapitre suivant: comme toutes les formules valides de <u>As</u> en '+', le théorème A194/5 nous permet d'affirmer que pour des formules quelconques p, q, etc., une certaine formule disjonctive où ces autres formules sont des sous-formules est valide; mais il ne nous autorise pas à croire que, soit le membre de droite est vrai <u>simpliciter</u>, soit le membre de gauche est <u>simpliciter</u> vrai. Il se peut que ni "pDq" ni "qDp" ne soient assertables (i.e. ne soient foncièrement vrais), pour certains choix de p et q.

Chapitre 6.- BICONDITIONNEL

L'essentiel de ce chapitre est consacré à des formules valides en '='. En même temps, nous introduirons un certain nombre de théorèmes qui prépareront le Chapitre 7, sur le tout à fait vrai et le tout à fait faux. Le trait marquant = du biconditionnel '=' c'est qu'il est le plus faible des conditionnels réciproques possédant la propriété du MP mutuel. = Ainsi, p.ex., un biconditionnel '$' défini ainsi: /p$q/ eq = /pZq..qZp/ n'aurait la propriété du MP dans aucun sens, = tandis qu'un autre défini comme "pCq..qZp" n'aurait pas la propriété du MP de droite à gauche. Autrement dit : "p=q" est peu ou prou vrai ssi, ou bien p est tant soit peu vrai et q = est aussi tant soit peu vrai, ou bien p est tout à fait faux= et q est tout à fait faux également.. Mais ceci est valide = pour chaque égard du réel; bien entendu, il n'en découle point vrai ssi p et q sont vrais tous les deux à tous les égards, = ou bien ils sont tout à fait faux tous les deux à tous les = égards; ceci est le cas pour le biconditionnel strict 'p≡q',= que nous n'étudierons qu'au chapitre 20.

A197 pCq=.FqCFp

Preuve :

(2)	pCqC.FqCFp	A133
(3)	FqCFpC.FFpCFFq	id
	C.FFFp+FFq	df 7
	C.Fp+FFq	A157/2
	C.pCFFq	df 7
	C.pCLq	A157
	C.pCq	A170, A132/2
(4)	2.3	(2), (3), rinf 8
	A197	(4), df 11

A198 p=qI.q=p

Preuve :	p=qI.p=q	A101
	I.pCq..qCp	df 11
	I.qCp..pCq	A9
	I.q=p	df 11

A199 p=qC.q=rC.p=r

Preuve :

(2)	pCqC.qCrC.pCr	A125
(3)	qCpC.rCqC.rCp	A118
(4)	2C.3C./p=qC.dext2.dext3	A185, df 11
(5)	dext2.dext3C.q rC.p=r	A185, A129, df 11
	A199	(4), (5)

A200 p=p (Preuve: A103, A7)

A201 H(Fp+Lp)

Preuve :

(2)	FFp+Fp	A103, df 7
(3)	Fp+Lp	A104, A157, (2)
(4)	Fp+HLp	(3), A146
(5)	HFp+HLp	(4), A145/2
	A201	(5), A160

A202 HpC.pIl

Preuve :

(2)	FNpC.NpIO	A16
	C.pIl	A191/2, A21, df 18
	A202	(2), df 5

A202/2 Hp=.pIl (Preuve : A202, Sch 1, A135, A20, rinf9, df11 /rinf 8

A202/3 Fp=.pIO (Preuve : A202/2, A142, A191/2, df 18)

A202/4 Hp=.NpIO (Preuve : A202/2, A191/2, df 18, A21)

A202/5 Fp=.NpIl (Preuve similaire)

A202/6a HlIl

Preuve :

(2)	HHl	A135, A145
	2C.7HlIl	A202

A202/6b LlIl (Preuve : A178/2, A171, A146, A202)

A202/7 FlIO (Preuve : A202/6b, A191/2, A135/2, A138

(Les preuves de A202/8, A202/9a et A202/9b sont similaires)

A202/10 HpC.HpIp

Preuve :

(2)	HHpC.HpIl	A202
(3)	HpC.HpIl	(2), A145
(4)	HpC.pIl	A202
	HpC.HpIl..pIl	(3), (4), A131/3
	C.HpIp	A189/3

A203 Fp+LpIl (Preuve : A201, A202)

A204 Fp+Lp+qIl (Preuve : A203, A110/2, A104)

A205 Fp+Lp+q.rIr (Preuve : A204, A111, A9)

A204/2 p=.p=l

Preuve :

(2)	pC.lCp	A127
(3)	pC.pCl	A178/2, A127
(4)	pC.pCl..lCp	(3), (2), rinf 8, A131/2
(5)	pC.p=l	df 11, (4)
(6)	p=lCp	df 11, A115, A121, rinf 9
	A204/2	(5), (6), rinf 8, df 11

A206 p=qC.p.r=.q.r

Preuve :

(2)	pCqC.p.rCq	A125/2, A9
(3)	p.rCr	A115
(4)	dext2.3I.p.rC.q.r	A131/2
(5)	dext2.3C.p.rC.q.r	(4), A20
(6)	3C.7dext2C.p.rC.q.r	A9, A129
(7)	pCqC.p.rC.q.r	(2), (6)
(8)	qCpC.q.rC.p.r	pareillement
	7C.8C.7p=qC.p.r=.q.r	A185, df 11

A207 p=qC.p+r=.q+r

Preuve :

(2)	pCqC.p+rC.q+r	A169, A129, A104
(3)	qCpC.q+rC.p+r	pareillem.
	2C.3C.7p=qC.p+r=.q+r	A185, df 11

A207/2 p=qC.rCp=.rCq (Preuve : A207, df 7, A104)

A208 p=qC.q=r=.p=r

Preuve :

(2)	p=qC.q=rC.p=r	A199
(3)	q=pC.p=rC.q=r	id
	A208	(2), (3), A198, A131/3

A208/2 p=q.(p'=q')C.p.p'=q.q'

Preuve :

(2)	pCq.(p'Cq')C.p.p'C.q.q'	A185, A129
(3)	qCp.(q'Cp')C.q.q'C.p.p'	id

```
(4)2C.3C.7sin2.sin3C.dext2.dext3          A185
   A208/2                                 (4), A9, A10, df 11
```

A208/3 p=q.(p'=q')C.p.p'.r=.q.q'.r (Preuve: A208/2, A206)

A208/4 p=q.(p'=q')C.p.p'+r=.q.q'+r (Preuve: A208/2, A207)

A208/5 p=q.(p'=q')C.p+p'=.q+q' (Preuve semblable à celle = de A208/2, en utilisant A194, au lieu de A185)

A208/6 p.Lq=.Lp.q (Preuve : A208/2, A172)

A208/7 p+Lq=.Lp+q (Preuve similaire)

A209 F(Fp.Lp) Preuve : A104, A9, A156)

A209/2 F(Fp.Hp)

Preuve :

```
(2)  Fp.HpI.HFp.Hp              A145/2
         IH(Fp.p)               A162
         IH(p.Fp)               A9
         IHO                    A109/3
         IO                     A202/9a
     A209/2                     (2), A134
```

A210 Fp.LpIO (Preuve : A209, A202/3, rinf 11a)

A211 Fp.Lp.qIO (Preuve : A210, A110, A9)

A212 Fp.Lp.q+rIr (Preuve : A110/3, A211, A104)

A212/2 p=q=.pCq..FpCFq

Preuve :

```
(2)  pCq.(FpCFq)I.Fp+q..FFp+Fq                 A101, df 7
                I.Fp+q..Lp+Fq                  A157
                I.Fp+q.Lp+.Fp+q.Fq             A15
                I.Fp.Lp+.q.Lp+.Fp.Fq+.q.Fq     A9, A15
                I.q.Lp+.Fp.Fq+.q.Fq            A212,  A7
                I.q.Lp+.Fp.Fq                  A110/3, df 1
(3)  q.Lp=.p.q                                 A172,A206, A9
(4)  q.Lp+(Fp.Fq)=.p.q+.Fp.Fq                  (3), A207
                 =.p=q                         A187, A18
     A212/2                                    (4), (2), A198
```

A213 p=q.(q=r)C.p=r (Preuve : A199, A129)

A214 F(p=q).F(q=r)C.p=r

Preuve :

```
(2)  F(p=q).F(q=r)I.F(Fp+q..Fq+p).F(Fq+r..Fr+q) A101,df7,df11
(3)  dext2I.FFp.Fq+(FFq.Fp)..FFq.Fr+.FFr.Fq      A17, A18
(4)  dext3I.FFp+(FFq.Fp).(Fq+(FFq.Fp))..FFq+(FFr.Fq)..Fr+FFr.Fq
                                                 A104, A109
(5)  dext4I.FFp+FFq.((FFp+Fp)..(Fq+FFq)..Fq+Fp)..FFq+FFr..
     FFq+Fq..Fr+FFr..Fr+Fq                       A109, A10
(6)  dext5I.Lp+Lq..Fp+Fq..Lq+Lr..Fr+Fq           A157,A104,A205
(7)  dext6I.Lp.Lr.Fq+.Lq..Fp.Fr A15, A9, A212, A10/ rinf7bis
(8)  sin2Cdext7                 (2), (3), (4),(5),(6),7),A20,
(9)  sindext7C.Lp.Lr            A22
             CL(p.r)            A161
             C.p.r              A170
(10) dextdext7C.Fp.Fr           A115
(11) sin2C.p.r+.Fp.Fr           (8),(9),(10),A94,A129,A125
         C.p.r+F(p+q)           A18
     A214                       (11), A187
```

A215 p=q=(q=r)C.p=r

Preuve :

(2) p=q=(q=r)I.p=q.(q=r)+.F(p=q).F(q=r)   A187, A18
(3) sin2Cdext2   (2), A20
(4) sindext2C.p=r   A213
(5) dextdext2C.p=r   A214
(6) 4.5C./dext2C.p=r   rinf8,A167,A123
A215   (3), (6), rinf 9

A216 p=q=(q=r)=.p=r (Preuve : A208,A215,A198,rinf8, df11)

A217 p=q=r=.p=.q=r
Preuve :
(2) p=q=rI.F(Fp+q..Fq+p)+r..Fr+.Fp+q..Fq+p   A101,df11,df7
I.F(Fp+q).F(Fq+r)+r..Fr+.Fp+q..Fq+p   A17
I.FFp.Fq+(FFq.Fp)+r..Fr+Fp+q..Fr+Fq+p   A18, A109
I.Lp.Fq+(Lq.Fp)+r..Fr+Fp+q..Fr+Fq+p   A157, A10 /laire
(3) p=(q=r)I.Lq+Lr+p.(Fq+Fp+r).(Fr+Fp+q)..Fr+Fq+p   preuve simi
(4) Lp+Lq+r=.Lq+Lp+r   A208/7,A207
(5) 4C./dext2=dext3   A206
A217   (5), (2),(3)

A218 pIqC.p=q
Preuve :
(2) pIqC.pCq   A20
(3) pIqC.qIp   A123/2
C.qCp   A20
2C.3C./A218   A131/3, df 11

A219 Fp=q=.p=Fq
Preuve :
(2) FpCqC.FqCLp   A133, A157
(3) qCFpC.LpCFq   id
(4) 2C.3C./Fp=qC.Fq=Lp   A185
C.Lp=Fq   A198
(5) p=FqC.Lq=Fp   similairem.
C.Fp=Lq   A198
(6) p=Lp   A172
(7) q=Lq   id
(8) 6C./dext4=.p=Fq   A199, A198
(9) 7C./dext5=.Fp=q   id
(10) dext4C.p=Fq   (8), rinf 11a
(11) dext5C.Fp=q   (9), rinf 11a
(12) Fp=qC.p=Fq   (4), (10), rinf 9
(13) p=FqC.Fp=q   (5), (11), rinf 9
A219   (12), (13), rinf 8, df 11

A219/2 Lp=F(pIO) (Preuve : A202/3, A219, A157)

A219/3 -p=F(pI1) (Preuve : A219/2,A140,A191/2,df 18, A21)

A219/4 Sp=.F(pIO).F(pI1) (Preuve : df14,a172,A161,A140, A219/2, A219/3, A208/2)

A220 p=q=.Fp=Fq (Preuve : simialire)

A220/2 p=qC.pCr=.qCr (Preuve : A220, A207, df 7,rinf11a,rinf9)

A220/3 Hq+FqC.pCq=.pDq
Preuve :
(2) qI1C.pDq   A111, rinf 16
(3) qI1C.Fp+q   A104, A178/2, A116,rinf 16
c.pCq   df 7
(4) dext3.dext2C.dext3.dext2+F(dext3+dext2)   A116
(5) qI1C.pCq=.pDq   (3), (4), rinf 9, A187
(6) Hq=.qI1   A202/2
(7) HqCdext5   A220/2
(8) FqC.qIO   A16

(9)	qIOC.Fp+qIFp	A110/3, rinf16
	C.Fp+q=Fp	A128
	C.Fp+q=.pIO	rinf9, A202/3, A199, A198
(10)	qIOC.OI.p.q	A110, rinf 16
(11)	OI(p.q).(pI.p.q)C.OIp	A189/3
(12)	OI(p.q)C.(pI.p.q)C.OIp	(11), A129
(13)	qIOC.pI(p.q)C.OIp	(10), (12), rinf 9
(14)	qIOC.pIOC.pI.p.q	A189/3, A189/4, A129, rinf 9
(15)	qIOC.pIO=.pI p.q	(13),(14),A196,A131/3,df11
(16)	qIOC.Fp+q=.pI.p.q	(9),(15),A131/3,a199,A129
(17)	Fq=.qIO	A202/3 / df11
(18)	FqC.pCq=.pDq	rinf12a,(16),(17),A120/2,df7,
	7.18C.7A220/3	A167, A123

A220/4 FSqC.pCq=.pDq

Preuve : (2)	Fq+HqI.Fq+FNq	A101, df 5
	IF(q.Nq)	A17
	IFSq	df 14
	2C.A220/3I.7A220/4	Sch 1

A220/5 pCq=.pDLq

Preuve :

(2)	pCqC.pCLq	A171, A118
(3)	HLq+FLq	A146, A103, df 7, A104
(4)	3C.7pC qC.pDLq	A220/3, rinf 11a
(5)	pDLqC.pCLq	A126/2
(6)	pDLqC.pCq	(5), A170, A132/2
	A220/5	(4), (6), rinf 8, df 11

A221 p.qC.LpILq

Preuve :

(2)	p.qCp	A22
(3)	pC.LpI1	A137
(4)	p.qC.LpI1	(2), (3), rinf 9
(5)	p.qC.LqI1	similairem. (par A115)
(6)	4C.5C.7p.qC.LpI1..LqI1	A131/3
(7)	dext6C.LpILq	A189/3
	A221	(6), (7), rinf 9

A222 Fp.FqC.LpILq

Preuve :	Fp.FqC.LFpILFq	A221
	C.FpILFq	A156/2
	C.FpIFq	id

A222/2 p=(q.r).(rCFp)C.rCFq

Preuve :

(2)	p=(q.r).(rCFp)I.Fp+(q.r).(Fq+Fr+p)..Fr+Fp	A101,df11,df17 A17
(3)	Fp+(q.r)C.Fq+Fr+ Fp	A133, df 7, A17
(4)	dext2C.dext3..Fq+Fr+p	(3), A125/2, A103, A185,A9,A10
(5)	dext4I.Fq.Fr+.p.Fp	A109
	I.Fq+Fr+O	A109/3
	I.Fq+Fr	A110/3
	I.rCFq	A104, df 7
	A222/2	(2), (4), (5)

A223 p=qC.LpILq

Preuve :

(2)	p=qI.p.q+.Fp.Fq	A187, A18
(3)	A221C.A222C.7dext2C.LpILq	A186
	A223	(2), (3)

A224 pCq=.Fq+.p.q

Preuve :

(2)	pCpC.pCqC.pCp..pCq	A117
(3)	pCqC.pCp..pCq	(2), A103
(4)	pCp.(pCq)C.pCq	A115
(5)	pCq=.pCp..pCq	(4), (3), rinf 8, df 11
(6)	dext5I.Fp+p..Fp+q	A101, rinf 3, df 7
	I.Fp+.p.q	A109, rinf 3, A196
	A224	(5), (6)

A225 Fp+(p.q)I.p=.p.q

Preuve :

(2)	p=(p.q)I.(p..p.q)+F(p+.p.q)	A187
	I.(p.p.q)+F(p+.p.q)	A10
	I.p.q+Fp	A7, A8
	I.Fp+.p.q	A104
	A225	(2), A196

A226 pCq=.p=.p.q

Preuve :

(2)	pCq=.Fp+.p.q	A224
(3)	Fp+(p.q)=.p=.p.q	A225, A218
	A226	(2), (3), rinf 14

A226/2 pC.pCqC.p=q

Preuve :

(2)	Fp+Lp+(p.q)+.Fp.Fq	A203, A178/2
(3)	Fp+Fq+p+.Fp.Fq	id + A104
(4)	Fp+Fq+q+.Fp.Fq	id
(5)	2..3.4	rinf 8
	A226/2	(5), A109, A18, df 7, A187

A227 p=q=.p=(p.q)..q=.p.q

Preuve :

(2)	pCqC(p=.p.q)..p=(p.q)C.pCq	A226, df 11
(3)	qCpC(q=.p.q)..q=(p.q)C.qCp	id + A9
(4)	sin2	(2), A22
(5)	dext2	(2), A115
(6)	sin3	(3), A22
(7)	dext3	(3), A115
(8)	4C.6C./p=qC.p=(p.q)..q=.p.q	A185, df 11
(9)	5C.7C./dext8C.p=q	id
	A227	(8), (9), rinf8,df11

A227/2 pCqC.pCr=.pC.q.r

Preuve :

(2)	pCqC.pCrC.pC.q.r	A131/3
(3)	pCqC.pC(q.r)C.pCr	A122, A127
(4)	pCqC.pCrC(pC.q.r)..pC(q.r)C.pCr	(2), (3), A131/3
	A227	(4), df 11

A227/3 qCrC.pCq=.pC.q.r (Preuve similaire)

A228 LpIO+.LpI1

Preuve :

(2)	NLp+Lp	A180
(3)	LpC.LLpI1	A137
(4)	FLpC.LpIO	A16
(5)	NLpC.LpIO	(4), A156/3
(6)	LpC.LpI1	(3), A148
	2.5.6C./A228	rinf 8, A194

A229 HpIO+.HpI1 (Preuve : A228, A147)

A229/2 HpC.HpIl
Preuve :

(2)	HpIO+.HpIl	A229 / rinf 8
(3)	FHp+.HpIl	(2), A202/3, rinf 11b, A169, A104,
	A229/2	(3), df 7

A229/3 LpC.LpIl (Preuve similaire)

A229/4 pCLqC.pI.p.Lq
Preuve :

(2)	FpC.pIO	A16
(3)	pIOC.pI.p.Lq	A110, rinf 16
(4)	LqC.LqIl	A229/3
(5)	LqIlC.pI.p.Lq	A111, rinf 16
(6)	FpC.pI.p.Lq	(2), (3), rinf 9
(7)	LqC.pI.p.Lq	(4), (5), rinf 9
	6.7C./A229/4	A167, A123, df 7

A232 HpIL(pIl) (Preuve : A223, A202/2, A147)

A233 FpIL(pIO) (Preuve similaire, en utilisant A202/3 et A145, au lieu de A202/2 et A147)

A233/2 FSFp
Preuve :

(2)	FFpINFp	A19
(3)	SFpI.Fp.FFp	A101, df 14, (2)
(4)	FFp+Fp	A103, df 7
(5)	FFp+FFFp	(4), A157/2
(6)	F(Fp.FFp)	(5), A17)
	FSFp	(3), (6)

A234 F(p=q)I.Fq=Lp
Preuve :

F(p=q)I F(p.q+F(p+q))	A187
I.Fp+Fq..Lp+Lq	A17, A18, A157, A159
I.Fq.Lp+.Fp.Lq	A15, A9, A109, A210,
I.Fq.Lp+.FFq.FLp	A156, A157, A9 / A110/3
I.Fq.Lp+F(Fq+Lp)	A18
I.Fq=Lp	A187

A235 p=q=.p=Lq
Preuve :

(2)	q=LqC.p=q=.p=Lq	A199, A198
	dext2	(2), A172

A236 p=(q.r).(q=q'..r=r')C.p=.q'.r'
Preuve :

(2)	p=(q.r).(q=q').(r=r')C.pCq'	df 11, A22, A115, A125, A129, rinf9
(3)	sin2C.pCr'	similairem.
(4)	2.3C./sin2C.pC.q'.r'	rinf8, A129, A131/3 / rinf 9
(5)	sin2C.q'.r'Cp	df11, A22, A115, A129, A125, A185/2,
	4C.5C./A236	A131/3, df 11

A236/2 p=(q+r).(q=q'..r=r')C.p=.q'+r'
Preuve :

(2)	q+rCpI.qCp..rCp	A120/2
(3)	pC(q+r)I.pCq+.pCr	A114/2
(4)	pCqC.qCq'C.pCq'	A125
(5)	pCrC.rCr'C.pCr'	id
(6)	dext4C.q=q'C.pCq'	A125/2, df 11
(7)	dext5C.r=r'C.pCr'	id
(8)	sin4Cdext6	(4), (6), rinf 9
(9)	sin5Cdext7	(5), (7), rinf 9
(10)	8C.9C./pCq+(pCr)C.dext6+dext7	A193, A129, A9

(11)	pC(q+r)C.dext6+dext7	(10), (3)
(12)	q'+r'CpI.q'Cp..r'Cp	A120/2
(13)	pC(q'+r')I.pCq'+.pCr'	A114/2, rinf 3
(14)	q'CqC.qCpC.q'Cp	A125
(15)	r'CrC.rCpC.r'Cp	A125 / (14),(15),A125
	A236/2	df 11, A129,(11),(13),(12),

A236/3 pC.q=(p.r)=.q=r
Preuve :

(2)	p=1C.p.r=.1.r	A206
	C.q=(p.r)=.q=.1.r	A208, A198
	=r	A111
	A236/3	(2),A125,A204/4,A220/2, rinf12a

A237 pIq=(p'Ip"..q'Iq")C.pIqI.p'Ip"..q'Iq"
Preuve :

(2)	pIq.(p'Ip"..q'Iq")C.pIqI(p'Ip")..pIqI.q'Iq"	A22,A115,A23, A131/3, rinf 9
(3)	F(pIq).F(p'I "..q'Iq")C.pIqIO..p'Ip".(q'Iq")IO	A22,A115, A16,A131/3,rinf9
(4)	dext3C.pIqI.p'Ip"..q'Iq"	A189/3
(5)	sin3Cdext4	(3), (4), rinf 9
(6)	dext2C.pIqI?p'Ip".q'Iq"	A189/5
(7)	sin2Cdext6	(2), (6), rinf 9
(8)	7C.5C./sin2+sin3Cdext6	A186
	A237	(8), A18, A187

A237/2 pIqC(p'Iq')C.pIqD.p'Iq'
Preuve :

(2)	pIq=(pIq..p'Iq')C.pIqI.pIq..p'Iq'	A237
(3)	pIqC(p'Iq')Csin2	A226,rinf11a
(4)	sin3Cdext2	(2), (3),rinf 9
	A237/2	(4), df 10

A237/3 p+qIpD.Lp+qILp
Preuve :

(2)	qDpC.qCp	A126/2
(3)	qCpC.qDLp	A220/5, rinf 11a
(4)	qDpC.qDLp	(2), (3), rinf 9
(5)	pI(p+q)C.LpI.Lp+q	(4), A192, A104
(6)	p+qIpC.Lp+qILp	(5), A196
	A237/3	(6), A237/2

Chapitre 7.- LE TOUT A FAIT VRAI ET LE TOUT A FAIT FAUX

Les constantes définies '0' et '1' ont déjà fait == l'objet d'étude tout au long des chapitres précédents. Il faut néanmoins les soumettre à une considération plus atten-- tive et minutieuse. Mais nous étudierons aussi dans ce cha-- pitre certaines propriétés d'une autre constante définie : le pareillement vrai et faux (ou le point déquidistante entre le -tout à fait_ vrai et le -tout à fait- faux), c-à-d '$\frac{1}{2}$'; les= théorèmes démontrés ici à propos de '$\frac{1}{2}$' seront utilisés par = la suite, notamment dans les chapitres 9 et 10 et, encore plus au chapitre 11.

A238 p.qI1=.pI1..qI1
Preuve :

(2)	p.qI1=H(p.q)	A202/3, A198
(3)	p.qI1=.Hp.Hq	(2), A162
(4)	Hp=.pI1	A202/2

(5) Hq=.qI1 A202/2
(6) p.qI1=.pI1..qI1 (3), (4), (5), A236

A238/2 p.qI1I.pI1..qI1 (Preuve : A237, A238)

A238/3 p+qICI.pIO..qIO (Preuve : A238/2,df18,df2,A106,A191/2)

A239 p.qIO=.pIO+.qIO
Preuve :
(2) p.qIO=F(p.q) A202/3
=.Fp+Fq A17
(3) Fp=.pIO A202/3
(4) Fq=.qIO id
A239 A236/2,(2),(3),(4)

A240 F(1CO)
Preuve :
(2) 1COC.FOCF1 A133
(3) A134C.71COCF1 (2), A123
(4) FF1 A178/4, A157
(5) F(1CO) (3), (4), rinf 9 bis

A241 F(1IO) (Preuve : A240, A20, rinf 9 bis)

A242 1IOIO (preuve : A241, A202/3, rinf 12a)

A242/2 F(pIq)C.qIrCF(pIr)
Preuve :
(2) qIrC.F(pIq)IF(pIr) Sch 1
C.F(pIq)CF(pIr) A20
A242/2 (2), A124

A243 p'IqI(pIp)+.p'IqI.1IO
Preuve :
(2) A101C.7p'IqC.p'IqI.pIp A23, A129
(3) p'Iq+F(p'Iq) A103, df 7, A104
(4) F(p'Iq)C.p'IqIO A16
C.p'IqI.1IO A242
A243 A194, rinf 8, (3), (2), (4)

A244 pIqI½+.pIqIO (Preuve : A243,df17,df7,A202/3,rinf18)

A244/2 pIqD.pIqI½
Preuve :
(2) pIqIO+.pIqI½ A244, A104
(3) pIqIO=F(pIq) A202/3, A198
(4) 2=.7F(pIq)+.pIqI½ A207, (3)
pIqC.pIqI½ (4), rinf 12a, df 17
A244/2 (5), A237/2

A245 LpILq=.p=q
Preuve :
(2) p=qC.LpILq A223
(3) LpILqC.Lp=Lq A218
C.p=q A172, rinf 18
A245 (3), (2), rinf 8, df 11

A245/2 LpDLq=.pCq
Preuve :
(2) LpIL(p.q)=.p=.p.q A245
(3) LpI(Lp.Lq)=.p=.p.q (2), A161
=.pCq A226, rinf 18
A245/2 (3), df 10

Comme on a pu le constater, dans les dernières preuves nous nous servons de plus en plus de la rinf 18 (ou, al ternativement, des rinf 11a, 11b, 12a, 12b) et construisons, = grâce à ces règles, des chaînes déductives abrégées similaires -pour des contextes restreints, bien entendu- à celles, aux-- quelles nous sommes déjà habitués, construites au moyen de = 'I' et 'C'.

A246 pI(p.q)+.pI.p+q (Preuve : A194/5, A192, df 10)

A247 pIqC.qIq'+(qIq")C.pIq'+.pIq"
Preuve :
(2) pIq.(qIq')C.pIq' A189/2, A196
(3) pIq.(qIq")C.pIq" id
(4) pIq.(qIq'+qIq")I.sin2+sin3 A15
(5) 2.3C./sin2+sin3C.pIq'+.pIq" A194, A129, A123
A247 (4), (5), A129

Ce théorème est apparenté à A169/3. Le pendant de A247 est aussi un théorème, à savoir :

A248 pIqC.qIq'.(qIq")C.pIq'..pIq" (Preuve : Schl,A189/2, = A196, A131/4)

A249 pIq+(p'Iq')I½+.pIq+(p'Iq')IO
Preuve :
(2) pIq+(p'Iq')I(pIq)+.pIq+(p'Iq')I.p'Iq' A195
(3) sin2C.pIqI½+.pIqIOC.sinsin2I½+.sinsin2IO A247
(4) A244C./sin2C.sinsin2I½+.sinsin2IO (3), A123
(5) dext2C.sindext2I½+.sindext2IO similairem.
2.4.5C./A249 A194

A250 pIq.(p'Iq')I½+.pIq.(p'Iq')IO
(Preuve similaire, en utilisant A194/5, au lieu de A195)

Nous démontrerons maintenant certains théorèmes en = 'C', '=' et 'Z' qui n'ont pas été démontrés jusqu'ici et dont certains seront très utiles pour éviter un allongement exces- sif de certaines preuves ultérieures.

A251 p+qC.FpCq
Preuve :
(2) pCLp A171
(3) qCq A103
(4) p+q.(2.3)C.Lp+q A194, rinf 8
(5) 2.3C./p+qC.Lp+q (4), A129, A123
C.FFp+q A157
C.FpCq df 7

A251/2 FqC.pCqCFp (Preuve : A133, A123)

A251/3 p+qC.rCFpC.rCq (Preuve : A127,A118,A131,rinf9,A251)

A251/4 p.Fq=F(pCq)
Preuve :
(2) p=Lp A172
(3) p.Fq=.Lp.Fq (2), rinf 18
=.FFp.Fq A157
=F(Fp+q) A18
=F(pCq) df 7

A251/5 p.FqDF(pCq) (Preuve: A251/4,rinf11a,A233/2,A220/4, rinf12a)

A251/6 p.FqDF(pIq) (Preuve similaire, +A20, A133)

A252 HpC.pZqCq
Preuve :
(2) pZqC.FNpCq A251, df 3, A21
C.HpCq df 5
A252 (2), A123

ternativement, des rinf 11a, 11b, 12a, 12b) et construisons, ≡ grâce à ces règles, des chaînes déductives abrégées similaires -pour des contextes restreints, bien entendu- à celles, aux- quelles nous sommes déjà habitués, construites au moyen de ≡ 'I' et 'C':

A246 pI(p:q)+:pI:p+q (Preuve : A194/5, A192, df 10)

A247 pIqC:qIq'+(qIq")C:pIq'+:pIq"
Preuve :

(2)	pIq:(qIq')C:pIq'	A189/2, A196
(3)	pIq:(qIq")C:pIq"	id
(4)	pIq:(qIq'+qIq")I:sin2+sin3	A15
(5)	2:3C.7sin2+sin3C:pIq'+:pIq"	A194, A129, A123
	A247	(4), (5), A129

Ce théorème est apparenté à A169/3. Le pendant de A247 est aussi un théorème, à savoir :

A248 pIqC:qIq':(qIq")C:pIq'::pIq" (Preuve : Schl, A189/2, ≡ A196, A131/4)

A249 pIq+(p'Iq')I½+:pIq+(p'Iq')I0
Preuve :

(2)	pIq+(p'Iq')I(pIq)+:pIq+(p'Iq')I:p'Iq'	A195
(3)	sin2C:pIqI½+:pIqI0C:sinsin2I½+:sinsin2I0	A247
(4)	A244C.7sin2C:sinsin2I½+:sinsin2I0	(3), A123
(5)	dext2C:sindext2I½+:sindext2I0	similairem:
	2:4:5C.7A249	A194

A250 pIq:(p'Iq')I½+:pIq:(p'Iq')I0
(Preuve similaire, en utilisant A194/5, au lieu de A195)

Nous démontrerons maintenant certains théorèmes en ≡ 'C', '≡' et 'Z' qui n'ont pas été démontrés jusqu'ici et dont certains seront très utiles pour éviter un allongement exces- sif de certaines preuves ultérieures:

A251 p+qC:FpCq
Preuve :

(2)	pCLp	A171
(3)	qCq	A103
(4)	p+q:(2:3)C:Lp+q	A194, rinf 8
(5)	2:3C.7p+qC.Lp+q	(4), A129, A123
	C:FFp+q	A157
	C:FpCq	df 7

A251/2 FqC:pCqCFp (Preuve : A133, A123)

A251/3 p+qC:rCFpC:rCq (Preuve : A127, A118, A131, rinf9, A251)

A251/4 p:Fq≡F(pCq)
Preuve :

(2)	p≡Lp	A172
(3)	p:Fq≡:Lp:Fq	(2), rinf 18
	≡:FFp:Fq	A157
	≡F(Fp+q)	A18
	≡F(pCq)	df 7

A251/5 p:FqDF(pCq) (Preuve: A251/4, rinf11a, A233/2, A220/4, rinf12a)

A251/6 p:FqDF(pIq) (Preuve similaire, +A20, A133)

A252 HpC:pZqCq
Preuve :

(2)	pZqC:FNpCq	A251, df 3, A21
	C:HpCq	df 5
	A252	(2), A123

A252/2 p=(q+r)I.p=q.(rCp)+.p=r..qCp
Preuve : p=(q+r)I.pC(q+r)..q+rCp   A101, df 11
I.pCq+(pCr)..qCp..rCp   A114/2,A120/2
I.pCq.(qCp..rCp)+.pCr..qCp..rCp   A15
I.p=q.(rCp)+.p=r..qCp   A15,A104, A107

A252/3 pCqC(qCpCq)=.qCpC.pCqCp
Preuve :
(2) pC.pCqCq   A121
(3) pCqCpC.pCqC.pCqCq   (2), A118
(4) qCpC(pCqCp)C.qCpC.pCqC.pCqCq   (3), A118
(5) qCpC(pCqCp)C.qCpC.pCqCq   A119, (4)
C.pCqC.qCpCq   A123
(6) pCqC(qCpCq)C.qCpC.pCqCp   pareillement
A252/3   (6),(5),rinf8, dfll

A253 pI0+(pI½).(qI0+.qI½).(p=q)C.pIq
Preuve :
(2) p.qCp   A22
(3) pCFFp   A171, A157
(4) pCF(pI0)   (3),A202/3,rinfllb,rinf 9bis
(5) F(pI0)C.pI0+(pI½)C.pI½   A251, A123
(6) p.qCdext5   (2), (4), (5), rinf 9
(7) pI0+(pI½)C.p.qC.pI½   (6), A123
(8) qI0+(qI½)C.p.qC.qI½   similairem. (+ A9)
(9) Fp.FqCFp   A22
(10) FpC.pI0   A16
(11) Fp.FqC.pI0   (9), (10)
(12) 11C./pI0+(pI½)C.Fp.FqC.pI0   A127
(13) qI0+(qI½)C.Fp.FqC.qI0   similairem.
(14) sin7.sin8C.p.qC(pI½)..p.qC.qI½   A185,(7),(8)
C.p.qC.pI½..qI½   A131/2
C.p.qC.pIq   A189/3
(15) sin12.sin13C.Fp.FqC.pIq   similairem.
(16) sin7.sin8C.dext14.dext15   rinf8,(14),(15), A131/3
C.p.q+(Fp.Fq)C.pIq   A120/2
C.p.q+F(p+q)C.pIq   A18
C.p=qC.pIq   (15), A129
A253

A254 pI0+(pI1).(qI0+.qI1).(p=q)C.pIq (Preuve similaire)

A255 p.qI0I.pI0+.qI0
Preuve :
(2) p.qI0I0+.p.qI0I½   A244, A104
(3) pI0+(qI0I½+.pI0+(qI0)I0   A249
2.3.A239C./A255   A253, A104

A256 p+qI1I.pI1+.qI1 (Preuve : A255,df2,df18,A21,A191/2)

A257 pI1D.p+qI1 (Preuve : A256, A20,A120/2,A22, A237/2)

A258 pI0+(pI1).(qI0+.qI1)C.p.qI0+.p.qI1
Preuve :
(2) pI0C.p.qI0   A255, A116, A20, rinf 9
(3) qI0C.p.qI0   similairem.
(4) pI1.(qI1)C.p.qI1   A238/2, rinf 12b
(5) pI0+(pI1).(qI0+.qI1)I.pI0.(qI0)+.pI0.(qI1)+.pI1.(qI0)+.
pI1..qI1   A104, A107, A109
(6) pI0.(qI0)C.pI0   A22
C.p.qI0   (2)
(7) pI0.(qI1)C.pI0   A22
C.p.qI0   (2)
(8) pI1.(qI0)C.qI0   A115
C.p.qI0   (3)

(9) sinsindext5C.p.qIO A120/2, (6), (7), rinf 8
(10) sindext5C.p.qIO A120/2, (9), (8), rinf 8
(11) dext5C.p.qIO+.p.qI1 A194, rinf 8, (4), (10), A129
A258 (11), (15)

A260 pIO+(pI½).(qIO+.qI½)C.p.qIO+.p.qI½
Preuve :
(2) pIO+(pI½).(qIO+.qI½)I.pIO.(qIO)+(pIO..qI½)+(pI½..qIO)+.
pI½..qI½ A104, A107, A109
(3) sindext2C.p.qIO cf.lignes 610 de la preuve de**A258**
(4) pI½.(qI½)C.½I.p.q A189/5, A196
(5) dext2C.p.qIO+.p.qI½ (3), (4), A129, A194,rinf8
A260 (5), (2)

A261 pIO+(pI½)+(qIO+.qI½)C.p+qIO+.p+qI½
(Preuve similaire, en utilisant A9 au lieu de A104, A10, au = lieu de A107, etc., et A195/2 au lieu de A189/5)

Chapitre 8.- CONJONCTION FAIBLE ET DISJONCTION FORTE

La conjonction faible '&' et la disjonction forte = 'V' se trouvent reliées au conditionnel fort 'C' par des rela tions semblables à celles qui attachent la conjonction ordi-- naire ou simple '.' et la disjonction simple '+' au condition el faible 'Z', à savoir :

"N(pCNq)" = "p&q" = "N(NpVNq)"
"NpCq" = "pVq" = "N(Np&Nq)"

Les lois de distributivité cependant subissent des = restrictions, et la commutativité est complètement perdue pour la disjonction forte (elle se conserve pour la conjonction = faible seulement sous une forme atténuée). Nous commençons = ce Chapitre en prouvant un théorème qu'il ne faut pas confon dre avec A133.

A262 pCqD.FpCFq
Preuve :
(2) pCqI.Fp+q A101, df 7
(3) Fp+qDL(Fp+q) A175
D.LFp+Lq A159
D.Fp+Lq A156/2
D.NFq+Fp df 4, A104
D.FFq+Fp A19
D.FqCFp df 7
A262 (2), (3)

A263 pZqI.NqZNp
Preuve : pZqI.Np+q A101, df 3, A106, A21
I.q+Np A104
I.NNq+Np A21
I.NqZNp df 3, A106

A264 pVqD.p+q
Preuve :
(2) pVqI.Hp+q A163
(3) HpI.p.Hp A178, df 10, A9
(4) pVqI.p.Hp+q (2), (3)
I.p+q..Hp+q A109
I.pVq..p+q A163, A9
A264 (4), df 10

A265 pCqD.pZq (Preuve : A264, df 3, df 8, A21)

A266 p.qD.p&q
Preuve : p.qI.p.q — A101
I.p.Lp.q — A175, df 10
I.p.q∴Lp.q — A7, A9, A10
I.p.q..p&q — A164

A267 p&q=.q&p
Preuve :
(2) Lp=p — A172, A198
(3) q=Lq — A172
(4) 2.3C.7Lp.q=.p.Lq — A208/2
A267 — (4), A9, A164

A266/2 p.q=.p&q (Preuve : A172, A206)

A266/3 p.q(-).p&q (Preuve : A266, A266/2, rinf11a, rinf8, df20)

A268 FpC.p&qIO
Preuve :
(2) FLp=.LpIO — A202/3
(3) Fp=.LpIO — (2), A156
(4) FpC.LpIO — (3), rinf 11a
(5) LpIOC.OI.q.Lp — A110, rinf 16
(6) FpC.OI.q.Lp — (4), (5), rinf 9
A268 — (6), A164, A196, A9

A268/2 O&pIO (Preuve : A268, A134)

A269 pC.p&qIq (Preuve : A137, A111, A9, rinf16, A164)

A270 p&qIO+.p&qIq (Preuve : A103, df7, A268, A269, A194)

A271 pCqIN(p&Nq) (Preuve : A165, A164)

A272 FpCH(pCq)
Preuve : FpC.p&NqIO — A268
C.N(p&Nq)I1 — Sch 1, df 18
CHN(p&Nq) — A202/2, rinf 18
CH(pCq) — A271

A273 pC.pCqIq
Preuve : pC.p&NqINq — A269
C.N(p&Nq)IN — Sch 1, A21
C.pCqIq — A271

A274 p&q&rI.p&.q&r
Preuve : p&q&rI.L(Lp.q).r — A164
I.LLp.Lq.r — A161
I.Lp.Lq.r — A148
I.Lp..Lq.r — A10
I.p&.Lq.r — A164
I.p&.q&r — A164

A275 pVqVrI.pV.qVr
Preuve : pVqVrI.H(Hp+q)+r — A163
I.Hp+Hq+r — A160, A145
I.Hp+.Hq+r — A107
I.pV.qVr — A163

A276 p&qCp (Preuve : A22, A170, A164, rinf 9)

A277 p&qCq (Preuve : A164, A115)

A278 pC.qVp
Preuve : (2) pC.Hq+p — A116, A104
A278 — (2), A163

A279 HpC.HpI1
Preuve :

(2)	HpIO+.HpI1	A229
(3)	HpIO=FHp	A202/3, A198
(4)	HpIOCFHp	(3), rinf 11a
(5)	HpCFFHp	A103, A157, A147
(6)	FFHpCF(HpIO)	A133, (4)
(7)	HpCF(HpIO	(5), (6), rinf 9
(8)	2C.7F(HpIO)C.HpI1	A251
	A279	(7), (8), rinf 9

A280 HpC.pVqI1
Preuve :

(2)	HpC.HpI1	A279
(3)	HpI1C.1I.Hp+q	A110/2, rinf 16, A104
(4)	HpC.Hp+qI1	(2), (3), rinf 9, A196
	C.pVqI1	A163

A280/2 1VpI1 (Preuve : A280, A135)

A281 -pC.pVqIq
Preuve :

(2)	-pIFFNp	A101, df 6, A19
	IFHp	df 5
(3)	FHp=.HpIO	A202/3
(4)	HpIOC.Hp+qIq	A110/3, rinf 16, A196, A104
(5)	-pCFHp	(2), A12
(6)	-pC.Hp+qIq	(3),(4),(5),rinf9, rinf 11a
	C.pVqIq	A163

A282 pVqI1+.pVqIq (Preuve : A103, df 7,A280,A281,A194,A140/2)

A283 pV(q&r)I.pVq&.pVr

Preuve :	pV(q&r)I.Hp+.Lq.r	A163, A164
	I.Hp+Lq..Hp+r	A104, A109
	I.LHp+Lq..Hp+r	A147
	I.L(Hp+q)..Hp+r	A159
	I.Hp+q&.Hp+r	A164
	I.pVq&.pVr	A163

A284 p&(qVr)I.p&qV.p&r

Preuve :	p&(qVr)I.Lp..Hq+r	A163, A164
	I.Lp.Hq+.Lp.r	A15
	I.HLp.Hq+.Lp.r	A146
	I.H(Lp.q)+.Lp.r	A162
	I.p&qV.p&r	A163, A164

A285 p=qC.p&rI.q&r
Preuve :

(2)	FpC.p&rIO	A268
(3)	FqC.q&rIO	id
(4)	Fp.FqC.p&rIO..q&rIO	(2), (3), A185
	C.p&rI.q&r	A189/3
(5)	pC.p&rIr	A269
(6)	qC.q&rIr	id
(7)	p.qC.p&rIr..q&rIr	(5), (6), A185
	C.p&rI.q&r	A189/3
(8)	4.7	(4), (7), rinf 8
	A285	(8), A167, A129, A187

A286 p=qC.r&p=.r&q
Preuve :

(2)	FrC.r&pIO	A268
(3)	FrC.r&qIO	id

```
(4)  FrC.r&pIO..r&qIO           A131/3, (2), (3), rinf 8
       C.r&pI.r&q                    A189/3
       C.r&p=.r&q                    A218
       C.p=qC.r&p=.r&q               A127/2
(5)  rC.r&pIp                        A269
(6)  rC.r&qIq                        id
(7)  rC.r&pIp..r&qIq                 A131/3, (5), (6)
(8)  r&pIpC.p=qC.r&p=q               Sch 1, A20, rinf 9
(9)  r&qIqC.p=qC.r&q=q               A127, A218, rinf 9
(10) sin8.sin9C.aext8.dext9          (8), (9), A185
(11) rC.dext8.dext9                  (7), (10), rinf 9
(12) dext8.dext9C.p=qC.r&p=q..r&q=q    A131/2
(13) rC.p=qC.r&p=q..r&q=q            (11), (12), rinf 9
             C.p=qC.r&p=.r&q         A199, A129, A198
(14) 4.7                             (4), (7), rinf 8
     A286                            (14), A103, df7,A167,A129

A287  p=qC.rVp=.rVq
Preuve :
(2)  HrC.rVpI1                       A280
(3)  HrC.rVqI1                       id
       C.rVpI1..rVqI1                A131/3, (2)
       C.rVpI.rVq                    A189/3
       C.rVp=.rVq                    A218
       C.p=qC.rVp=.rVq               A127/2
(4)  -rC.rVpIp                       A281
(5)  -rC.rVqIq                       id
(6)  rVpIpC.p=qC.rVp=p               A127/2, A218, rinf 9
(7)  rVqIqC.p=qC.rVq=p               Sch 1, A20, A198
(8)  sin6.sin7C.dext6.dext7          (6), (7), A185
(9)  -rC.sin6.sin7                   (4), (5), A131/3
(10) -rC.dext6.dext7                 (8), (9), rinf 9
       C.p=qC.rVp=p..rVq=p           A131/2
             C.rVp=.rVq              A199, A129
(11) -p+Hp                           A180, df 5, df 6
     11C.10.3C.7A287                 A167

A288  H(p.q)+-(p+q)C.pVrI.qVr
Preuve :
(2)  HpCHq=.HpDHq                              A233/3, A220/4
(3)  HqCHp=.HqDHp                              id
(4)  sin2.sin3=.dext2.dext3                    (2), (3), A208/2
(5)  HpI(Hp.Hq).(HqI.Hp.Hq)C.HpIHq             A189/3
(6)  dext4Cdext5                               (5), df 10
(7)  sin2.sin3C.HpIHq                          (4), (6), rinf 18
(8)  HpIHqC.Hp+rI.Hq+r                         Sch 1
             C.pVrI.qVr                        A163
(9)  Hp=HqCdext8                               (7), (8),rinf9,df11
(10) Hp.Hq+F(Hp.Hq)Cdext8                      (9), A187
(11) H(p.q)+FH(p+q)Cdext8                      (10), A160, A162
     A288                                      (11), A140/2

A289  FpC.pCqI1
Preuve :   HNpC.NpVqI1        A280
                C.NNpCqI1     A142, df 8
                C.pCqI1       A21

A290  L(pCq)I.pCLq  (Preuve : A159, A156/2, df 7)

A290/2 pC.pCpIp   (Preuve : A273)

A290/3 pCqI1+.pCqIq  (Preuve : A282, df 8, A21)

A290/4  pC1I1   (Preuve : A290/3, A102)
```

A290/5 1CpIp (Preuve : A290/2, A178/2)

A290/6 p=1Ip

Preuve :	p=1I.pC1..1Cp	A101, df 11
	I.1..1Cp	A290/4
	I.1Cp	A111, A9
	Ip	A290/5

A290/7 pCq.(NpCq)Iq (Preuve : A120/2, A180, A104, A273)

A291 pCOIFp

Preuve :

(2)	HFp=.FpI1	A202/2
(3)	Fp=.FpI1	A145/2
(4)	FpC.pCOI1	A289
(5)	FpC.pCOI1..FpI1	rinf8, (4),(3),rinf11a,A131/2
	C.pCOIFp	A189/3
(6)	pC.pCOIO	A290
(7)	pC.FpIO	A137/2
(8)	pC.dext7.dext6	rinf8,(7),(6), A131/2
	C.pCOIFp	A189/3
	A291	rinf8,(5),(8),A103

A292 pZOINp (Preuve : A111, A192, df 3)

A293 pCNpINp

Preuve :

(2)	FpI.Fp.Np	A178/5, df 10
(3)	NpI.Fp+Np	(2), A176
	I.pCNp	df 7
	A293	(3), A196

A294 NpCpIp (Preuve : A293, A21)

A294/2 pC.qCFp=.qIO

Preuve :

		A107
(2)	Fp+Fq+Lq+Fp	A204,A178/2,A104,
(3)	F(p.q)+L(p.q)	A203, id.
(4)	Fp+Fq+.Lp.Lq	(3),A161, A17
(5)	Fp+.Fq+.FFp.FFq	(4),A107,A157
(6)	Fp+.FFq+.Fq.Fp	(2),A157,A104,A107
(7)	Fp+.(Fq+.FFp.FFq)..FFq+.Fq+Fp	A9,(5), (6),rinf8,A109
(8)	Fp+.(Fq+F(Fq+Fp))..FFq+.Fq+Fp	(7), A18, A104
(9)	Fp+.F(Fq+Fp)+Fq..FFq+.Fq+Fp	(8), A104
(10)	pC.qC FpCFq..FqC.qCFp	(9), A104, df 7
(11)	pC.qCFp=Fq	(10), df 11
	≡.qIO	rinf 18,A202/3

A294/3 SpI.p=Np (Preuve : A294,A293, df 11, df 14)

A294/4 NpC.HpDFp (Preuve : A133,A294,df5,A233/2,A220/4,rinf18)

A294/5 pC.FpDHp (Preuve:A294/4, A21, df 5, A142)

A294/6 HpC.pCNpCFp (Preuve: A133,A294, df5, A124)

A294/7 HpC.Fp+F(pCNp) (Preuve : A294/6, df 7, A104)

A294/8 HpDFp+.HpDF(pCNp) (Preuve : A294/7,A114/2,A233/3, A220/4, rinf 18)

A295 p&pIp

Preuve :

(2)	FpC.pIO	A16
(3)	FpC.p&pIO	A268
(4)	pC.p&pIp	A269
(5)	FpC.pIO..p&pIO	(2), (3), A131/2, rinf 8
	C.p&pIp	A189/3, A196
	A103C.5.4C.7A295	A167, rinf 8, df 7

A296 pVpIp (Preuve similaire, parA280,A281;A202/2,A240/2, A196, A167)

A296/2 qCrV.pCq
Preuve :

(2)	Fq+q+.Hr+Fp	A120
(3)	HFq+q+.Hr+Fp	(2), A142, A145
(4)	HFq+Hr+.Fp+q	(3), A104, A107
(5)	H(Fq+r)+.Fp+q	(4), A160
(6)	H(qCr)+.pCq	(5), df 7
	A296/2	(6), A163

A297 p+(qVr)I.qVp+r
Preuve : p+(qVr)I.p+.Hq+r A163
I.p+Hq+r A107
I.Hq+p+r A104
I.qVp+r A163

A298 p+qVrI.pVqVr
Preuve : p+qVrI.H(p+q)+r A163
I.Hp+Hq+r A160
I.Hp+.Hq+r A107
I.pV.qVr A163
I.pVqVr A275

A299 pVq+rI.pV.q+r (Preuve : A163, A107)

A303 Lp&qI.p&q (Preuve : A101, A164, A148)

A304 HpVqI.pVq (Preuve : A101, A163, A145)

A305 LpCqI.pCq (Preuve : A101, df 7, A156)

Beaucoup d'autres théorèmes correspondant à ce chapitre son énumérés dans l'annexe N° 2 de ce Livre I. Désormais d'ailleurs nous ne préviendrons pas toujours le lecteur sur le fait qu'il peut trouver d'autres théorèmes se rapportant aux foncteurs étudiés dans chaque chapitre dans ledit annexe.

Chapitre 9.- IMPLICATION ET EQUIVALENCE

Dans toutes les preuves qui figureront désormais dans ce Livre, on omettra toute référence aux règles rinf 2, rinf 3, rinf 4, rinf 5, rinf 6, rinf 6 bis, rinf 7, rinf 7 bis, rinf 8, rinf 9, rinf 9 bis, rinf 10, rinf 11a, rinf 11b, rinf 12a, rinf 12b, rinf 13a, rinf 13b, rinf 14, rinf 15, rinf 16. On omettra aussi toute référence à Sch 1, ainsi qu'à A7, A8, A9, A10, A17, A18, A20, A21, A101, A102, A103, A104, A105, A105/2, A106, A107, A108, A109, A109/2, A109/3, A110, A110/2, A110/3, A111, A120, A117, A138-A158 (y compris), A167, A189/2, A189/3, A194, , A196, A189/4, A198. On omettra de même toute référence aux définitions 1-14, plus df 17 et df 18. Par surcroît, on utilisera le plus souvent le procédé de télescoper en un seul pas déductif Sch 1 et A20 (ou bien on télescopera Sch 1 et A218). On télescopera aussi -surtout à partir de la preuve de A505- ceci :
p+q+r, pCp', qCq', rCp' ::: p'
(et ce en vertu de A194, A117). D'autres théorèmes (comme A120/2, A131/2, A114/2, A132/3, etc.) pourront être appliqués itérativement en un seul pas déductif, ce qui revient à les interpréter comme constitués -selon le cas- par un nombre indéterminé de membres conjonctifs ou disjonctifs, et non pas précisément par deux. Tous ces procédés nous permettront de soulager la lourdeur des preuves et d'en prouver d'autant plus

aisément les contours et le neruus probandi, qui, ensevelis sous un tas de références, seraient plus difficiles à saisir.

A314 pIqI.pDq..qDp
Preuve :
(2) pI(p.q).(qI.p.q)C.pIq
(3) pIqC.pI.p.q
(4) pIqC.q .p.q
(5) pIqC.pI(p.q)..qI.p.q (3), (4), A131/3
(6) pDq.(qDp)=.pIq (2), (5)
6C.7A314 A191

A315 p.qI(p.r).(p+qI.p+r)C.qIr
Preuve :
(2) p.qI(p.r)C.p.q+qI.p.r+q
C.qI.p+q..r+q
(3) p.qI(p.r)C.rI.p+r..q+r
(4) p+qI(p+r)C.p+q.(r+q)I.p+r..q+r
(5) sin2C.dext2.dext3 (2),(3),A131/2
(6) sin2.sin4C.dext2.dext3.dext4 A185,(4),(5)
(7) dext3.dext4C.rI.p+q..q+r
(8) dext2.dext3.dext4C.dext2.dext7 (7), A131/4

A316 p.qI(p.r).(p+qI.p+r)I.qIr
Preuve :
(2) qIrC.p.qI.p.r
(3) qIrC.p+qI.p+r
(4) qIrC.dext2.dext3 (2),(3),A131/3
(5) p.qI(p.r).(p+qI.p+r)=.rIq (4), A315
A316 (5), A237

A317 pIqI.p.qI.p+q
Preuve :
(2) p.qI(p+q)C.p.qI.p+q.q
C.p.qIq
(3) p.qI(p+q)C.p.qIp
(4) p.qI(p+q)C.dext2.dext3 (2), (3), A131/2
C.pIq
(5) pIqC.pI.p.q
(6) pIqC.pI.p+q
(7) pIqC.p.qI.p+q (5), (6), A131/2
(8) p.qI(p+q)=.pIq (4), (7)
A317 (8), A191

A318 Lp+NpI1
Preuve :
(2) Fp+p
(3) FpC.pIO A16
C.NpI1 A191/2
(4) pC.LpI1 A137
(5) NpI1C.Lp+NpI1
(6) LpI1C.Lp+NpI1
(7) FpC.Lp+NpI1 (3), (5)
(8) pC.Lp+NpI1 (4), (6)

A320 Lp+NpI.p+LNp (Preuve : A318, A319)

A321 Lp+NpIL(p+Np) (Preuve : A137, A318, A180)

A322 p+qI.pZHqZq
Preuve : pZHqZqI.N(Np+Hq)+q A106/2
I.p.LNq+q
I.p+q.1 A319
I.p+q

A323 pD(qCr)C.qC.pDr

Preuve :

(2)	FqC.qC(pDr)I1	A289
(3)	qC(pDr)I1C.pD(qCr)C.qC.pDr	A126
(4)	qC.qC(pDr)I.pDr	A273
(5)	qC.qCrIr	id
(6)	qCrIrC.pD(qCr)I.pDr	
(7)	qC.pD(qCr)I.pDr	(5), (6)
(8)	qC.dext4.dext7 C.pD(qCr)I.qC.pDr C.pD(qCr)C.qC.pDr	(4), (7), A131/3
(9)	FqCdext3	(2), (3)
	A323	A167, (8), (9)

A323/2 pIqC(p'Iq'..p"Iq")C.pIqD.p'Iq'..p"Iq"

Preuve :

(2)	pIqC(p'Iq'..p"Iq")=.pIq=.pIq..p'Iq'..p"Iq"	A226
(3)	$pIqI\frac{1}{2}+.pIqI0$	A244
(4)	$p'Iq'I\frac{1}{2}+.p'Iq'I0$	id
(5)	$p"Iq"I\frac{1}{2}+.p"Iq"I0$	id
(6)	$4.5C.7p'Iq'.(p"Iq")I\frac{1}{2}+.p'Iq'.(p"Iq")I0$	A260
(7)	$pIq.(p'Iq'..p"Iq")I\frac{1}{2}+.pIq.(p'Iq'..p"Iq")I0$	(3),(6),A260
(8)	3.7C.7dext2C.pIqI.pIq..p'Iq'..p"Iq" C.pIqD.p'Iq'..p"Iq"	A129,A253
	A323/2	(2), (8)

Les preuves des théorèmes A323/3-A323/8 sont similaires (en utilisant dans certains cas A261 au lieu de A260).

A324 pIq+(pIr)D.pIsI(qIs)+.pIsI.rIs (Preuve:A129,A124,A323/7)

A324/2 F(pDq)C.qDp (Preuve : A194/5, A251)

A325 pIq.(rIs)D.p.rI.q.s

Preuve :

(2)	pIqC.p.rI.q.r	
(3)	rIsC.q.rI.q.s	
(4)	pIq.(rIq)C.dext2.dext3 C.p.rI.q.s	(2), (3), A185
	A325	(4), A323/4

A325/2 pIq.(rIs)D.p+rI.q+s

Preuve :

(2)	q+sI.q+s	
(3)	pIq.(rIs)C.p+qI.r+s	(2), rinf 17 bis
	sin3Ddext3	(3), A323/4

A326 pDqD.pD.q+r

Preuve :

(2)	pI(p.q)C.p+(p.r)I.p.q+.p.r C.pI.p.q+.p.r C.pI.p..q+r	
	A326	(2), A237/2

A327 pDqD.p.rDq

Preuve :

(2)	pI(p.q)C.p.rI.p.q.r I.p.r.q	
	A327	(2), A237/2

A328 p+qDrI.pDr..qDr

Preuve :

(2)	p+qI(p+q.r)C.p+q.pI.p+q.r.p C.pI.p.r	

(3) p+qI(p+q.r)C.p+q.qI.p+q.r.q
C.qI.q.r
(4) pI(p.r)C.p+q.rI.p.r+.q.r
I.p+q.r
(5) qI(q.r)C.p+qI.p+.q.r
(6) sin4.sin5C.dext4.dext5 (4), (5), A185
C.p+qI.p+q.r
(7) 2C.3C.7sin2C.dext2.dext3 A131/3
(8) p+qI(p+q.r)=.pI(p.r)..qI.q.r (6), (7)
A328 (8), A237

A329 pI(q+r)D.qDp..rDp
Preuve :
(2) pI(q+r)C.p.qI.q+r.q
Iq
(3) pI(q+r)D.p.qIq (2), A237
(4) pI(q+r)D.p.rIr pareillem.
A329 A325, (3), (4)

A330 pDq.(rDq)D.q+pI.q+r
Preuve :
(2) pDqI.qI.q+p A192
(3) rDqI.qI.q+r A192
(4) sin2.sin3I.dext2.dext3 A325
(5) dext2.dext3C.q+pI.q+r
A330 (4), (5), A323/4

A331 pI(q+r)D.p+qI.p+r (Preuve : A329, A330, A194/2)

A332 pDq.(pDr)D.pD.q.r
Preuve :
(2) pI(p.q)C.p.pI.p.q
(3) pI(p.r)C.pI.p.p.r
(4) dext2C.3I.pI(p.r)C.pI.p.q.r
(5) sin2Cdext4 (2), (3), (4)
(6) dext4C.3C.dextdext4
(7) sin2C.3C.dextdext4 (5), (6)
(8) 3C.7sin2Cdextdext4 (7), A123
A332 (8), A129, A323/4

A332/2 pDqD.pDrD.pD.q.r
Preuve (on reprend la ligne (8) de la preuve de A332):
(2) pI(p.q)C.pI(p.r)C.pI.p.q.r
(3) dext2C.pI(p.r)D.pI.p.q.r (2), A237/2
(4) sin2Cdext3 (2), (3)
sin2Ddext3 (4), A237/2

A333 pDq.(pDr)I.pD.q.r
Preuve :
(2) pDq.(pDr)D.pD.q.r A332
(3) pI(p.q.r)C.p+(p.q)I.p.q.r+.p.q
C.pI.p.q
C.pDq
(4) pI(p.q.r)D.pDq A237/2, (3)
(5) pI(p.q.r)D.pDr pareillem.
A333 (2),(4),(5),A332,A314

A333/2 pD(q.r)D.pDq (Preuve :ligne (3) de la preuve de A333 + A237/2)

A334 pDq+(pDr)D.pD.q+r
Preuve :
(2) pI(p.q)C.p+(p.r)I.p.q+.p.r
C.pI.p..q+r

```
(3)  pI(p.r)C.pI.p..q+r                 pareillement
(4)  sin2+sin3C.pI.p..q+r               (2), (3), A120/2
     A334                               (4), A323/5

A335  pD(q+r)D.pDq+.pDr
Preuve :
(2)  p.q+(p.r)I(p.q)+.p.q+(p.r)I.p.r           A195
(3)  sin2C.pI(p.q+.p.r)I.pI.p.q
         C.pI(p.q+.p.r)C.pI.p.q
(4)  dext2C.pI(p.q+.p.r)C.pI.p.r                pareillem.
(5)  2.3.4C./dext3+dext4
(6)  pI(p.q+.p.r)C.pI(p.q)+.pI.p.r             (5), A114/2
     sin6Ddext6                                 (6), A323/3

A336  pD(q+r)I.pDq+.pDr   (Preuve : A334, A335, A314)

A337 p.qDrD.pDr+.qDr
Preuve :
(2)  p.qIp+.p.qIq                       A194/5
(3)  p.qIpC.p.q.rI(p.q)I.p.rIp
         C.p.qI(p.q.r)C.pI.p.r
(4)  p.qIqC.p.qI(p.q.r)C.qI.q.r
(5)  2.3.4C./dext3+dext4
(6)  p.qI(p.q.r)C.pI(p.r)+.qI.q.r       (5), A114/2
     sin6Ddext6                         (6), A323/3

A338  pDr+(qDr)D.p.qDr
Preuve :
(2)  pI(p.r)C.p.qI.p.q.r
(3)  qI(q.r)C.p.qI.p.q.r
(4)  sin2+sin3Cdext3                    (2), (3), A120/2
(5)  sin4Ddext4                         (4), A323/5
     A338                               (5)

A339  p.qDrI.pDr+.qDr  (Preuve : A337, A338, A314)

A340  pDq.(qDr)D.pDr  (Preuve : A194/2, A323/4)

A341  pDqD.qDrD.pDr
Preuve :
(2)  pDqC.qDrC.pDr               A194/2, A129
(3)  qDrC(pDr)C.qDrD.pDr         A237/2
(4)  sin2Ddext3                  (2), (3)
     A341                        (4), A237/2

A341/2  qDrD.pDqD.pDr  (Preuve similaire)
```

Les théorèmes que nous venons de démontrer nous permettent, chaque fois que nous avons comme théorèmes "pDq" et "qDr", de conclure "pDr". Nous nous servirons de cette transitivité de l'implication pour construire des chaînes déductives en 'D' similaires à celles auxquelles nous sommes déjà habitués en 'C' et en 'I'. A la différence des chaînes en 'I', et de même en revanche que celles en 'C', les chaînes en 'D' sont valides seulement dans la direction de gauche à droite.

```
A342  pI(q+r)D.pIq+.pIr
Preuve :
(2)  q+rIq+.q+rIr                       A195
(3)  qI(q+r)C.pI(q+r)I.pIq
         C.pI(q+r)C.pCq
(4)  q+rIrC.pI(q+r)C.pIr                pareillem.
(5)  pI(q+r)C(pIq)+.pI(q+r)C.pIr (2), (3), (4)
     A342                               (5), A114/2, A323/3
```

A342/2 pI(q.r)D.pIq+.pIr (Preuve similaire, à partir de A194/5 au lieu de A195)

A343 pDq.(p'Dr)D.p.p'D.q.r
Preuve : pI(p.q)(p'I.p'.r)D.p.p'I.p.q.p'.r A325
D.p.p'I.p.p'..q.r
D.p.p'D.q.r

A344 pDqD.p.rD.q.r
Preuve :
(2) pI(p.q)C.p.rI.p.q.r
(3) pI(p.q)D.p.rI.p.r.q.r A237/2, (2)
A344 (3)

A345 pDqD.p+rD.q+r
Preuve :
(2) pI(p.q)C.p+rI.p.q+r
I.p+r..q+r
(3) sin2Ddext2 (2), A237/2

A346 p.qD.p+q
Preuve :
(2) pI.p..p+q
(3) qI.q..p+q
(4) p.qI.p.(p+q)..q..p+q (2), (3), A325
I.p.q++p+q

A346/2 p.qD.p (Preuve : df 10, A7)

A346/4 pDq.(p'Dq')D.p+p'D.q+q' (Preuve : A346/3, A328)

A346/5 SpISSp (Preuve : A346, A106/3, A106/4)

A346/6 p&qDrI.qD.pCr
Preuve :
(2) Lp.qDrD.Fp+(Lp.q)D.Fp+r A345
D.Fp+Lp.(Fp+q)D.Fp+r
D.Fp+qD.Fp+r A203, A111
D.qD.Fp+r A328, A115
(3) qD(Fp+r)D.Lp.qD.Lp..Fp+r A344
D.Lp.Fp+.Lp.r
D.O+.Lp.r
D.Lp.r
Dr A346/2
A346/6 (2), (3), A164, A314

A346/7 pZqZpIp
Preuve : pZqZpI.N(Np+q)+p A106/2
I.p.Nq+p
Ip

A346/8 pD.pCqCp
Preuve : pDp A101/3
D.p+.Lp.Fq A346/3
D.Lp.Fq+p
D.FFp.Fq+p
D.F(Fp+q)+p
D.pCqCp

```
A346/9   pCqC(qCp)I.qCp
Preuve :   pCqC(qCp)I.F(Fp+q)+.Fq+p
                    I.FFp.Fq+.Fq+p
                    I.Fq+p+FFp..Fq+p+Fq
                    I.qC(p+Lp)..qCp
                    I.qC.p+Lp.p              A131/2
                    I.qCp

A347  pDq+(p'Dq')D.p.p'D.q+q'  (Preuve : A344, A346

A348  pC(pDq)=.pDq
Preuve :
(2)  pIOC.pI.p.q
(3)  FpC.pI.p.q                (2), A202/3, A220/2
(4)  pDqC.pI.p.q
(5)  3.4C./Fp+(pDq)C.pI.p.q        A167, A123
(6)  pC(pDq)C.pDq                  (5)
(7)  pDqC.pC.pDq                   A127
     A348                          (6), (7)

A348/2  qD(pCr)D.p.qDr
Preuve :
(2)  qD(pCr)I.qD.Fp+r
            I.qDFp+.qDr            A336
(3)  qDrD.p.qDr                    A327
(4)  pDFqC.pCFq                          A126/2
          C.Fp+Fq
          CF(p.q)
          C.p.qIO                  A16
          C.p.qDr
(5)  pDFqD.p.qDr                   (4), A237/2
(6)  sin3+sin5D.p.qDr              (5), (3), A328
     A348/2                        (2), (6)

A349  pD(qDr)D.pDqD.pDr
Preuve :
(2)  pD(qDr)C.pC.qDr                    A126/2
(3)  pDqI.qI.p+q                        A192
(4)  pDqC.qI.p+q                        (3)
(5)  qI(q+p)C.pC(qDr)I.pC.q+pDr
(6)  sin5C.sindext5Cdextdext5           (5)
(7)  q+pDrI.qDr..pDr                    A328
(8)  pCsin7C.pCdext7                    (7)
(9)  dext7C.pDr                         A115
(10) 9C.8C./pCsin7C.pC.pDr              A132/2
(11) qI(q+p)C.pC(qDr)C.pC.pDr           (10); (6), A132/2
(12) pDq.(pC.qDr)C.pC.pDr               (11), (3), A129

(13) pDq.(pD.qDr)Csin12                 A126/2, A131/5
                 Cdext12                (12)
                 C.pDq                  A348
(14) pD(qDr)C.pDqC.pDr                  (13), A129
            C.pDqD.pDr                  A237/2
     A349                               (14), A237/2

A350  pDqD.pDrD.pDq..pDr  (Preuve : A333, A332/2)

A351  FSp.FSqC.p=q=.pIq
Preuve :
(2)  pIqC.p=q               A218
(3)  FSpI.Hp+Fp             df 5, df 14
(4)  FSqI.Hq+Fq             id
(5)  FSp=.pIO+.pI1          A218,(3),A202/2, A202/3
(6)  FSq=.qIO+.qI1          pareillem.
```

(7) FSp.FSq.(p=q)C.pIq — (5), (6), A254., rinf 18
(8) FSp.FSqC.p=qC.pIq — (7), A129
(9) FSp.FSqC.pIqC.p=q — (2), A127
(10) FSp.FSqC.dext8.dext9 — (8), (9), A131/3
A351 — (10)

A351/2 1Dp=Hp
Preuve :
(2) HpC.pI1 — A202
C.1Dp — A189/4
(3) 1DpC.1I(p.1)..pI.p.1 — A111, A127, A131/4
C.1Ip
CHp — A202/2, rinf 18
A351/2 — (2), (3)

A351/3 pD0=Fp (Preuve similaire)

A352 pDqI.pD.p.q (Preuve : df 10)

A352/2 pDqD.HpDHq (Preuve : A194/2, A351, rinf 18, A129, A352, A327/2)

A352/3 LpDqD.pDHq (Preuve : A352/2, A175, A126/2, A131, A340, A237/2)

A352/4 pDqD.LpDLq (Preuve : A126/2, A245/2, A237/2, rinf 18)

A353 pC.pDqCq (Preuve: A126/2, A131/5, A121, A129)

A353/2 FpC.qDpDFq (Preuve: A251/2, A126/2, A131, A129/2, A233/2, A220/4,

A353/3 pDqD.FqDFp (Preuve : A193, A352/2)

A353/4 pDFqD.qDFp (Preuve : A353/3, A126/2, A172, rinf 18, A233/2, A220/4, A237/2)

A354 qC.pDFq+(pDr)I.pDr (Preuve : A137/2, A336)

A354/2 FqC.pDq+(pDr)I.pDr (Preuve similaire, par A6 au lieu de A137/2)

A355 pDqC.pZq (Preuve : A126/2, A179, A106/2)

A356 pC.FpDq (Preuve : A137/2

A356/2 HpC.NpDq (Preuve : A202/4)

A357 pD(qDr)D.p.qDr
Preuve :
(2) qDrD.p.qDr — A327
(3) pD(qDr)D.2D.pD.p.qDr — A341
(4) sin3C.2C.pD.p.qDr — (3), A126/2, A125
(5) 2C./sin3C.pD.p.qDr — (4), A123
(6) sin3C.pC.p.qDr — A126/2, A125
(7) pC.sin3Cp.qDr — (6), A123
(8) FpC.pDr — A174
C.p.qDr — A327, A126/2, A125
(9) FpC.sin3C.p.qDr — (8), A127, A124
(10) sin3C.p.qDr — (7), (9)
A357 — (10), A237/2

A358 pDqD.p'Dq'D.pDq (Preuve : A127, A237/2)

A359 pC(qDr)C.pDqD.pDr
Preuve :
(2) FpC.pDr — A174
(3) pDrC.pDqD.pDr — A358, A126/2
(4) FpCdext3 — (2), (3)
(5) qDrC.pDqD.pDr — A341, A126/2, A123, A237/2
A359 — (4), (5), A167, A123

A359/2 pDq.(pC.qIr)C.pDr
Preuve :
(2) qIrC.qDr A189/4
(3) pC(qIr)C.pC.qDr (2), A118
(4) pDq=.pC.pDq A348
(5) pDq.(pC.qIr)C.pC.pDq..qDr (3), (4), A131/2
C.pC.pDr A194/2
C.pDr A348, rinf 18

A360 pDq.F(pIq)I.NqDNp.F(NpINq) (Preuve : A191/2,A193,A325)

A361 pD(q.r).(rDs)D.pD.q.s (Preuve: A333/2,A126/2, A323/4)

Le théorème A360 marque en vérité la transition au = chapitre suivant. Jusqu'ici, en effet, nous n'avons étudié = que des théorèmes où, pour quelque p et quelque q, "pDq" est= vrai. Mais il nous faut aussi considérer les cas où il est= tout à fait faux que pDq; i.e. les cas où p est plus vrai que q. Dans une logique bivalente ceci n'est possible que dans= le cas où p est faux et q vrai. En partie, cette condition = demeure valide dans la logique infinivalente As. En effet := s'il est tout à fait faux que le fait que p implique le fait= que q, si donc le fait que p est plus vrai que ne l'est le == fait que q, alors il est vrai que p et il est faux que q. = Mais, attention!, il n'en ressort nullement que p doive être= tout à fait vrai, ni non plus que q doive être tout à fait = faux. C'est ce que nous verrons tout de suite, au chapitre 10.

Chapitre 10.- SURIMPLICATION

La surimplication d'une phrase ou proposition q par= une autre p c'est la relation qu'il y a entre p et q lorsque= q est plus vraie que p. Dans le système A toute phrase surim-plique quelque autre phrase, à moins que la première ne soit= tout à fait vraie. De même, toute phrase est surimpliquée = par quelque autre phrase, à moins que la première ne soit = tout à fait fausse. La surimplication est symboliquement no-tée par '%'.

A362 p%qD.pDq.F(pIq)
Preuve :
(2) F(qDp)CF(pIq) A189/4, A197
(3) sin2Ddext2 A233/2, A220/4, (2)
(4) p%qD.pDq.F(qDp) df 19, A237/2
A362 (4), (3), A361

A363 p%qI.pDq.F(pIq)
Preuve :
(2) F(pIq)I.F(pDq)+F(qDp) A314
(3) pDq.F(pIq)I.pDq.F(pDq)+.pDq.F(qDp) (2)
I.O+.pDq.F(qDp)
A363 (3), df 19

A364 F(p%p)
Preuve :
(2) L(pIp) A171
(3) FF(pIp) (2)
(4) F(pDp.F(pIp)) (3), A116/3
A364 (4), A363

A365 p%qDF(q%p)
Preuve :

(2) p%q.(q%p)D.pDq..qDp.F(pIq) A362, A343
DO A314
(3) F(p%q)+F(q%p) (2), A291
A365 (3), A233/2,A220/4

A366 p%q.(q%r)D.p%r
Preuve :
(2) pDq.(qDr)D.pDr A194/2
(3) p%q.(q%r)Dsin2 A362, A343, A333/2
D.pDr (2), A341
(4) pIrC.sin3C.r%q..q%r
CO A365, A126/2, A16
(5) F(pIr.sin3) A291, (4)
(6) sin3CF(pIr) (5)
(7) sin3DF(pIr) A233/2, A220/4, (6)
(8) sin3D.pDr.F(pIr) (3), (7), A344
A366 (8), A363

A367 p%q+(q%p)+.pIq
Preuve :
(2) pDq+.qDp A194/5
(3) pIq+F(pIq)
(4) pDq.(pIq+F(pIq))+.qDp..pIq+F(pIq) (2),(3)
(5) pDq.(pIq)+(pDq.F(pIq))+(qDp..pIq)+.qDp.F(pIq) (4)
(6) pDq.F(pIq)+(qDp.F(pIq))+.pIq (5),A314
A367 (6), A363

A367/2 pDqI.p%q+.pIq
Preuve :
(2) p%qD.pDq A363, A346/2
(3) pIqD.pDq A314, A346/2
(4) p%q+(pIq)D.pDq (2), (3), A328
(5) p%qIO+.p%qI.pDq A303/2, A270
(6) p%qIOC.p%q+(pIq)I.pIq
C.p%q+(pIq)D.pIq (3), A341
(7) p%qI(pDq)C.p%qD.pDq A101/3
C.p%q+(pIq)D.pDq (3), A328
(8) p%q+(pIq)D.pDq (5),(6),(7)
A367/2 (4),(6),A314

A367/3 p%q=F(qDp)
Preuve :
(2) p%qCF(qDp) df 19, A115
(3) F(qDp)C.p%q A367, A367/2, A251
A367/3 (2), (3)

A367/4 p%(q.r)I.p%q..p%r
Preuve: p%(q.r)I.pD(q.r).F(q.rDp) df 19
I.pDq.(pDr).F(qDp+.rDp) A333, A339
I.pDq.(pDr).F(qDp).F(rDp)
I.pDq.F(qDp)..pDr.F(rDp)
I.p%q..p%r df 19

A367/5 p+q%rI.p%r..q%r (Preuve : df 19, A328, A336)

A367/6 qDrD.p%qD.p%r
Preuve :
(2) qI(q.r)C.p%qI.p%.q.r
C.p%qI.p%q..p%r A367/4
C.p%qD.p%r
A367/6 (2), A237/2

A367/7 p%qD.p%.p+q (Preuve : A367/6, A346/3)

/ rinf18)

A368 F(pIq)≡.p%q+.q%p (Preuve : A367,A251,A367/3,A314,A116/3

A368/2 p%qI.Nq%Np (Preuve : A363, A360)

A368/3 q%pD.p.q%p (Preuve : A367/7, A368/2)

A368/4 pDqD.q%rD.p%r (Preuve : A367/6, A193, A368/2)

A369 NpC.p%1

Preuve :

(2)	pD1	A111
(3)	NpC.pD1	(2), A127
(4)	Hp≡.pI1	A202/2
(5)	FHp=F(pI1	(4), rinf 18
(6)	NpCLNp	A171
	CFHp	
	CF(pI1)	(5), rinf 18)
(7)	NpC.pD1.F(pI1)	(3), (6), A131/2
	C.p%1	A363

A371 p≡.O%p

Preuve :	O%p=F(pI.p.O)	A367/3
	≡F(pIO)	
	≡FFp	A202/3, A220
	≡Lp	
	≡p	A172

A371/2 p≡.Np%1 (Preuve : A371, A368/2, df 18)

A371/3 Np≡.p%1 (Preuve : A371/2)

A371/4 q%pCp

Preuve :

(2)	FqC.q%pI.O%p	A202/3, rinf 18
	C.q%pCp	A371 /A129,A122/2
(3)	qC.q%pCp	df 19, A22,A126/2,A121,A185,
	A371/4	(2), (3)

A371/5 Np%qCp (Preuve : A371/4, A368/2)

A371/6 p%qCNp (Preuve : A371/5)

A371/7a p%qIO+.p%qI½

Preuve :

(2)	p%qI.pDq.F(qDp)	df 19
(3)	pDqI½+.pDqIO	A244
(4)	pDqIOC.p%qIO	df 19
(5)	p%qIOC.p%qD.p'%q'	
	C.p%qC(p'%q')C.p%qD.p'%q'	A127
(6)	F(qDp)IO+.F(qDp)I1	A230
(7)	F(qDp)IOC.p%qIO	df 19
(8)	pDqI½C.pDqI½.(F(qDp)IO)+.pDqI½..F(qDp)I1	(6),A132/3
(9)	pDqI½.(F(qDp)IO)C.p%qIO	(7),A125/2
(10)	F(qDp)I1C.pDq.F(qDp)I.pDq	
	C.p%qI.pDq	df 19
(11)	pDqI½C.F(qDp)I1C.p%qI½	(10)
(12)	pDqI½.(F(qDp)I1)C.p%qI½	(11); A129
(13)	dext9C.p%qIO+.p%qI½	A116
(14)	sin9Cdext13	(9), (13)
(15)	sin12Cdext13	(12), A116
(16)	sin9+sin12Cdext13	A120/2,(14),(15),A117,
(17)	sin8Cdext13	(8), (16)
(18)	sin4Cdext13	(4), (13) (dext4=dext9)
	3C.7dext13	(17), (18),A117,A120/2

A371/7b p%qC(p'%q')C.p%qD.p'%q'

Preuve :

(2)	p'%q'IO+.p'%q'I½	A371/7a
(3)	p%qI½C.p%q	A101/2
	C.p%qC(p'%q')C.p'%q'	A121
	CL(p'%q')	A172, rinf 18
	CFF(p'%q')	
	CF(p'%q'IO)	A202/3, rinf 18
	C.p'%q'I½	(2), A251
(4)	sin3C.sindext3C.sin3.dextdext3	A131, A132
	C.p%qD.p'%q'	A189/4
	A371/7b	(4), A371/7a + ligne (5) de la preuve de A371/7a

Nous avons pu constater que la surimplication '%' est un ordre strict, à savoir une relation irréflexive, asymétrique, transitive et connexe. Il faut néanmoins prévenir une possible mécompréhension de la connexité de la surimplication; telle qu'elle est ici en vigueur, la connexité ne signifie pas que, pour tout p et tout q, ou bien "p%q", ou bien "q%p", ou bien "pIq" doit être une phrase assertable; car l'assertabilité d'une phrase réside dans le fait qu'elle soit vraie à tous les égards. Il s'agit plutôt d'une connexité interne, non externe (en usage, non en mention; ou, si l'on préfère, intralinguistique, non métalinguistique). Ce qu'elle contient c'est uniquement le fait que, pour tout p et tout q, la phrase "p%q+.q%p+.pIq" est vraie, i.e.: ou bien il est moins vrai que p que non pas que q, ou bien il est moins vrai que q que non pas que p, ou bien enfin il est aussi vrai que p que q.

Chapitre 11.- LE PLUTOT VRAI ET LE PAREILLEMENT VRAI ET FAUX

Nous connaissons déjà plusieurs foncteurs d'assertion ou d'affirmation : d'un côté, un foncteur réduplicatif 'NN', qui constitue une transformation identique ou nulle d'une proposition; d'autre part, 'L', ou 'FF', qui est une assertion faible; enfin, une suraffirmation 'H'. Nous allons introduire maintenant un foncteur d'assertion intermédiaire entre la simple réduplication 'NN' et la suraffirmation 'H', à savoir le foncteur 'P', une phrase 'Pp' étant vraie ssi p est au moins aussi vrai que faux. Pour ce foncteur une variante du principe de tiers exclu est valide (cf. ci-dessous, A373) : pour toute phrase p, soit il est plutôt vrai que p, soit il est plutôt faux que p. De nouveau, il faut bien préciser que ceci n'entraîne point que, pour toute phrase p, soit "il est plutôt vrai que p", soit "il est plutôt faux que p" doive être une phrase assertable, i.e., une phrase vraie sans restriction (à tous égards).

A372 PpI.p.L(NpDp)

Preuve :	PpI.NpISp&p	
	I.L(NpISp).p	A164
	I.p.L(NpISp)	
	I.p.L(NpI.p.Np)	df 14
	I.p.L(NpDp)	

A373 Pp+PNp

Preuve :

(2)	pDNp+.NpDp	A194/5
(3)	pDNpC.pCNp	A126/2
	CNp	A293
(4)	pDNpC.L(pDNp).Np	(3), A171, A131/2
(5)	NpDpC.L(NpDp).p	pareillem.

(6)	L(NNpDNp).Np+.L(NpDp).p	(2), (4), (5)
	A373	(6), A372

A374 PpDp (Preuve : A372, A346/2)

A374/2 FpDFPp (Preuve : A374, A353/3

A375 PpC.PpIp
Preuve :

(2)	NpDpC.L(NpDp)Il	A131
(3)	PpC.NpDp	A372, A115
	Cdext2	(2)
(4)	dext2C.p.L(NpDp)Ip	
	A375	(3), (4), A372

A377 PpIp+.PpIO
Preuve :

(2)	FPp+Pp	
(3)	FPpC.PpIO	A16
(4)	PpC.PpIp	A375
	A377	(2), (3), (4)

A378 FpC.PpIp
Preuve :

(2)	FpC.pIO	A16
(3)	pIOC.p.L(NpDp)IO	
	C.PpIO	A372
(4)	FpC.pIO..PpIO	(2), (3), A125, A131/2
	C.PpIp	

A378/2 HpDPp
Preuve :

(2)	HpDp	A178
(3)	HpC.NpIO	A202/4
	C.NpDp	
(4)	HpDL(NpDp)	(3), A220/5
(5)	HpD.p.L(NpDp)	(2), (4), A332
	HpDPp	(5), A372

A378/3 pDPLp (Preuve : A175, A378/2, A341)

A378/4 FpC.NPpIl (Preuve : A178, A202/5, A191/2)

A378/6 HpIHPp
Preuve :

(2)	HpC.PpIl	A378/5, A191/2
	CHPp	A202/2, rinf 18
(3)	FSHPp	A233/3
(4)	3C.2=.7HpDHPp	A220/4
(5)	HPpDPp	A178
	Dp	A374
(6)	HHPpDHp	(5), A352/2
(7)	HPpDHp	(6)
	A368/6	(4), (7), A117, A314

A378/7 HPpIPHp
Preuve :

(2)	PHpDHp	A374
	DHPp	A378/6
(3)	HHpIHPHp	A378/6
(4)	HpDHPHp	(3) , A189/4
	DPHp	A178
(5)	HPpDPHp	(4), A378/6
	A378/7	(2), (5), A117, A314

A379 PpIp=.Pp+Fp

Preuve :

(2) Pp+FpC.PpIp   A375,A378,A120/2
(3) FPp.LpI.Lp.F(p.L(NpDp))   A372
I.Lp..Fp+F(NpDp)
I.Lp.Fp+.F(NpDp).Lp
I.F(NpDp).Lp   A212
(4) F(NpDp)CF(p.L(NpDp))   A116/3
CFPp   A372
(5) Lp.F(NpDp)C.Lp.FPp   (4), A131/5
C.F(pIO).PpIO   A202/3, A219/2
(6) PpIOC.F(pIO)CF(pIPp)
(7) F(pIO).(PpIO)CF(pIPp)   (6), A129
(8) F(Pp+Fp)CF(pIPp)   (3), (5), (7)
A379   (2), (8), A212/2

A380 PPpIPp

Preuve :

(2) PpDPPp=.PpC.PpDPPp   A348
(3) PpDPPpI.p.L(NpDp)D.p.L(NpDp).L(N(p.L(NpDp))D.p.L(NpDp))   A372
I.p.L(NpDp)DL(Np+F(NpDp)D.p.L(NpDp))   A352
(4) PpCsin3I.PpCdext3   (3)
(5) p.L(NpDp)CL(NpDp)   A115
C.F(NpDp)IO   rinf18,A219/2
C.Np+F(NpDp)INp
(6) PpIsin5   A372
(7) dext5C.dext3I.p.L(NpDp)DL(NpD.p.L(NpDp))
(8) PpCdext5C.PpDdext7   (7),A118
(9) sin8   (5),A372
(10) PpCdextdext7C.PpCdext3   (9),(7),(8),A132
(11) PpCdextdext7=dextdext7   A372, A348
(12) dextdext7I.p.L(NpDp)D.L(NpDp).L(NpDL(NpDp))   A333,A161
I.p.L(NpDp)DL(NpDL(NpDp))   A352
(13) L(NpDp)C.NpCL(NpDp)   A127
C.NpDL(NpDp)   A220/4,rinf18,A233/3
(14) p.L(NpDp)DL(NpDL(NpDp))   A245/2, rinf18,A327
(15) dextdext7   (14), (12)
(16) PpCdextdext7   rinf18,(11),(15)
(17) PpCdext3   (16), (10)
(18) PpCsin3   (3), (17)
A380   (18), (2)

A381 pINpC.Pp.PNp

Preuve :

(2) pINpI.pDNp..NpDp   A314
(3) pINp=L(pDNp..NpDp)   (2), A172
(4) pINpCL(pDNp..NpDp)   (3)
(5) pINpI.pINp.L(pDNp..NpDp)   (4), A229/4
I.pDNp..(NpDp).L(pDNp..NpDp)   A314
I.pDNp..NpDp.L(pDNp).L(NpDp)   A161
(6) pINpCdext5   (5)
C.pCNp.(NpCp).L(pDNp).L(NpDp)   A126/2,A131/5
C.Np.p.L(pDNp).L(NpDp)   A293, A294
C.Pp.PNp   A372

A382 Pp.PNpC.pINp

Preuve :

(2) PpC.NpDp   A372,A115, A170, A125
(3) PNpC.pDNp   id
A382   (2), (3), A185, A314

A383 pINp=.Pp.PNp (Preuve : A381, A382)

A384 Pp.PNpC.Pp.PNpIp..Pp.PNpINp

Preuve :

(2)	Pp.PNpC.PpIp..PNpINp	A374, A185
(3)	Pp.PNpIPp+.Pp.PNpIPNp	A194/5
(4)	dext2C.Pp.PNpIp+.Pp.PNpINp	(3), rinf 17 bis
(5)	Pp.PNpC.pINp.dext4	(2),(4),A382,A131/2
(6)	dext5C.Pp.PNpIp..Pp.PNpINp	A196/3, A129
	Pp.PNpCdext6	(5), (6)

A385 Pp.PNpC.PpIp..PpINp

Preuve :

(2)	Pp.PNpC.pINp	A382
(3)	Pp.PNpC.PpIp	A375, A125/2
(4)	sin3C.dext3.dext2 C.PpINp	(2), (3), A131/2
(5)	sin3C.dext3.dext4	(3), (4), A131/2

A386 PpIp.(PpINp)C.Pp.PNp

Preuve :

PpIp.(PpINp)C.Pp+Fp..p.L(NpDp)INp	A379,A372
C.Pp+Fp..pI.Np+F(NpDp)	
C.Pp+Fp..p=.Np+F(NpDp)	A218,A169
C.Pp+Fp..p=.Np+.p%Np	A367/3,rinf18
C.Pp+Fp..pC(Np+.p%Np)..NpCp	A120/2,A115,
C.Pp+Fp..pCNp+(pC.p%Np)..NpCp	/ A169
C.Pp+Fp..pCNp..NpCp	A118,A169,A371/4
C.Pp+Fp.Np.p	A293,A294
C.Pp.Sp+.Fp.Sp	
C.Pp.Sp	
CPp	A122/2
C.Pp..PpINp	A131/4,A122/2
C.Pp..PPpIPNp	
C.Pp..PpIPNp	A380
C.Pp.PNp	A187/6

A387 Pp.PNp=.PpIp..PpINp 5Preuve : A385, A386)

A388 pINp=.PpIp..PpINp (Preuve : A383, A387, rinf 18)

A389 pINpI.PpIp..PpINp (Preuve : A388, A237)

Il est facile de constater que tous les résultats atteints jusqu'ici sont indépendants de l'axiome A25. Beaucoup d'autres résultats postérieurs sont, à la vérité, indépendants de cet axiome-là. Mais, étant donne le rôle central que joue la constante définie '$\frac{1}{2}$' dans le système A, il paraît judicieux d'introduire maintenant cet axiome dans notre démarche déductive, afin de mettre en évidence les propriétés de '$\frac{1}{2}$', i.e. du pareillement vrai et faux.

A390 pINpI.pI$\frac{1}{2}$ (Preuve : A25, A191)

A391 PpIp.(PpINp)I.pI$\frac{1}{2}$ (Preuve : A390, A389)

A392 Pp.PNp=.pI$\frac{1}{2}$ (Preuve : A391, A218, A387, rinf 18)

A393 pIqC.P(pIq).PN(pIq)

Preuve :

pIqC.pIqI$\frac{1}{2}$	A244/2, A126/2
C.P(pIq).PN(pIq)	A392

A394 P(pIp).PN(pIp) (Preuve : A101, A393)

A394/2 P(pIp) (Preuve : A394, A22)

A394/3 P$\frac{1}{2}$.PN$\frac{1}{2}$ (Preuve : A394, df 17)

A395 $\frac{1}{2}$IN$\frac{1}{2}$ (Preuve : A394/3, A383)

A396 ½IN½I½ (Preuve : A395, A244/2)

A397 ½IN½IN(½IN½) (Preuve : A396, A390)

A398 ½I½I½ (Preuve : A244/2)

A399 ½I½IN(½I½) (Preuve : A398, A390)

A400 ½I½I.½IN½ (Preuve : A395, A23)

A401 ½I½IN½ (Preuve : A398, A395)

A402 S½I½ (Preuve : A395, A189/5, df 14)

A402/2 S½ (Preuve : A402, A101/2)

A403 S½INS½ (Preuve : A402, A390)

A404 S½ISN½ (Preuve : A395)

A404/2 S½IN½ (Preuve : A402, A395)

A405 P½I½ (Preuve : A194/3, A**22**, A375)

A406 P½IN½ (Preuve : A405, A395)

A407 P½IPN½ (Preuve : A395)

A408 P½INP½ (Preuve : A406, A405, A191/2)

A409 N(½.½)I½ (Preuve : A395)

A410 N(½.½..½.½)I½

A411 N(pIp) (Preuve : A395, df 17)

A412 PN(pIq)

Preuve :

(2)	pIqCPN(pIq)	A393, A115
(3)	HN(pIq)CPN(pIq)	A378/2
(4)	F(pIq)CPN(pIq)	(3)
	A412	(2), (4), A167

A413 PpC.NpDp (Preuve : A372, A170, A125)

A414 PpC.pI.p+Np (Preuve : A414, A192)

A415 PpC.NpIp+.Np%p (Preuve : A413, A367/2)

A416 NpIpC.½Dp (Preuve : A390)

A417 Np%pC.½%p

Preuve :

(2)	Np%p.(p%½)D.Np%½	A366
(3)	sin2C.p%½	A115
	C.N½%Np	A368/2
	C.½%Np	A395
(4)	sin2C.½%Np..Np%½	(3),(4),A126/2,A131/2
(5)	Fdext4	A365,A126/2
(6)	Fsin2	(4),(6)
(7)	Np%p.(pI½)C.F(NpIp)..NpIp	A390,A36**2**,A115
(8)	Fdext7	A109/2
(9)	Fsin7	(8), (7)
(10)	Np%pC.F(p%½).F(pI½)	(6), (9),A131/2
	A367C.11C./A417	A251/3

A417/2 ½%pC.Np%p (Preuve : similaire à celle de A417)

A418 Np%pC.½Dp (Preuve : A417, A363, A115)

A419 PpC.½Dp (Preuve : A413, A415, A416,A418,A167,A125)

A420 FPpCF(½Dp)

Preuve :

(2)	FPpI.Fp+FL(NpDp)	A372
(3)	FpC.pIO	A16

(4)	FpC.NpIl	A202/5
(5)	F(lDO)	A240, A126/2
(6)	FpC.pIO..NpIl	(3), (4), A131/2
	CF(NpDp)	(5), rinf 17 bis
(7)	FPpCF(NpDp)	(2), (6) A395
	A420	(7),A367/3,rinf18,A368/2,A417,

A421 Pp$\underline{=}$.$\frac{1}{2}$Dp (Preuve : A419, A420, A412/2)

A422 Pp$\underline{=}$.NpD$\frac{1}{2}$ (Preuve : A421, A193, A395)

A423 Pp.PqC.NpDq..NqDp

Preuve :

(2)	Pp.PqC.NpD$\frac{1}{2}$..$\frac{1}{2}$Dq	A422, A421, A185
(3)	Pp.PqC.NqD$\frac{1}{2}$..$\frac{1}{2}$Dp	id
(4)	dext2C.NpDq	A194/2
(5)	dext3C.NqDp	id
	sin2C.dext4.dext5	(2), (3), (4), (5),A131/2

A424 P(p.q)I.Pp.Pq

Preuve :

(2)	P(p.q)I.p.q.L(N(p.q)D.p.q)	A372
	I.p.q.L(N(p.q)Dp..N(p.q)Dq)	A333
	I.p.q.L(N(p.q)Dp).L(N(p.q)Dq)	A161
	I.p.q.L(Np+NqDp).L(Np+NqDq)	
	I.p.q.L(NpDp..NqDp).L(NpDq..NqDp)	A328
	I.p.q.l(NpDp).L(NpDq).L(NqDp).L(NqDq)	A161
	I.p.L(NpDp)..q.L(NqDq)..L(NpDq).L(NqDp)	
	I.Pp.Pq..L(NqDp).L(NpDq)	A372
(3)	P(p.q)D.Pp.Pq	(2),A346/2
(4)	Pp.PqC.NpDq..NqDp	A423
(5)	Pp.PqDL(NpDq..NqDp)	(4), A220/5
	D.L(NpDq).L(NqDp)	A161
	D.Pp.Pq.L(NpDq).L(NqDp)	A352
	DP(p.q)	(2)
	A424	(3),(4),A314

A425 Pp$\underline{=}$.NpDp

Preuve :

(2)	Np+pIpCp	A180
(3)	sin2I.NpDp	A192
(4)	NpDpCp	(2),(3)
(5)	NpDpCL(NpDp)	A171
(6)	NpDpCPp	(4),(5),A131/2, A372
	A425	A413, (6)

A426 NpDpDPp

Preuve :

(2)	NpDpCp	A425
(3)	NpDpC.NpDpD$\frac{1}{2}$	A244/2,A125,A189/4
(4)	PpC.$\frac{1}{2}$Dp	A419
(5)	PpC.PpIp	A375
(6)	PpIpC.$\frac{1}{2}$DpC.$\frac{1}{2}$DPp	
(7)	PpC.$\frac{1}{2}$DpC.$\frac{1}{2}$DPp	(5), (6)
(8)	Pp.($\frac{1}{2}$Dp)C.$\frac{1}{2}$DPp	(7), A129
(9)	PpCsin8	(4), A131/4
(10)	PpCdext8	(9), (8)
(11)	NpDpC.$\frac{1}{2}$DPp	(2), (10)
(12)	NpDpC.dext3.dext11	(3), (11), A131/2
	C.NpDpDPp	A194/2, A125
	A426	(12), A348

A426/2 NpDpDp (Preuve : A426, A374, A340)

A426/3 pDNpDNp (Preuve : A426/2, A193)

A427 PpC.PpDqCPq

Preuve :

(2)	PpC.$\frac{1}{2}$DPp	A125, ligne (10) de la preuve deA426
(3)	Pp.(PpDq)C.$\frac{1}{2}$DPp..PpDq	(2), A131/5
	C.$\frac{1}{2}$Dq	A257
	CPq	A421
	A427	(3), A129

A428 Pp+PqDP(p+q)

Preuve :

(2)	P(p+q)I.Pp+Pq+(p.L(NpDq))+(p.L(NqDp))+(p.L(NqDq))+ (q.L(NpDq))+(q.L(NpDp))+.q.L(NqDp)	A372,A159,A336,A337
	A428	(2), A346/3

A429 P(p+q)D.Pp+Pq

Preuve :

(2)	P(p+q)C.P(p+q)I.p+q	A375
(3)	p(p+q)C(P(p+q)Ip)+.P(p+q)C.P(p+q)Iq	(2),A195,rinf17
(4)	sin3C.P(p+q)C.P(p+q)Dp	A189/4,A118
(5)	dext3C.P(p+q)C.P(p+q)Dq	id
(6)	dext4+dext5	(3),(4),(5)
(7)	P(p+q)Dp+.P(p+q)Dq	(6),A348,rinf18
(8)	P(p+q)C.sin7CPp	A427
(9)	P(p+q)C.dext7CPq	id A131/4
(10)	sin7C.P(p+q)CPp..PpC(PpIp).sin7	(8),A123,A375,A131
(11)	dext7C.P(p+q)CPq..PqC(PqIq).dext7	(9), id.
(12)	dext10+dext11	(7), (10),(11)
(13)	dext10C.P(p+q)DPp	A129/2,A131/5,A359/2
(14)	dext11C.P(p+q)DPq	id
(15)	dext13+dext14	(12),(13),(14)
	A429	(15), A336

A430 P(p+q)I.Pp+Pq (Preuve : A429, A428, A314)

A430/2 PpDP(p+q) (Preuve : A430, A346/3)

A430/3 PNpDPN(p.q) (Preuve : A430/2)

A431 pDqD.PpDPq

Preuve :

(2)	PpC.PpDqCq	A427
(3)	PpC.PpIp	A375
(4)	PpIpC.PpC.pDqCPq	(2)
(5)	PpC.pDqCPq	(3), (4), A119
(6)	pDqC.PpCPq	(5), A124
(7)	pDqC.PpC.qDPq	(6), A375, A125,A189/4
(8)	pDqC.pDq..PpC.qDPq	(7), A131/4
	C.PpC.pDq..qDPq	A131, A129
	C.pDPq	A194/2
(9)	pDqC.PpC.PpIp..pDPq	(8),(3), A131, A131/2
	C.PpDp..pDPq	A189/4, A131/5
	C.PpDPq	A194/2
(10)	pDqC.PpDPq	(9), A348, rinf 18
	A431	(10), A237/2

A432 FPp+FPNp+.pINp

Preuve :

(2)	Pp.PNpC.pINp	A382
(3)	F(Pp.PNp)+.pINp	(2)
	A432	(3)

A433 P(pCq)I.NPNpCPq

Preuve : A429, A378/7

A433/2 P(pCq)I.pCPq (Preuve : A433, A378/6)

A434 pIqIP(pIq)
Preuve :

(2)	pIqC.P(pIq)	A393, A22
(3)	P(pIq)D.pIq	A374
(4)	dext2C.P(pIq)I.pIq	A385
(5)	dext4C.pIqDP(pIq)	A189/4
(6)	pIqC.pIqDP(pIq)	(2), (4), (5)
(7)	pIqDP(pIq)	(6), A348
	A434	(7), (3), A314

A435 PpDNPNp
Preuve :

PpDp	A374
DNNp	
D.NNp+NL(pDNp)	A347/3
DN(Np.L(pDNp))	
DNPNp	A372

A436/2 NPNp=p
Preuve :

(2)	PNpDNp	A374
(3)	pDNPNp	(2), A193
(4)	HPNpIHNp	A378/6
	IFp	
(5)	pCNPNp	(3), A126/2
(6)	Fp+p.	
(7)	HPNp+p	(4), (6)
(8)	HPNpCp	(7)
	A436/2	(8), (5), A117

A436/3 pDqD.NPNpDNPNq (Preuve : A193, A431)

A437 pDqIP(pDq) (Preuve : A434)

A438 pINpD.pI.pINp
Preuve :

(2)	pINpD.pINpI$\frac{1}{2}$	A244/2
(3)	pINpD.pI$\frac{1}{2}$	A390
(4)	dext2.dext3C.pI.pINp	
(5)	dext2.dext3D.pI.pINp	(4), A323/4
(6)	sin2D.dext2.dext3	(2), (3), A332
	D.dext5	(5), A341

A439 Pp.PNpD.pINp
Preuve :

(2)	Pp.PNpC.pINp	A381
(3)	Pp.PNpDp	A374, A327
(4)	Pp.PNpC.pI.pINp	(2), A438, A126/2, A118
(5)	dext4C.Pp.PNpD.pINp	(3)
(6)	sin4Cdext5	(4), (5)
	A439	(6), A348

A440 Pp.PNpI.pINp
Preuve :

(2)	NpDp.(pDNp)D.Pp.PNp	A426, A343
(3)	pINpD.Pp.PNp	(2), A314
	A440	A439, (3), A314

A441 P(p.Np)I.pINp (Preuve : A440, A424)

A442 P(p.Np).P(q.Nq)D.pIq
Preuve :

(2)	P(p.Np)I.pINp	A441
(3)	pINpI.pI$\frac{1}{2}$	A390
(4)	P(p.Np)D.pI$\frac{1}{2}$	(2), (3)
(5)	P(q.Nq)D.qI$\frac{1}{2}$	pareillem.

sin4.sin5D.dext4.dext5	(4), (5), A343
D.pIq	A323/4

A443 PNpDFHp (Preuve : A436, A378/2, A193)

A444 FH(pIq) (Preuve : A443, A412)

A444/2 FH$\frac{1}{2}$

A445 $\frac{1}{2}$%1 (Preuve : A351, A444/2, A220, df 19)

A445/2 P(Np+Pp) (Preuve : A373, A380, A430)

A445/3 PN(p.NPp) (Preuve : A445/2)

A445/4 NP(p.PNp) (Preuve : A374, A193, A181, A380,A424,A436/2)

Chapitre 12.- LE PLUS VRAI QUE FAUX

Tandis qu'il se peut fort bien qu'un fait soit, tout à la fois, plutôt vrai et plutôt faux (lorsqu'il se trouve qu'il est pareillement vrai et faux), il est en revanche tout à fait impossible qu'un fait soit en même temps assez vrai et assez faux, puisque, pour être assez vrai, il faut être plus vrai que faux. Un fait est assez vrai lorsqu'il est plutôt vrai et qu'il est entièrement faux que sa négation soit plutôt vraie.

Nous exprimons 'il est assez vrai que p' au moyen du foncteur '$\underline{\underline{P}}$' : "$\underline{\underline{P}}$p". Certaines des propriétés de 'P' sont possédées aussi par '$\underline{\underline{P}}$'. Il y en a toutefois qui cessent d'être valides pour le foncteur qui va maintenant retenir notre attention. D'autres, au contraire, sont valides pour '$\underline{\underline{P}}$', mais non pas pour 'P'. Par ex., tandis que "FPSp" n'est pas valide, "F$\underline{\underline{P}}$Sp" est valide.

A446 $\underline{\underline{P}}$pI.p.F(pDNp)

Preuve :

(2)	$\underline{\underline{P}}$pI.p.L(NpDp).F(Np.L(pDNp))	df 16, A372
	I.p.L(NpDp)..Hp+F(pDNp)	
(3)	HpDF(pDNp)	A426/3,A352/2
(4)	F(pDNp)I.Hp+F(pDNp)	(3), A192
(5)	$\underline{\underline{P}}$pI.p.L(NpDp).F(pDNp)	(2), (4)
(6)	F(NpDp)C.pDNp	A194/5, A251
	DL(pDNp)	A220/5
(7)	F(NpDp)I.F(NpDp).L(pDNp)	(6)
	A446	(5), (7)

A447 $\underline{\underline{P}}$p.$\underline{\underline{P}}qI\underline{\underline{P}}$(p.q)

Preuve :	$\underline{\underline{P}}$p.$\underline{\underline{P}}$qI.Pp.FPNp.Pq.FPNq	df 16
	I.P(p.q).F(PNp+PNq)	A424
	I.P(p.q).FP(Np+Nq)	A430
	I.P(p.q).FPN(p.q)	
	I$\underline{\underline{P}}$(p.q)	df 16

A448 $\underline{\underline{P}}$pI.p.L(Np%p) (Preuve : ligne (5) de la preuve de A446, A161, df 19)

A448/2 $\underline{\underline{P}}$NpI.Np.L(p%Np) (Preuve : A448, A368/2)

A449 $\underline{\underline{P}}$p=.Np%p (Preuve : A425,df16,A220,df 19)

A449/2 $\underline{\underline{P}}$Np=.p%Np

A450 $\underline{\underline{P}}$p=.$\frac{1}{2}$%Np (Preuve : A449, A417, A417/2)

A451 $\underline{\underline{P}}$p=.Np%$\frac{1}{2}$ (Preuve : A450, A368/2, A395)

A452 Hp**D**$\underline{\underline{P}}$p (Preuve : A426/3,A352/2,A178,A333)

A452/2 NP̲pD-p (Preuve : A452, A193)

A452/3 FpDP̲Np (Preuve : A452)

A453 NP̲pI.Np+L(pDNp) (Preuve : A446)

A454/2 NP̲NpILPp+p (Preuve : A454, A372,A161,A426/2,A352/4)

A454/3 NPNpI.LP̲p+p (Preuve : A372, A446, A324/2)

A454/4 pD½D.NPNpIp
Preuve :

(2)	FP̲pCFLP̲p	
	C.LP̅pIO	A202/3, rinf 18
(3)	LPpIOC.LPp+pIo	
	C.NPÑpIp	A454/3
(4)	pD½CF(½%p)	A367/3, A219
	CFP̲p	A450, rinf 18
(5)	pD½C.ÑPNpIp	(4), (2), (3)
	A454/4	(5), A237/2

A454/5 p%½D.NP̲NpIp (Preuve similaire)

A455 P̲p+P̲Np+P(p.Np) (Preuve : A367,A449,A449/2,rinf18,A441)

A445/2 PpI.P̲p+PSp (Preuve à partir de A446, parallèle à celle de A367 à partir de A363)

Les théorèmes portant des numéros compris entre A456 et A470, inclusivement, sont énumérés dans l'Annexe N° 2 de ce Livre I. Nous en omettons les preuves, car elles suivent de très près celles déjà présentées pour A374, A375, A377, A378, etc., hormis quelques complications supplémentaires.

A470 P̲p=FPNp (Preuve : A449,A367/3,A220, rinf 18)

A472 F(P̲p.P̲Np)
Preuve :

(2)	Pp+PNp	A373
(3)	L(Pp+PNp)	(2), A171
(4)	LPp+LPNp	(3), A159
(5)	FFPp+FFPNp	(4)
(6)	F(FPp.FPNp)	(5)
(7)	F(P̲Np.P̲p)	(6),A470,A471, rinf 18
	A472	(7)

A472/2 P̲N(p.P̲Np)
Preuve :

(2)	PpCHLPp	A171
	CP̲LPp	A452, A126/2
	CP̲(Np+p+LPp)	A469/2
	CP̲(Np+NP̲Np)	A454/2
	CP̲N(p.P̲Np)	
(3)	FPpC̄P̲Np	A471
	C.P̲Np+P̲NP̲Np	A116
	CP̲Ñ(p.P̲Np)	A465
	A472/2	(2), (3)

A472/3 P̲pC.P̲NpIO (Preuve : A472, A16)

A473 FP̲Sp (Preuve : A472, A447, df 14)

A474 FP̲(pIq) (Preuve : A412, A470, A219, rinf 18)

A475 FP̲½ (Preuve : A474, df 17)

A476 FP̲N½ (Preuve : A475, A395)

Avant de mettre fin à ce chapitre, relevons un trait particulièrement intéressant du foncteur 'P̲' : si nous pré-fixons chaque variable sententielle ou phrase atomique par le dit foncteur dans tous les cas où elle n'est pas précédée par une négation 'N', et que dans ce cas-ci nous préfixons la formule niée du même foncteur 'P̳', alors, en réduisant nos autres foncteurs à 'C', '.' et '+', nous obtenons un calcul sententiel quasi-intuitionniste, sans loi de contraposition. Ainsi, si nous prenons les onze axiomes de Heyting, nous constaterons aisément que, moyennant les adaptations ci-dessus mentionnées, les dix premiers sont valides dans ce calcul (que nous pourrions appeler un 'P̳-calcul'). De la même façon, dans l'axiomatisation de la logique intuitionniste proposée par Łukasiewicz le seul axiome non valide, traduit au P̳-calcul, serait le huitième.

Chapitre 13.- CONDITIONNEL ET BICONDITIONNEL ASTREIGNANTS

Nous appelons ainsi les foncteurs conditionnel et biconditionnel forts qui, par surcroît, posent une restriction aussi bien pour la protase que pour l'apodose, à savoir celle d'être plutôt vraies. Une formule en ce conditionnel astreignant, 'Q', à savoir "pQq" se lira : il est plutôt vrai que p seulement s'il est plutôt vrai que q". On verra dans la Section III de ce Livre quel rôle privilégié joue le foncteur 'Q' dans la théorie des ensembles Am, pour la définition des notions, fort utiles, de noyau et de confin, qui peuvent être exploitées pour introduire définitionnellement l'arithmétique sur la base de Am. A notre avis, d'ailleurs, parfois le sens à donner à une phrase courante du type "p seulement si q" est bel et bien "pQq", le contexte d'élocution pouvant éventuellement préciser que ce qui intéresse le locuteur c'est le cas où il ne peut pas arriver que p soit plutôt vrai, tandis que q soit assez faux.

Le conditionnel astreignant possède une propriété de MP restreinte, à savoir que, si l'antécédent est plutôt vrai, le conséquent l'est aussi; mais il ne possède pas le MP tout court : du fait qu'il soit vrai que p, et que "pQq", il ne s'ensuit pas qu'il soit vrai que q.

A477 pQqI.FPp+Pq (Preuve : df 21)

A478 pQq.(qQp)I.p+qQ.p.q (Preuve:df21,A187/2,A430,A424)

A479 PpC.pQqCPq (Preuve : df 21, A121)

A480 P̳NpC.pQq (Preuve : A471, df 21, A128/2)

A481 pQqC.qQrC.pQr (Preuve : df 21, A125)

A482 PqC.pQq (Preuve : df 21, A127)

A485 pQq+.qQr (Preuve : A120/4, df 21)

A486 pQ(qQr)I.qQ.pQr

Preuve :	pQ(qQr)I.FPp+P(PqCPr)	df 21
	I.FPp+P(FPq+Pr)	
	I.FPp+PFPq+PPr	A430
	I.FPp+HPNPq+Pr	A380, A378/7
	I.FPp+HNPq+Pr	A378/6
	I.FPp+FPq+Pr	
	I.FPq+.FPp+Pr	
	I.PqC.HNPp+Pr	
	I.PqCP(PpCPr)	A430,A380,A378/7
	I.qQ.pQr	df 21

A487 pQq.(qQp)I.P(p.q)+FP(p+q) (Preuve : A187,A424,A430,df21)

A488 Pp=Pq=.pQq..P̳NpCP̳Nq (Preuve : A212/2, df 21,A470,A219, rinf 18)

On trouvera dans l'Annexe N° 2 de ce Livre un certain nombre d'autres théorèmes en 'Q' très facilement démontrables après les résultats déjà obtenus. En dépit de l'étroite parenté entre 'Q' et 'C' et du fait que tous ces théorèmes sont parallèles à d'autres qui ont été préalablement démontrés pour le foncteur 'C' (notamment dans les Chapitres 2 et 5 de cette Section), il faut éviter la possible méprise de croire que toutes les formules valides en 'C' demeurent valides, soit lorsqu'on remplace l'occurrence principale de 'C' par une occurrence de 'Q', soit lorsqu'on substitue à chaque occurrence de 'C' une occurrence de 'Q'. Une formule dont la validité n'est pas préservée par le premier type de substitution c'est "pC.qCp", un contre-exemple pour le second type de substitution c'est "pC.qZHq".

On trouvera dans l'annexe N° 2 des théorèmes valides en 'M', le biconditionnel astreignant. Voici maintenant quelques théorèmes en '$\underset{I}{=}$', un biconditionnel astreignant plus fort que 'M' :

A503/3 $p\underset{I}{=}qI.pQq..qQp..NpQNq..NqQNp$ (Preuve;df37,df11,df21)

A503/4 $p\underset{I}{=}qI.P(p.q)+FP(p+q)..PN(p+q)+FPN(p.q)$ (Preuve :A487, A503/3)

A503/5 $p\underset{I}{=}q\underline{=}.\tfrac{1}{2}Dp\underline{=}(\tfrac{1}{2}Dq)..pD\tfrac{1}{2}\underline{=}.qD\tfrac{1}{2}$ (Preuve:df37,A200,rinf18,A193, A395)

A503/7 $p\underset{I}{=}qC.N(p+q)D(p.q)+.p+q\%N(p.q)$

Preuve:

(2) $Pp\underline{=}Pq\underline{=}.NpDp\underline{=}.NqDq$ — A200,A425,rinf18

$\underline{=}.NpDp\overline{.}(NqDq)+F(NpDp+.NqDq)$ — A187

(3) $\text{sinde}\overline{\text{x}}\text{t}2C.N(p+q)D.p.q$ — A346/4,A126/2

(4) dextdext2C.p%Np..q%Nq — A367/3,A131/3

(5) p%NpC.p%.Np+Nq — A346/3,A367/6,A126/2

C.p%N(p.q)

(6) q%NqC.q%N(p.q) — id

(7) sin5.sin6C.p+q%N(p.q) — (5),(6),A185,A367/5

(8) dextdext2Cdext7 — (4), (7)

(9) $Pp\underline{=}PqC.N(p+q)D(p.q)+.p+q\%N(p.q)$ — (2),(3),(8),A194,A129

(10) $PN\overline{p}\underline{=}PNqC.p.qDN(p+q)+.N(p.q)\%.p+q$ — pareillem.

A503/7 — (9),(10),A131/3,A368/2,df37

Chapitre 14.- L'INFINITESIMALEMENT VRAI

Il y a des faits qui sont aussi peu vrais que possible, tout en n'étant pas entièrement faux. Lorsque, d'un certain point de vue, un fait est vrai, mais aussi peu vrai que possible, nous disons que, de ce point de vue-là, il est minimalement vrai, ou infinitésimalement vrai. Dans de pareils cas, on dit aussi qu'il est pratiquement tout à fait faux que telle chose arrive; toutefois, l'expression 'pratiquement tout à fait faux' pourrait être identifiée aussi, quant à son sens, à 'quasiment tout à fait faux', qui, à notre avis, possède d'autres conditions de vérité, bien qu'apparentées : tandis que, d'un fait plus qu'infinitésimalement vrai, il est entièrement faux de dire qu'il est minimalement (ou infinitésimalement, ou un rien) vrai, il est, en revanche, infinitésimalement vrai (non pas entièrement faux) de dire qu'il est quasiment tout à fait faux. Enfin, il y a une synonymie (sémantique sinon stylistique) entre 'il est infinitésimalement vrai que ...' et 'il est imperceptiblement vrai que...', puisque, dans la plupart des contextes, la qualification 'imperceptiblement' ne se réfère point ou guère à des perceptions proprement dites, mais à n'importe quel procédé de vérification mensurante. Lorsque la vérité d'un fait, tout en pouvant être constatée de quelque façon, n'atteint pas un seuil de mesurabilité principielle, c'est que le fait en question n'a lieu (ou n'est vrai) qu'infinitésimalement ou imperceptiblement. Une expression qui caractérise encore mieux cet état de choses propre au minimalement vrai c'est le syntagme espagnol 'un si es no cierto' (que l'on ne traduit qu'approximativement comme 'un rien vrai'); une traduction littérale nous donnerait : 'un oui-c'est-non vrai'. C'est précisément une situation où le oui est un non, car c'est le plus faible et le plus insignifiant de tous les degrés possibles du oui.

Avant d'entreprendre la démonstration des theorèmes concernant l'infinitésimalement vrai, il nous faut, de par la nature des axiomes que nous nous sommes donnés, passer par quelques théorèmes portant sur la surconjonction '^', que nous avions frôlée au Chapitre 5 (A194/3 et A194/4) et qui fera l'objet d'une étude plus fuillée au Chapitre 15.

A504 p^qI.q^p (Preuve : A13)

A504/2 1^pIp

Preuve :

(2)	pD.1^p	A14, A504
(3)	1^pDp	A194/3, A504
	A504/2	(2), (3), A117? A314

A504/3 Nà

Preuve :

(2)	à%½	A28, A367/3
	Nà	(2), A371/6

A504/4 NpC.pDNà

Preuve :

(2)	1Dp+(pD.1^Nà)+.1IN(Np^Nà)	A24, df46, df47
(3)	Hp+(pDNà)+.1IN(Np^Nà)	A504/2, (2), A351/2, rinf18
(4)	Hp+(pDNà)+F(Np^Nà)	(3), A202/5, rinf 18
(5)	F(Np^Nà)CF(Np.Nà)	(3), A202/5, rinf 18
	C.FNp+FNà	
	C.Hp+FNà	
(6)	A504/3C./FNàIO	A137/2
(7)	dext5IHp	(6)
(8)	F(Np^Nà)CHp	(5), (7)
(9)	Hp+(pDNà)+Hp	(4), (8), A117, A169
	FNp+.pDNà	(9)

A504/5 p%1C.pDNà (Preuve : A504/4, A371/3, rinf 18)

A504/6 pC.àDp (Preuve : A504/4, A193)

A504/7 à

Preuve :

(2)	àIOC.N(N½^NO)D(½^NO)C.½IO&½+.N½IO&N½	A27, A22, df30, df46, df47
(3)	sin2C.N(½^1)D(½^1)C.½IO&½	(2), df18, A395
	C.N½D½C.½IO&½	A504, A504/2
	C.½D½C.½IO&½	A395
	C.½D½C.½IO	A276
	C.½D½CF½	A202/3, rinf 18
(4)	A101/2C./F½IO	A137/2
(5)	sin2C.½D½CO	(3), (4)
	CF(½D½)	A291
(6)	½D½	A101/3
(7)	Fsin2	(5), (6), A171/2
	à	(7), A219/2, A172

A505 YpC.p..qC.pDq
Preuve :
(2) pIà.pCp
(3) pIà.pC.pIà
C.qC.pDq A504/6
(4) pIà.pC.p..qC.pDq (2), (3), A131/3
A505 (4), df 30

A505/2 Yà
Preuve :
(2) àIà
(3) 2.A504/7 (2), A504/7
A505/2 (3), df 30

A506 Yp.YqC.pIq (Preuve : df 30, A185, A125)

A507 YpC.p%½ (Preuve : df 30, A28, A367/3, rinf 18)

A507/2 YpC.½%Np (Preuve : A5o7, A368/2, A395)

A508 fpI.F(pIà).p (Preuve : df 31, df 30, A187/6)

A508/2 FfpI.L(pIà)+Fp (Preuve : A508, A157)

A509 f½ (Preuve : A508,A101/2,A28,A189/4,A117)

A509/2 p=.àDp (Preuve : A504/6,A118,A504/7,A353,A117)

A510 fp=.à%p
Preuve :
(2) fpI.F(pIà).p A508
(3) fpCF(pIà) (2), A122/2
(4) fpCp A115, df 31
(5) pC.àDp A509/2
(6) fpC.àDp.F(pIà) (5),(4),(3),A125,A131/3
(7) àDp.F(pIà)C.p.F(pIà) A504/7,A22,A353,A118,A131/5
A510 (6),(7),(2),A363

A510/2 fp=.Np%Nà (Preuve : A510, A368/2)

A510/3 fNp=.p%Nà (Preuve : A510/2)

A510/4 Yp=.pIà (Preuve : df 30,A504/7,A200,A196/4,A236/3)

A510/5 FfpI.LYp+Fp (Preuve : A508/2,A510/4,A223)

A510/6 pDà=.Fp+Yp
Preuve : pDà=F(à%p) A367/3, A219
=Ffp A510
=.FFYp+Fp df 31
=.LYp+Fp A157
=.Yp+Fp A172, rinf 18

A511 Hp+.pDNà (Preuve : A504/4, df 7, df 5)

A511/2 p%à=Fp (Preuve : A509/2, rinf 18, A367/3)

A511/3 YpC.YpIp (Preuve : df30,A276,A178/3,A164,rinf18,A125)

A511/4 fpC.fpIp (Preuve:A508,A276,A178/3,rinf18, A125)

A511/5 pDqD.fpDfq
Preuve :
(2) pDqD.F(pIà).pDq A327
C.fpDq A126/2, A508
C.fpC.fpDq A348,rinf 18
(3) fp.(pDq)C.fpDq (2), A129
(4) à%p.(pDq)C.fpDq (3),A510, rinf 18
(5) pDqD.à%pD.à%q A367/6
(6) à%p.(pDq)C.fpDq..à%q (5),A126/2,A125,A129,(4),A131/3
C.fpDfq A510,rinf18,A511/4,A131/5,A189/4

(7)	fp.(pDq)C.fpDfq	(6), A510, rinf 18
(8)	pDqC.fpC.fpDfq	(7), A129
	A511/5	(8), A237/2, A348, rinf 18

A511/6 f(p.q)I.fp.fq

Preuve :

(2)	p.qDp	A346/2
(3)	f(p.q)Dfp	(2), A511/5
(4)	f(p.q)Dfq	pareillem.
(5)	f(p.q)D.fp.fq	(3), (4), A117, A333
(6)	fp.fqI.p.q.F(pIà).F(qIà)	A518
	D.p.q.F(pIà+.qIà)	A189/4
	D.p.q.F(p.qIà)	A342/2, A353/3, A344
	Df(p.q)	A508
	A511/6	(5), (6), A117, A314

A511/7 FYp=.Fp+fp

Preuve :

(2)	FYpI.F(pIà)+Fp	df 30
	I.F(pDà)+F(àDp)+Fp	A314
(3)	FYp=dext2	(2), A218
	≡.F(pDà)+Fp	A509/2, rinf 18
	≡.à%p+Fp	A367/3, rinf 18
	≡.Fp+fp	A510, rinf 18

A511/8 YpIà+.YpIO

Preuve :

(2)	YpC.YpIà	A510/5,A511/3,A131/3,A125
(3)	FYpC.YpIO	A16
	A511/8	(2), (3)

A511/9a YpI.p.Ffp

Preuve :

(2)	Yp=.p.Ffp	A511/7, A172, rinf 18
(3)	FfpI1+.FfpIO	A230
(4)	FfpI1C.p.FfpIp	
(5)	FfpIOC.p.FfpIO	
(6)	p.FfpIp+.p.FfpIO	(3), (4), (5)
(7)	p.FfpCYp	(2)
	C.pIà	df 30
(8)	p.FfpIp+F(p.Ffp)	(6), A202/3, rinf 18
(9)	p.FfpC.p.FfpIp	(8)
	C.p.FfpIp..pIà	(7), A131/3
	C.p.FfpIà	
(10)	F(p.Ffp)C.p.FfpIO	A16
(11)	Yp.(p.Ffp)+.FYp.F(p.Ffp)	(2), A187 / A185, (9)
(12)	Yp.(p.Ffp)C.YpIà..àI.p.Ffp	ligne (2) de la preuve de **A511/8**,
	C.YpI.p.Ffp	
(13)	FYp.F(p.Ffp)C.YpIO..p.FfpIO	A185, A16
	C.YpI.p.Ffp	
	A511/9a	(11), (12), (13)

A511/9b FYpI.Fp+Lfp (Preuve : A511/9a)

A511/9c YpI.pIà&p (Preuve : A511/9a,df31,df30,A157, A164)

A511/10 fp.(pDq)Cfq (Preuve : A511/5, A126/2, A129)

A511/11 f1 (Preuve : A509, A511/10)

A511/12 pC.LfpIFYp

Preuve :

(2)	pC.fpCFYp	df 31, A22, A127
(3)	pC.FYpCfp	df 31, A117
(4)	pC.fp=FYp	(2), (3), A131/3

(5)	pC.LfpILFYp	(4), A223
	C.LfpIFYp	

A511/13 àISà (Preuve : A504/3, A509/2, df 14)

A511/14 YpISYp

Preuve :

(2)	YpC.YpIà	ligne (2) de la preuve deA511/8
	C.YpISYp	A511/13
(3)	FYpC.YpIO	A16
(4)	FYpCFYp	
	CF(Yp.NYp)	A116/3
	CFSYp	df 14
	C.SYpIO	A202/3, rinf 18
(5)	FYpC.YpIO..SYpIO	(3), (4), A131/3
	C.YpISYp	
	A511/14	(2), (5)

A511/15 fpDp

Preuve :

(2)	fpC.fpIp	A511/4
	C.fpDp	A189/4
	fpDp	(2), A348

A511/16 YpDp (Preuve similaire, à partir de A511/3, au lieu deA511/4)

A511/17 FYfp

Preuve :

(2)	YfpC.YfpIfp	A511/3
(3)	YfpDfp	A511/16
(4)	fpC.fpIp	A511/4
(5)	YfpC.YfpIfp..fpIp	(2),(3),(4),A126/2,A131/3
	C.YfpIp	
(6)	YfpC.fpIà	A510/4
(7)	fpCF(pIà)	A508, A22
(8)	fpIpC.fpCF(fpIà)	(7)
(9)	fpCF(fpIà)	(4), (8), A129/2
(10)	YfpCF(fpIà)	(3), A126/2, (9)
(11)	YfpC.fpIà.F(fpIà)	(6), (10), A131/4
	FYfp	(11), A291

A511/19 ffpIfp

Preuve :

(2)	ffpC.ffpIfp	A511/4
(3)	FffpCF(à%fp)	A510
	C.fpDà	A367/3, A219, rinf 18
	C.Ffp+Yfp	A510/6, rinf 18
	CFfp	A511/17, A251, A123
	C.Fffp.Ffp	A131/4
	C.ffpIfp	A202/4, rinf 18
	A511/19	(2), (3)

A511/21 f(p+q)I.fp+fq

Preuve :

(2)	fpDp	A511/15
	D.p+q	A346/3
(3)	ffpDf(p+q)	(2), A511/5
(4)	fpDf(p+q)	A511/19, (3)
(5)	fqDf(p+q)	pareillem.
(6)	fp+fqDf(p+q)	(4), (5), A328
(7)	f(p+q)D.p+q	A511/15
(8)	f(p+q)Dp+.f(p+q)Dq	(7), A336
(9)	f(p+q)Dfp+.f(p+q)Dfq	(8),A511/5,A511/19,A346/4
(10)	f(p+q)D.fp+fq	(9), A336
	A511/21	(6), (10), A314

A508

A511/22 Yp+fpIp

Preuve : Yp+fpI.L(pIà).p+.F(pIà).p — df30,A511/9c,A164,
I.L(pIà)+F(pIà).p
I.l.p — A204
Ip

A511/23 Y(p.q)I.Yp.Yq+(Yp.fq)+.Yq.fp

Preuve :
(2) Y(p.q)I.p.q.Ff(p.q) — A511/9a
I.p.q.Ffp+Ffq — A511/6
I.p.q.Ffp+.p.q.Ffq
I.p.q.(LYp+Fp)+.p.q..LYq+Fq — df 31
I.p.q.LYp+(p.q.Fp)+(p.q.LYq)+.p.q.Fq
I.p.q.LYp+.p.q.LYq
(3) YpC.YpIp — A511/3
(4) YpC.LYpIl — A178/3
(5) YpC.LYp.pIl — (4), A125
(6) YpC.LYp.pIp..pIYp — (3), (5), A131/3
C.LYp.pIYp
(7) FYpC.YpIO — A16
(8) FYpC.LYpIO — A16
(9) FYpC.LYpIYp — (8), (7), A131/3
(10) LYp.pIYp — (6), (9)
(11) LYq.qIYq — pareillem.
(12) Y(p.q)I.Yp.q+.Yq.p — (2), (11)
I.Yp.(Yq+fq)+.Yq..Yp+fp — A511/22
I.Yp.Yq+(Yp.fq)+(Yq.Yp)+.Yq.fp

A511/24 Fp+Yp+fp (Preuve : A511/22)

A511/25 HpIfHp

Preuve :
(2) Sà — A23,A22,A511/13
(3) FSHp — A233/3
(4) F(SHpISà) — (2),(3),A117,A251/6
(5) HpIàC.SHpISà
(6) F(HpIà) — (4), (5)
(7) FYHp — (6),A510/4, rinf 18
(8) FHp+LfHp — (7), A511/9b
(9) HpCLfHp — (8)
CfHp — A170
(10) fHpDHp — A511/15
(11) fHpC.fHpIHp — A511/4
CFSfHp — A233/3
(12) FfHpCFSfHp — A116/3, df 14
(13) FSfHp — (11), (12), A117
(14) 9C.7HpDfHp — (3), A220/4
A511/25 — (10), (14), A314

A511/26 HpIHfp

Preuve :
(2) HpDp — A178
(3) fHpDfp — (2), A511/5
(4) HfHpDHfp — (3), A352/2
(5) HHpDHfp — (4), A511/25
(6) HpDHfp — (5)
(7) HfpDHp — A511/15, A352/2
A511/26 — (7), (6), A314

A511/27 fpDf(p+q) (Preuve : A346/3, A511/21)

A511/28 Yp.qDY(p.q)

Preuve :
(2) Yp.qI.Yp..Yq+fq — A511/22
I.Yp.Yq+.Yp.fq

```
(3)  dext2D.dext2+.Yq.fp             A346/3
          DY(p.q)                    A511/23

A511/29  F(fp.Yp),  (Preuve : df 31, A22)

A511/30  Yp.àIYp
Preuve :
(2)  YpC.Yp.à                        A510/4, A511/3, A125
        C.Yp.àIYp                    A7, A125
(3)  FYpC.YpIO                       A16
         C.Yp.àIYp                   A125
     Yp.àIYp                         (2), (3)

A511/31  YpC.Yp.YqIYq
Preuve :  YpC.YpIà                   A510/4, A511/3, A125
            C.Yp.YqIYq               A511/30, A125

A511/32  LYp.YqI.Yp.Yq
Preuve :
(2)  LYpI1+.LYpIO                                A228
(3)  LYpI1CYp                                    A178/3
          C.Yp.YqIYq                             A511/ 31
(4)  LYpI1C.LYp.YqIYq
(5)  LYpI1C.Yp.YqIYq..LYp.YqIYq                  (3),(4),A131/3
          C.LYp.YqI.Yp.Yq
(6)  LYpIOC.LYp.YqIO
(7)  LYpIOC.YpIO                        A219/2,A219,rinf18;A202/3
          C.Yp.YqIO
(8)  LYpIOC.LYp.YqI.Yp.Yq                        (6),(7),A131/3
     A511/32                                     (2),(5),(8)

A511/33  Y(p+q)I.Yp.Yq+(Yp.Fq)+.Yq.Fp
Preuve :
(2)  Y(p+q)I.p+q.Ff(p+q)                         A511/9a
            I.p+q.Ffp.Ffq                        A511/21
            I.p.(Ffp.Ffq)+.q.Ffp.Ffq
(3)  p.(Ffp.Ffq)I.Yp.Ffp.Ffq+.fp.Ffp.Ffq         A511/22
                 I.Yp.Ffq                        A109/2,A116/3,A202/3
(4)  q.Ffp.FfqI.Yq.Ffp                           pareillem.
(5)  Y(p+q)I.Yp.Ffq+.Yq.Ffp                      (2),(3),(4)
            I.Yp.(LYq+Fq)+.Yq..LYp+Fp            A510/5
            I.Yp.LYq(Yp.Fq)+(Yq.LYp)+.Yq.Fp
(6)  Yp.LYqI.Yp.Yq                               A511/32
(7)  Yq.LYpI.Yq.Yp                               id
     A511/33                                     (5),(6),(7)

A511/34 à.pIà+.à.pIO
Preuve :
(2)  pC.à.pIà                        A504/6
(3)  FpC.à.pIO
     A511/34                         (2), (3)

A511/35  Yp.qIà+.Yp.qIO
Preuve :
(2)  YpC.qC.p.qIp                    A505, A115, A118
(3)  YpC.qC.Yp.qIYp                  A511/3,(2),A125 , A119
(4)  YpC.YpIà                        A510/4, A511/3, A131/3, A125
(5)  YpC.qC.Yp.qIà                   (3),(4), A125, A119
(6)  Yp.qC.Yp.qIà                    (5), A129
(7)  F(Yp.q)C.Yp.qIO                 A16
     A511/35                         (6), (7)
```

A511/36 YpC.Y(p.q)+F(p.q)

Preuve :

(2)	YpIpC.p.qIà+.p.qIO	A511/35
(3)	YpCdext2	A511/3, (2)
	C.Y(p.q)+F(p.q)	A510/4, A202/3, rinf 18

A511/37 YpC.Y(p+q)+f(p+q)

Preuve :

	YpCp	A511/16, A126/2
	C.p+q	A116
	C.Y(p+q)+f(p+q)	A511/22

A511/38a YpCqC.YpDq

Preuve :

(2)	YpC.YpIp	A511/3
(3)	YpC.qC.pDq	A505, A115, A125
(4)	dext2C.YpC.qC.YpDq	(3)
(5)	YpC.YpC.qC.YpDq	(2), (4)
(6)	YpC.qC.YpDq	(5), A119
(7)	YpCqC.YpC.YpDq	(6), A132
	C.YpDq	A348, rinf 18

A511/38b Yp=YqC.YpIYq (Preuve : A511/38a,A185, A314)

A511/39a YpC.pCqC.pDq (Preuve : A511/38a, A511/3, A125)

A511/39b Yp.qCrC.Yp.qDr

Preuve :

(2)	YpC(qCr)C.YpD.qCr	A511/38a
(3)	Yp.qCrC.YpD.qCr	(2), A129
	C.Yp.qDr	A348/2

A511/40 PpIPfp

Preuve :

(2)	A511/15D.7PfpDPp	A431
(3)	PpC.½Dp	A421
(4)	A509C.7½DpCfp	A511/10, A129
(5)	PpCfp	(3), (4)
(6)	PpC.PpIp	A375
(7)	fpC.fpIp	A511/4
(8)	PpC.fpIp	(5), (7)
(9)	PpC.PpIp..fpIp	(6), (8), A131/3
	C.PpIfp	
(10)	PpC.PpDfp	(9), A189/4
(11)	PpDfp	(10), A348
(12)	PPpDPfp	(11), A431
(13)	PpDPfp	(12), A380
	PpIPfp	(13), (2), A117, A314

A511/41 PpIfPp

Preuve :

(2)	fPpDPp	A511/15
(3)	PpDPfp	A511/40, A189/4, A125
	Dfp	A374
(4)	PpIpC.PpDfPp	(3), rinf 16
(5)	PpCsin4	A375
(6)	PpC.PpDfPp	(4), (5)
(7)	PpDfPp	(6), A348
	PpIfPp	(7), (2), A117, A314

A511/44a à%Nà (Preuve : A505/2, A507, A507/2, A131/3,A366)

A511/44b à%ù (Preuve : A511/44a, df 57)

A511/45 P̲ù (Preuve : A505/2, A507, A451,rinf 12b, df 57)

A511/46 YpDPNp
Preuve :
(2) YpC.pIà — A510/4
CPNp — A511/45, rinf 16
2C.7YpDPNp — A511/38

A511/47 PNYp
Preuve :
(2) YpIpC.YpDPNYp — A511/46
(3) YpCsin2 — A511/3
Cdext2 — (2)
(4) YpDPNYp — (3), A348
(5) FYDPNYp — A451
PNYp — (4), (5), A126/2

A511/48 fù (Preuve : A511/42, A511/45, A456)

A511/49a YpDfNp (Preuve : A511/3,A511/48, A125)

A511/49b tpDNYp (Preuve : A511/49a, df 87, A193)

A511/50 F(Yp.YNp)
Preuve :
(2) YpCfNp — A511/49a, A126/2
CFYNp — df 31, A22
(3) FYp+FYNp — (2), df 7
F(Yp.YNp) — (3)

A511/51 fSpI.Sp.FYp.FYNp
Preuve : fSpIf(p.Np) — df 14
I.fp.fNp — A511/6
I.FYp.p.FYNp.Np — df 31
I.p.Np..FYp.FYNp
I.Sp.FYp.FYNp — df 14

A511/52 FfSpI.Fp+Hp+LYp+LYNp
Preuve : FfSpIF(Sp.FYp.FYNp) — A511/51
I.FSp+FFYp+FFYNp
I.F(p.Np)+LYp+LYNp — A157
I.Fp+Hp+LYp+LYNp

A511/53 FYHp
Preuve :
(2) HpIfHp — A511/25
(3) FYfHp — A511/17
FYHp — (2), (3)

A511/54 (Preuve : A511/26, A511/18, A178, A353/2)

A511/57 NPNYpIYp
Preuve :
(2) PNYp — A511/47
(3) PNYpINYp — (2), A457
NPNYpIYp — (3)

A511/59 YNPNpIYp
Preuve :
(2) YNPNpC.NPNpIà — A510/4
(3) YNPNpCNPNp — A511/15, A126/2
Cp — A436/2, rinf 18
(4) pDNPNp — A374, A193
(5) NPNpIàC.pDà — (4)
C.Fp+Yp — A510/6, rinf 18
C.pCYp
(6) YNPNpC.pCYp — (2), (5)
(7) YNPNpCYp — A132, (6), (3)

```
(8)  YNPNpDYp                       A511/38, (7)
(9)  YpC.pD½                        A507, df 19, A22
       C.NPNpIp                     A454/4
       C.YNPNpIYp
       C.YpDYNPNp                   A189/4
(10) YpDYNPNp                       A348, (9)
     YNPNpIYp                       (8), (10), A314

A511/61  fNpDNfp
Preuve :
(2)  fNpDNp                         A511/15
(3)  NpDNfp                         A511/15, A193
     fNpDNfp                        (2), (3), A341

A511/62  fSpDSfp
Preuve :
(2)  fpDfp                          A101/3
(3)  fNpDNfp                        A511/61
(4)  fp.fNpD.fp.Nfp                 (2), (3), A343
     fSpDSfp                        (4), A511/6, df 14

A511/63  pDqD.YqD.Yp+Fp
Preuve :
(2)  YqC.qIà                        A510/4
       C.pDqC.pDà
            C.Yp+Fp                 A510/6, rinf 18
(3)  pDqC.YqC.Yp+Fp                 (2), A123
        C.YqD.Yp+Fp                 A511/38a
     sin3Ddext3                     (3), A237/2

A511/64  HpD.FfSp.FYp
Preuve :
(2)  HpD.Fp+Hp+LYp+LYNp             A346/3
       DFfSp                        A511/52
(3)  HpIHfp                         A511/26
(4)  HfpDfp                         A178
(5)  HpDfp                          (3), (4)
       DFYp                         df 31, A346/2
     HpD.FfSp.FYp                   (2), (6), A332

A511/65  Yp+.fpIp
Preuve :
(2)  fpC.fpIp                       A511/4
(3)  FpC.pIO                        A16
(4)  FpCFfp                         A511/15, A126/2, A133
       C.fpIO                       A16
(5)  FpC.pIO..fpIO                  (3), (4), A131/3
       C.pIfp
(6)  fp+FpC.fpIp                    (2), (5), A120/2
(7)  Yp+.fp+Fp                      A511/24
     Yp+.fpIp                       (7), (6), A169

A511/66  YNp+.tpIp
Preuve :
(2)  YNp+.fNpINp                    A511/65
(3)  fNpINpI.NfNpIp                 A191/2
(4)  YNp+.NfNpIp                    (2), (3)
     YNp+.tpIp                      (4), df 87

A511/67  YNpDfp  (Preuve : A511/49a)

A511/68a  Ffà  (Preuve : A505/2, A511/9a, A115)
```

A511/68b FYù (Preuve similaire)

A511/69 FY1

Preuve :

(2)	H1	A135
(3)	FH1	(2), A511/25
(4)	FYH1	(3), df 31, A22
	FY1	(4), A202/6a

A511/70 YtpIYp

Preuve :

(2)	FYNp+FYp	A511/50
(3)	FYNpC.NfNpIp	A511/66, A251
	C.YNfNpIYp	
(4)	FYpC.fp+Fp	A511/9b, A172, rinf 18
(5)	YNpDfp	A511/67
	Dp	A511/15
(6)	YNpCp	(5), A126/2
(7)	FpCFYNp	(6), A133
	C.YNfNpIYp	(3)
(8)	fpC.fp.YNp+.fp.FYNp	A132/3
(9)	fp.FYNpC.YNfNpIYp	(3), A125/2
(10)	fp.YNpC.NpIà	A510/4, A125/2
	C.fNpIfà	
(11)	fàIO	A511/68, A173
(12)	fp.YNpC.fNpIO	(10), (11)
	C.NfNpI1	A191/2, df 18
	C.YNfNpIY1	
(13)	Y1IO	A511/69, A16
(14)	fp.YNpC.YNfNpIO	(12), (13)
(15)	fp.YNpCFYp	df31,A22, A125/2
	C.YpIO	A16
(16)	Fp.YNpC.YNfNpIO..YpIO	(14), (15), A131/3
	C.YNfNpIYp	
(17)	dext8C.YNfNpIYp	(16), (9), A117, A120/2
(18)	sin8C.YNfNpIYp	(8), (17)
(19)	dext4Cdext3	(18), (7), A120/2
(20)	sin4Cdext3	(19), (4)
(21)	sin2+sin4Cdext3	(3), (20), A120/2
(22)	dext3	(21), (2)
	YtpIYp	(22), df 87

A511/71 Yp+.ftpItp

Preuve :

(2)	FYtpC.ftpItp	A511/65, A251
(3)	FYpC.ftpItp	(2), A511/70
(4)	FFYp+.ftpItp	(3)
	Yp+.ftpItp	(4), A157, A172, rinf 18

A511/72 pDqD.tpDtq

Preuve :	pDqD.NqDNp	A101/3, A193
	D.fNqDfNp	A511/5
	D.NfNpDNfNq	A193
	D.tpDtq	df 87

A511/73 pDtp (Preuve : A511/15, A193, df 87)

A511/74 Yq+.tpDqD.pDfq

Preuve :

(2)	FYqC.fqIq	A511/65, A251
(3)	A511/73D.7NfNpDqD.pDq	A341
(4)	dext2C.NfNpDqD.pDfq	(3)
(5)	FYqCdext4	(2), (4)
	A511/74	df87 ,(5),A157,A172,rinf18

A511/75 tp=p

Preuve :

(2)	FYNpC.tpIp	A511/66, A251
	C.tp=p	A218
(3)	YNpC.NpIà	A510/4
	C.pINà	
(4)	YNpCFfNp	A511/9a, A115
	C.fNpIO	A16
	C.tpIl	df 18, df 87
(5)	YNpC.pINà..tpIl	(3), (4), A131/3
(6)	Nà=p	A511/12, A290/6
(7)	dext5C.p=tp	(6), rinf 17 bis
(8)	sin5Cdext7	(5), (7)
	tp=p	(2), (8)

A511/76 FYNYp

Preuve :

(2)	F(YYp.YNYp)	A511/50
(3)	F(Yp.YNYp)	(2), A511/20
(4)	FYp+FYNYp	(3)
(5)	YpCFYNYp	(4)
(6)	FYpC.Fp+fp	A511/9b, A172, rinf 18
(7)	FpCFYp	A511/16, A126/2, A133
	C.NYpIl	A202/5, rinf 18
(8)	FYl	A511/69
(9)	fpC.fpIp	A511/4
	CFYp	A511/17
	C.NYpIl	A202/5, rinf 18
(10)	Fp+fpC.NYpIl	(7), (9), A117, A120/2
	FYNYp	(5), (11)

A511/77 tYpIYp
(Preuve : A511/66, A251, A511/76)

A511/78 pRq=.Yp+Fp+fq (Preuve : df35,df7,A511/5,A172,rinf 18)

A511/79 fpC.pRqCfq (Preuve : df 35, A121)

A511/80 H(àRp) (Preuve : A505/2, A511/9a, A115, A272)

A511/81 pDqC.pRq (Preuve : A511/5, A126/2, df 35)

A511/82 pRqIN(fp&Nfq) (Preuve : df 35, A271)

A511/83 Yp+FpC.pRq (Preuve : A116, A511/78, rinf 18)

A511/84 pRqC.p'Rq'C.p.p'R.q.q' (Preuve:A185,df35, A511/6)

A511/85 fqC.pRq (Preuve : df 35, A127)

A511/86 pRq.(qRp)I.fp=fq (Preuve : df 35) /A511/21, A187)

A511/87 pRq.(qRp)I.f(p.q)+Ff(p+q) (Preuve:A511/86,A511/6,

A511/88 pRqC.qRrC.pRr (Preuve : df 35, A125)

A511/89 pRp (Preuve : df 35, A103)

A511/90 pRq.(qRp)=.fp.fq+(Fp.Fq)+(Yp.Yq)+(Yp.Fq)+.Yq.Fp
(Preuve : A511/87, A218, A510/5, A172+rinf18,A511/33,A511/6)

A511/91 p+àI.fp+à

Preuve :

(2)	fpC.fpIp	A511/4
	C.p+àI.fp+à	
(3)	FpCFfp	A511/15, A126/2, A133
	C.Fp.Ffp	A131/4
	C.pIfp	A202/3, rinf 18, A189/2
(4)	YpC.pIà	A510/4
	C.p+àIà	

(5) YpCFfp A511/9a, A115
C.fp+àIà A202/3, rinf 18, A110/3
(6) YpC.dext4.dext5 (4), (5), A131/3
C.p+àI.fp+à
(7) sin2+sin3C.p+àI.fp+à (2),(3),(6), A120/2
dext7 (7), A511/24

A511/92 gp (Preuve : A504/7, A116, df 41)

A511/93 p=.pIgp (Preuve : A509/2, A192, df 41)

A511/94 p%gp=Fp
Preuve :
(2) Fp=F(pIgp) A511/93, rinf 18
(3) Fp=.p%gp+.gp%p (2), A368 / rinf 18
(4) F(gp%p) df40,A346/3,A347/3,A172,A157,
(5) dext3I.p%gp (4), A202/3, A110/3
A511/94 (3), (5)

A511/100 hpI.p.ù (Preuve : df 41, df 42, df 57)

A511/101 hp%p=Hp (Preuve : df 5,df42,A511/94,A368/2)

A511/105 Nhp (Preuve : A511/92, df 42)

A511/106 hgpIghp
Preuve :
(2) hgpI.gp.Nà A511/100, df 57
I.p+à.Nà df 41
I.p.à+.à.Nà
I.p.Nà+à df 14, A511/13
(3) ghpI.p.Nà+à df 41, A511/100, df 57
hgpIghp (2), (3)

A511/107 Sp=.pIhp..pIgp (Preuve : A511/93, A511/102,rinf18)

Un certain nombre d'autres théorèmes contenant les foncteurs 'f', 'g', 'h', 'R', 't' et la constante définie 'ù' sont énumérés dans l'Annexe N° 2 de ce Livre. Il nous semble superflu de les démontrer. Un bref commentaire sur les tout derniers théorèmes démontrés nous paraît pertinent : 'hp' est, pour n'importe quel p, une phrase fausse, ne fût-ce qu'infinitésimalement fausse; en effet : "hp" se lit : "il est excessivement vrai que p"; or, rien n'est excessivement vrai, et c'est pourquoi, lorsque "p" est tout à fait vrai, "hp" est infinitésimalement faux. De la même façon, "gp" est toujours vrai, ne fût-ce qu'infinitésimalement; ainsi, si "p" est tout à fait faux, "gp" est infinitésimalement vrai, car il sera toujours vrai qu'il est vrai ou peu s'en faut que p (et ce, quel que soit p).

Nous mettrons fin à ce chapitre par les trois théorèmes suivants :

A512 N(Nà^Nà)Dà
Preuve :
(2) YpC.N(Np^Nà)D.p^Nà A27,df46,df47,A115,A120/2,A22
Dp A194/3
A512 (2), A505/2

A512/2 NàDnNà (Preuve : A512, A193, df 46)

A512/3 ùDnù (Preuve : A512/2, df 57)

Chapitre 15.- SURCONJONCTION

Nous avons déjà eu à plusieurs reprises l'occasion d'examiner quelques théorèmes en '^', i.e. la surconjonction= ou conjonction astreignante. La lecture la plus naturelle de ce foncteur c'est le 'et...et...' emphatique (ou bien le 'non seulement...mais aussi'). Dans le cas où l'un des membres conjonctifs est, ou bien 1, ou bien 0, ou bien à, la surconjonction est équivalente à la conjonction; elle l'est aussi, comme on le verra lorsque les deux membres conjonctifs sont ù, i.e. le presque tout à fait vrai. Dans tous les autres cas, cependant, la valeur de vérité d'une formule surconjonctive est inférieure à celle de la formule conjonctive correspondante.

A513 p.qC.p^q (Preuve : A11, A22, A115, df 20)

A514 p^qD.p.q (Preuve : A11, A22, df 20)

A515 p≡.p^p

Preuve :

(2)	p^pC.p.p	A514, A126/2
(3)	p.pC.p^p	A513
	p≡.p^p	(2), (3), df 11

A515/2 p^pDp (Preuve : A514, A7)

A515/3 XpDp (Preuve : A515/2, df 22)

A515/4 XNpDNXp

Preuve :

(2)	XNpDNp	A515/3
(3)	XpDp	id
(4)	NpDNXp	(3), A193
	XNpDNXp	(2), (4), A341

A516 p^q≡.p.q (Preuve : A504, A513, A126/2, df 11)

A516/2 Xp≡p (Preuve : A516, df 22)

A516/3 FXp≡.pIO (Preuve : A516/2, A220, A202/3, rinf 18)

A517 p^OIO

Preuve :

(2)	p^O≡.p.O	A516
	≡O	A110
(3)	F(p^O)	(2), A220, rinf 18, A134
	p^OIO	(3), A16

A517/2 FqC.p^qI.p.q

Preuve :

(2)	FqC.p^qIO	A16, A517
	I.p.O	A110
(3)	qIOC.FqC.p^qI.p.q	(2)
(4)	FqC.FqC.p^qI.p.q	(A16, (3)
	A517/2	(4), A119

A518 HpC.p^+qI.p+q (Preuve : A117/2, df 5, df 49)

A518/2 p^q^rD.p^r^q (Preuve : A11, A115, A504).

A519 p^qDq (Preuve : A194/3, A504)

A520 p^FpIO (Preuve : similaire à celle de A517)

A521 pDqD.p^rD.q^r (Preuve : A13, A504, df 10, A237/2)

A521/2 pDq.(p'Dq')D.p^p'D.q^q' (Preuve : A13, df 10, A346/2)

A522 p^q^rD.p^.q^r

Preuve :	p^q^rD.q^r^p	A518/2
	D.p^.q^r	A504

A523 p^(q^r)D.p^q^r (Preuve: A522, A504)

A524 p^q^rI.p^.q^r (Preuve : A522, A523, A314)

A525 p^(q+r)I.p^q+.p^r

Preuve :

(2)	q+rIq+.q+rIr	A195
(3)	q+rIqC.p^(q+r)I.p^q	A521, A504
	C.p^(q+r)D.p^q	A189/4
(4)	q+rIrC.p^(q+r)D.p^r	pareillem.
(5)	p^(q+r)D(p^q)+.p^(q+r)D.p^r	(2),(3),(4),A194
(6)	p^(q+r)D.p^q+.p^r	(5), A336
(7)	qD.q+r	A346/3
(8)	p^qD.p^(q+r)	(7), A521, A504
(9)	p^rD.p^(q+r)	pareillem.
(10)	p^q+(p^r)D.p^.q+r	(8), (9), A328
	A525	(6),(10), A314

A526 p.(q^r)=.p.q^.p.r (Preuve : A516, A7, A10)

A527 p+(q^r)=.p+q^.p+r (Preuve : A516, A109, rinf 18)

A530 p^YqI.p.Yq

Preuve :

(2)	p^YqDYq	A519
(3)	p^YqDO+.p^YqDà	(2), A511/8, rinf 17
(4)	p^YqDOCF(p^Yq)	A351/3
	CF(p.Yq)	A513, A133
(5)	p^YqDOC.p^YqI.p.Yq	(4),A131/4,A202/3; rinf18
(6)	p^YqDàC.F(p^Yq)+Y(p^Yq)	A510/6
(7)	F(p^Yq)C.p^YqI.p.Yq	A513, A133,A131/4,A16
(8)	Y(p^Yq)C.p^Yq	A510/16, A126/2
	C.p.Yq	A514, A126/2
	C.p.YYq	A511/20
	CY(p.Yq)	A511/28
(9)	Y(p^Yq)C.Y(p^Yq).Y(p.Yq)	(8), A131/4
	C.p^YqI.p.Yq	A506
(10)	dext6C.p^YqI.p.Yq	(7),(10), A117, A126/2
(11)	sin6C.p^YqI.p.Yq	(6), (10)
	A530	(3), (5),(11), A167

A530/2 YpD.p^qI.p.q (Preuve : A511/3,A530,A511/38)

A511/3 à^àIà (Preuve : A505/2, A530/2)

A531 f(Sp.Sq)+(YNp.fSq.F(qI.q^Nà))+(YNq.fSp.F(pI.p^Nà))C.p^q
%.p.q
(Preuve : A12, A367 + rinf 18, df 46)

A531/2 YNp.YNqD.p.qI.p^q

Preuve :

(2)	YNp.YNqC.p^qD.p.q	A514, A127
(3)	NàD.Nà^Nà	A512/2,df46,A115,A193
(4)	Nà.NàD.Nà^Nà	(3), A7
(5)	YNp.YNqC.NpIà..NqIà	A510/4, A185
	C.pINà..qINà	A136
	C.p.qI.p^q	(4), rinf 17 bis
(6)	YNp.YNqC.p.qD(p^q)..p^qD.p.q	(5), (4), A131/3
	C.p.qI.p^q	A314
	A531/2	A511/39b, (6)

A531/3 Nà^NàINà (Preuve : A531/2, A505/2)

A532 p^1Ip (Preuve : A504, A504/2)

A532/2 P(p^q)D.Pp^Pq

Preuve :

(2)	P(p^q)C.P(p^q)I.p^q	A375
(3)	P(p^q)D.Pp.Pq	A514, A431, A424

(4) P(p^q)C.PpIp..PqIq — (3), A375, A126/2, A185
C.Pp^PqI.p^q — rinf 17 bis
C.Pp^PqIP(p^q) — (2), A131/3
C.P(p^q)D.Pp^Pq — A189/4
A532/2 — (4), A348

A533 HqC.p^qIp (Preuve : A532, A202/2, rinf 18)

A533/2 HqC.p^qI.p.q (Preuve : A202/2, A533, A125, A119)

A534 Hp.qI.Hp^q
Preuve :
(2) FHpC.HpIO — A202/3
(3) HpC.HpIp — A202/10
(4) HpC.q^HpIq — A532
C.q^HpI.q.Hp — A111, (3), A125, A119
C.Hp.qI.Hp^q — A504
(6) FHpC.q^HpIO — A517
C.q^HpI.q.O — A110
C.q^HpI.q.Hp — (2), A125, A119
C.Hp.qI.Hp^q — A504
A534 — (4), (6)

A535 Fp.qI.Fp^q
Preuve :
(2) FpIO+.FpI1 — A230
(3) FpIOC.Fp^qIO — A517, A504
C.Fp^qI.O.q — A117
(4) FpIOC.Fp.qI.Fp^q — (3), A119
(5) FpI1C.Fp^qIq — A532, A504
C.Fp^qI.1.q — A111
(6) FpI1C.Fp.qI.Fp^q — (5), A119
A535 — (2), (4), (6)

A536 Fp^FqIF(p+q) (Preuve : A535, A18)

A537 F(p^q)I.Fp+Fq (Preuve : A220, A516, A223, A156/2)

A538 Lp^qI.p&q (Preuve : A534, A146, A164)

A539 L(p^q)I.Lp.Lq (Preuve : A223, A516, A161)

A540 Lp^LqIL(p^q) (Preuve : A534, A146, A539)

A541 H(p.q)IH(p^q)
Preuve :
(2) H(p.q)CHp — A162, A115
C.pI1 — A202/2, rinf 18
C.p^qIq — A532, A504
(3) H(p.q)CHq — A162, A115
C.qI1 — A202/2; rinf 18
(4) H(p.q)C.p^qI1 — (2), (3), A119
CH(p^q) — A202/2, rinf 18
(5) H(p.q)DH(p^q) — A233/3,(4),A220/4,rinf 18
(6) H(p^q)DH(p.q) — A514, A352/2
A541 — (5), (6), A117, A314

A542 H(p^q)I.Hp^Hq (Preuve : A162, A534, A541)

A314

A542/2 f(p^q)I.fp^fq (Preuve : A26, A514,A511/4,A189/4,A348,

A542/3 p^qI(p.q)=.Hp+Hq+Fp+Fq+Yp+Yq+(YNp.YNq)+(YNp..qInq)+.
YNq..pInp
Preuve :
(2) HpC.p^qI.p.q — A533/2, A504
(3) HqC.p^qI.p.q — id
(4) FpC.p^qI.p.q — A517/2,A504
(5) FqC.p^qI.p.q — id

(6) YpC.p^qI.p.q A530/2,A126/2
(7) YqC.p^qI.p.q id
(8) YNp.YNqC.p^qI.p.q A531/2
(9) YNp=.NpIà A510/4
=.pINà A191/2
(10) qI(q̄^Nà)C.p^qI.p^q^Nà A524
(11) dext9C.qI(q^Nà)C.p^qI.q^Nà^Nà ( ), A5o4
C.p^qI.q^Nà A523,A531/3
(12) sin9Cdext11 df11,(9),(11),A22
(13) qI(q^Nà)C.YNpC.p^qI.q^Nà (12), A124
(14) qI(q^Nà)C.YNpC.p^qIq (13), A119
(15) qI(q^Nà).YNpC.p^qIq (14),A129
(16) q^NàDNà A519
(17) dext9C.qÑàDp (16)
(18) sin9C.q^NàDp (9), (17)
(19) sin10C.sin9C.qDp (18)
C.qI.p.q
(20) sin10.sin9C.qI.p.q (19),A129
C.qI(q^Nà).YNpC.p^qI.p.q (15)
(21) YNp.(qI.q^Nà)C.p^qI.p.q (20),A119
(22) YNq.(pI.p^Nà)C.p^qI.p.q pareillem.
(23) Hp+Hq+Fp+Fq+Yp+Yq+(YNp..qI.q^Nà)+(YNp..pI.p^Nà)C.p^qI.p.q
A120/2,A117,(2),(3),(4),(5),
(6),(7),(8),(21),(22)
(24) FdextA12CFsinA12 A12,A133
(25) p.qI(p^q)C.p.qD.p^q A22,A314
(26) p.qI(p^q)CFsinA12 rinf18,A172,(25),(24),A157
C.FfSp+FfSq.(FYNp+FfSq+.qI.q^Nà).(FYNq+FfSp+.
pI.p^Nà)
C.Fp+Hp+Yp+YNp+Fq+Hq+Yq+YNq.(Hp+fNp+Fq+Hq+Yq+YNq+.
qI.q^Nà)..Hq+fNq+Fp+Hp+Yp+YNp+.pI.p^Nà
A511/9b,A172,rinf 18,A511/52
C.Fp+Hp+Yp+YNp+Hq+(Fq+YNq+Yq..fNq+.pI.p^Nà)..Fq+
Hq+Yq+YNq+Hp+.Fp+YNp+Yp..fNp+.qI.q^Nà
A7, A109
C.Fp+Hp+Yp+YNp+Hq+(Fq+YNq+Yq.fNq+.Fq+YNq+Yq..pI.
p^Nà)..Fq+Hq+Yq+YNq+Hp+.Fp+YNp+Yp.fNp+.Fp+YNp
+Yp..qI.q^Nà
C.Fp+Hp+Yp+YNp+Hq+(Fq.fNq)+(YNq.fNq)+(Yq.fNq)+
(Fq..pI.p^Nà)+(YNq..pI.p^Nà)+(Yq..pI.p^Nà)..Fq+
Hq+Yq+YNq+Hp+(Fp.fNp)+(YNp.fNp)+(Yp+fNp)+(Fp..
qI.q^Nà)+(YNp..qI.q^Nà)+.Yp..qI.q^Nà
(27) fNq.FqIFq A511/26, A142, A172
(28) fNp.FpIFp id
(29) fNq.YqIYq A511/49a
(3o) fNp.YpIYp id
(31) fNq.YNqIO A511/29, A173
(32) fNp.YNpIO id
(33) sin26C.Fp+Hp+Yp+YNp+Hq+(Fq..pI.p^Nà)+(Yq..pI.p^Nà)+(YNq..
pI.p^Nà)..Fq+Hq+Yq+YNq+Hp+(Fp..qI.q^Nà)+(Yp..qI.q^Nà)+.
YNp..qI.q^Nà (26),(27),(28),(29)
(30),(31),(32),A109,A110/3
(34) Fq.(pI.p^Nà)CFq A22
(35) Yq.(pI.p^Nà)CYq id
(36) Fp+Hp+Yp+YNp+Hq+(Fq..pI.p^Nà)+(Yq..pI.p^Nà)+(YNq..pI.p^Nà)
C.Fp+Hp+Yp+YNp+Hq+Fq+Yq+.YNq..pI.p^Nà (34),(35)A119,A169,
A185
(37) Fq+Hq+Yq+YNq+Hp+(Fp..qI.q^Nà)+(Yp..qI.q^Nà)+(YNp..qI.q^Nà)
C.Fq+Hq+Yq+YNq+Hp+Fp+Yp+.YNp..qI.q^Nà id
(38) dext33Cdext36.dext37 (36),(37),A185
C.Hp+Hq+Fp+Fq+Yp+Yq+(YNp+.YNq..pI.p^Nà)..YNq+.YNp
..qI.q^Nà

(39) sin26Cdext38 (33), (38)
C.Hp+Hq+Fp+Fq+Yp+Yq+(YNp..YNq+.YNp..qI.q^Nà)+.YNq.(pI.p^Nà)..YNq+.YNp..qI.q^Nà
C.Hp+Hq+Fp+Fq+Yp+Yq+(YNp.YNq)+(YNp..qI.q^Nà)+(YNq..pI.p^Nà)+.YNp.YNq.(pI.p^Nà)..qI.q^Nà
C.Hp+Hq+Fp+Fq+Yp+Yq+(YNp.YNq)+(YNp..qI.q^Nà)+.YNq..pI.p^Nà A115, A169
A542/3 (23),(39),A119,df11, df 46

Chapitre 16.- VRAI ET TRES VRAI

A la différence des foncteurs 'assez' et 'plutôt', qui envoient sur zéro toute valeur de vérité inférieure à une certaine borne ou à un certain seuil, le foncteur 'très' se caractérise dans la langue naturelle par une propriété opposée: tout ce qui est vrai est aussi très vrai, et -bien entendu- réciproquement, mais dans des mesures différentes : chaque chose est vraie dans une mesure égale, sinon supérieure, à celle où elle est très vraie, tandis qu'elle peut être très vraie dans une mesure inférieure à celle où elle est vraie tout court. Supposons qu'il ne soit que trente pour cent vrai qu'Ordoño parle le français (il fait un peu plus que le bredouiller); il serait tout à fait absurde, dans ce cas, de dire qu'il est plutôt vrai (et encore plus absurde de dire qu'il est assez vrai) qu'Ordoño parle le français; de pareilles affirmations seraient tout à fait fausses; mais, si l'on affirme qu'il est très vrai qu'Ordoño parle le français, cette affirmation ne sera pas entièrement fausse, seulement plus fausse que celle qui affirme, sans nuance, qu'Ordoño parle le français; en l'occurrence, nous pouvons supposer aisément que l'affirmation en question serait moins de dix pour cent vraie.

Un autre point mérite d'être souligné à propos du foncteur 'très' (dans notre notation : 'X') : qu'il soit très vrai que p équivaut à ce que non seulement il est très vrai que p, mais encore il est très vrai que p; autrement dit :que quelque chose soit très vrai est une réduplication, une sur-conjonction de ce quelque chose-là avec soi-même. Ainsi, lorsque j'affirme qu'il est très vrai que je partirai en vacances (quoi qu'il arrive), je puis exprimer la même idée, en disant : 'je partirai en vacances, et je partirai en vacances'. En espagnol parlé, on emploie dans ces cas un redoublement du mot : on s'engage à plus lorsqu'on dit 'esta taza es de café-café' que lorsqu'on se borne à dire 'esta taza es de café'; dans le premier cas, ce qu'on véhicule est un message identique à : 'es muy cierto que esta taza es de café' (il est très vrai que cette tasse est de café'). Un autre exemple semblable c'est 'un agua limpia, limpia' qui équivaut à 'un agua muy limpia'. Le procédé est moins usité en français, mais il y existe aussi, bien que seulement avec des adjectifs (comme nous venons de le voir, l'espagnol parlé l'applique aussi à certains substantifs); on dira, p.ex. : 'cet enfant est sage, sage' (il est très sage); 'ce velours est doux,doux' (=il est très doux), 'ce repas est exqui, exquis' (=il est très exquis), etc.

On verra par la suite que 'il est très vrai que p' et 'il est vrai que p' sont des formules équivalentes ssi p est une formule, soit tout à fait fausse, soit tout à fait vraie, soit infinitésimalement fausse, soit infinitésimalement vraie; autrement dit, ssi il est, soit infiniment vrai, soit infiniment faux que p.(Et si la valeur de vérité de p est plus élevée à certains égards qu'à d'autres, elle ne coïncidera avec celle de "il est très vrai que p" qu'à ces égards pour lesquels il sera ou bien infiniment vrai, ou bien infiniment faux que p). Dans tous les autres cas, 'il est très vrai que p' est moins vrai que 'il est vrai que p'.

A543 Hp+Fp+Yp+YNp=̲.pIXp

Preuve :

(2)	Hp+Fp+Yp+(YNp..pI.p^Nà)=̲.pIXp	A542,df46,df22
(3)	YNp.(pI.p^Nà)CYNp	A22
(4)	YNpC.NpIà	A510/4,df11,A22
	C.pINà	A191/2
	C.p^NàIp	A531/3
	C.YNp..pI.p^Nà	A131/4
(5)	YNp.(pI.p^Nà)=̲YNp	(4),(3),A117,df11
	A543	(2),(5),rinf 18

A543/2 FfSp=̲.pIXp (Preuve : A543, A511/52,A172,rinf 18)

A543/3 LpIXLp (Preuve : A543, df 11, A146, A120, A22)

A543/4 LpILXp (Preuve : A516/2, A223)

A544 HpIXHp (Preuve : A543, df 11, A22, A120)

A545 XHpIHXp (Preuve : df 22, A542)

A545/2 FpIHXNp (Preuve : A544, A545, A142)

A546 FpIXFp (Preuve : A544, df 5)

A547 XFpIFXp (Preuve : A546, A537, df 22, A102)

A547/2 XFp=̲.pIO (Preuve : A561/3, A547)

A548 XFO (Preuve : A134, A546)

A549 FXO (Preuve : A548, A547)

A550 XH1 (Preuve : A135, A544)

A551 HX1 (Preuve : A545, A550)

A552 Sp=̲SXp (Preuve : A544,A545,A546,A547,A191/2,A325,df14, df4,A141,A140, A161, A218, A172, rinf 18)

A553 XSp=̲SXp (Preuve : A516/2, A552, rinf 18)

A554 fSp=̲.Xp%p (Preuve : A543/2,A219,rinf18,A236/3,A514,A363)

A554/2 Xp%pI.XNp%Np (Preuve:A554,A106/4,rinf18,A314,A371/7)

A555 X½ (Preuve : A101/2, A516/2)

A556 X½%½ (Preuve : A402, A509, A554)

A557 XX½ (Preuve : A555, A516/2)

A558 Y(p^q)IY(p.q)

Preuve :

(2)	p^qD.p.q	A514
(3)	Y(p.q)D.Y(p^q)+F(p^q)	(2), A511/63
	D.p^qCY(p^q)	
(4)	Y(p.q).(p^q)DY(p^q)	(3), A348/2
(5)	Y(p.q)C.p.q	A511/16, A126/2
	C.p^q	A516, rinf 18
	Csin4	A131/4
	Cdext4	(4), A126/2
(6)	Y(p.q)DY(p^q)	(5), A511/38a
(7)	Y(p^q)C.Yp+Yq	A26 A131/3
	C.p.q..Yp+Yq	A511/16,A126/2,A516,rinf18,
	C.p.q.Yp+.p.q.Yq	
	C.q.Yp+.p.Yq	A511/16, rinf 17 bis
	CY(p.q)	A511/28

(8)	Y(p^q)DY(p.q)	(7), A511/38a
	A558	(6), (8), A314

A559 YXpIYp

Preuve :

(2)	Y(p^p)IY(p.p)	A558
	YXpIY(p.p)	(2), df 22
	IYp	

A560 XYpIYp

Preuve :

(2)	Yp^YpI.Yp.Yp	A530
(3)	XYpI.Yp.Yp	(2), df 22
	IYp	

A561 FYXpI.Fp+Lfp (Preuve : A559, A511/9b)

A562 XàIà (Preuve : A531/3, df 57, df 22)

A562/2 XùIù (Preuve : A531/3, df 57, df 22)

A563 fXpIXfp (Preuve : A542/2, df 22)

A564 fXp=fp (Preuve : A563, A516/2)

A565 à%Xp=fp (Preuve : A564, A510, rinf 18)

A566 à%X½..X½%½ (Preuve : A509,A565, A556, A117)

A567 SX½ (Preuve : A402/2, A552)

A567/2 PNX½ (Preuve : A556, A451)

A567/3 FPX½ (Preuve : A567/2, A471)

A568 fX½ (Preuve : A509, A563)

A569 Np=NXp

Preuve :

(2)	NHpINHXp	A544, A545
(3)	LNpILNXp	(2), A143
	Np=NXp	(3), A245

A570 pDqD.XpD.Xq..p^q

Preuve :

(2)	pI(p.q)C.p^pI.p.q^.p.q	
	I.p^p..p^q..q^p..q^q	A13
(3)	pDqC.XpD.Xq..p^q	(2),df10,df22,A504
	A570	(3),A237/2,df 10

A570/2 pDqD.XpDXq (Preuve : A566, A333/2, A341)

A570/4 XpDXqI.pDq

Preuve :

(2)	XpDXqD.pDq	A6, A237/2
	A570/4	(2), A570/2, A314)

A570/5 XpIXqI.pIq (Preuve : A570/4, A325, A314)

A571 X(p.q)I.Xp.Xq

Preuve :

(2)	X(p.q)DXpI.p.qDp	A570/4
(3)	dext2	A346/2
(4)	sin2	(2), (3)
(5)	X(p.q)DXq	pareillem.
(6)	pD(p.q)+.qD.p.q	A194/5, A7
(7)	sin6D.XpDX(p.q)	A570/4
(8)	dext6D.XqDX(p.q)	id
(9)	dext7+dext8	A346/4, (7), (8), (6)
(10)	Xp.XqDX(p.q)	(9), A339
	A571	(4),(5),A333,(10),A314

A571/2 fSp=fXSp

Preuve :

(2)	fp=fXp	A563
(3)	fNp=fXNp	id
(4)	fp.fNp=.fXp.fXNp	(2), (3), A208/2
	A571/2	(4), A511/6, df 14, A571

A571/3 Nfp=NfXp

Preuve :

(2)	fp.fXp+F(fp+fXp)	A563, A187
(3)	fp.fXpC.fpIp..fXpIXp	A511/4, A185
	C.Nfp=NfXp	A569, rinf 17 bis
(4)	F(fp+fXp)C.fpIO..fXpIO	A16, A185
	C.fpIfXp	
	C.NfpINfXp	
	C.Nfp=NfXp	A218
	Nfp=NfXp	(2), (3), (4)

A571/4 Sfp=SfXp

Preuve :

(2)	fpCfXp	A563
(3)	fXpDfp	A515/3, A511/50
(4)	NfpCNfXp	(3), A193, A126/2
(5)	SfpCSfXp	(2), (4), A185, df 14
(6)	fXpCfp	(3), A126/2
(7)	NfXpCNfp	A571/3
(8)	SfXpC Sfp	(6), (7), A185, df 14
	A571/4	(5), (8), A117, df 11

A571/5 fSp=fSXp

Preuve :

(2)	NpDNXp	A515/3, A193
(3)	fNpDfNXp	(2), A511/5
(4)	fpCfXp	A564
(5)	fSpCfSXp	A185,A126/2,(3),(4),A511/6
(6)	fSXpC.fSXp.fSp+.fSXp.FfSp	A103, A132/2
(7)	fSXp.FfSpC.XpIp	A543/2, A125/2
(8)	fSXp.FfSpC.fSp.FfSp	(7), A103, A119
	CO	A109/3
(9)	fSXp.FfSpIO	(8), A291, A16
(10)	dext6I.fSXp.fSp	(9), A110/3
(11)	sin6CfSp	(6), (10)
	A571/5	(5), (11), A117, df 11

A571/6 fSX½ (Preuve : A509, A402, A571/5

A571/7 fSXX½ (Preuve : A571/6, A571/5)

A571/8 à%XX½..XX½%X½ (Preuve : A565, A568, A571/6,A554,A117)

A571/10a à%p.(p%ù)C.à%Xp..Xp%p

Preuve :

(2)	à%p.(p%Nà)=fSp	A510,A117,A208/2,A511/6,df14
(3)	sin2C.fSXp..Xp%p	A571/5,rinf 18,A554,A131/3
	C.fXp..Xp%p	df 14,A511/6, A122/2
	C.à%Xp..Xp%p	A510, rinf 18
	A571/10	(3), df 57

A571/10b npI.p^ù (Preuve : df 57, df 46)

Chapitre 17.- QUASI-EQUIVALENCE ET QUASI-IMPLICATION

Nous étudierons dans ce Chapitre un certain nombre =

de théorèmes en 'Ị', en 'Ḍ' et en 'Î'.

A571/12 pC.npInmp

Preuve :

(2)	A194/4D.7p^NàD.N(Np^Nà)^Nà	A521
(3)	pC2	(2), A127
(4)	pC.dext2Dsin2	A29,A115,df46,df47
(5)	pC.2.dext4	(3),(4),A131/3
	C.npInmp	A314, df 46, df 47

A571/13 n½Inm½ (Preuve : A571/12,A395,A101/2, df 47)

A571/14 q%pC.qDnp+.pImq (Preuve : A251,A24,A367/3,df46,df47)

A571/15 pIqI.npDq..nqDp

Preuve :

(2)	p^NàD(q^Nà)D.p^NàDq	A194/3, A341/2
(3)	q^NàD(p^Nà)D.q^NàDp	id
(4)	sin2.sin3D.dext2.dext3	(2),(3), A117, A343
(5)	p^NàI(q^Nà)Ddext4	(4), A314
(6)	p^NàDqD.p^Nà^NàD.q^Nà	A521
	D.p^NàD.q^Nà	A522; A531/3
(7)	q^NàDpD.q^NàD.p^Nà	id
(8)	sin6.sin7D.dext6.dext7	(6), (7), A117, A343
	D.p^NàI.q^Nà	A314
	A571/15	(5), (8),df 32, df46, df 47

A571/16 npDnqI.npDq

Preuve :

(2)	p^NàDqD.p^Nà^NàD.q^Nà	A521
	D.p^NàD.q^Nà	A522, A531/3
(3)	p^NàD(q^Nà).(q^NàDq)C.p^NàDq	A194/2
(4)	q^NàDq	A194/3
(5)	p^NàD(q^Nà)C.p^NàDq	(3), (4), A129
(6)	sin5Ddext5	(5), A237/2
	A571/16	(6), (2), A314,df46,df47

A571/17 mpInpI.pIà+.pIù

Preuve :

(2)	N(Np^Nà)I(p^Nà)C.pIà+.pINà	df30, A277,A27,df11,A22, df46,df47
(3)	sin2Ddext2	(2),A323/3
(4)	pIàC.p^NàIà	A530/2, A505/2,A511/13,df14
(5)	pIàC.Np^NàINà	A531/3
	C.N(Np^Nà)Ià	A191/2
(6)	pIàC.dext4.dext5	(4), (5), A131/3
	C.N(Np^Nà)I.p^Nà	A189/3
(7)	pIàDdext6	(6), A237/2, df 10
(8)	pINàDdext6	similairement
(9)	sin7+sin8Ddext6	(7),(8),A117,A328
	A571/17	df46,df47,(3),(9),A117,A314,df57

A571/18 F(pDq)C.nqDnp (Preuve:A324/2,A521, df 46)

A571/19 nqDp+.pDmq (Preuve : A194/5,A571/11,A117,A169)

A571/20 pDmq+.qDmp

Preuve :

(2)	pDq+.qDp	A194/5
(3)	pDN(Nq^Nà)+.qDN(Np^Nà)	A194/4,A341,A117,A343/4,(2)
	A571/20	(3),df47

A571/21 npDq+.nqDp (Preuve similaire, par A571/11 au lieu de A194/4, et df 46 au lieu de df 47)

A571/22 Np+FYNqC.npDqD.pDmq

Preuve :

(2)	p^NàDqC.NqDN(p^Nà)	A192
	C.Nq^NàD.N(p^Nà)^Nà	A521

(3) NpC.sin2C.Nq^NàD.Np^Nà A571, df46, df 47
C.Nq^NàDNp A518, A341/2
C.pDN(Nq^Nà) A192
(4) sin2.Fdextdext3C A251/5, A126/2
CHp (3), A133
C.pIl A122/2, rinf 18
C.sin2I.NàDq A532
I.NqDà A192
(5) sin4Csin2 A22
CYNq (4),A119,A510/4,rinf18
(6) FYNqCFsin4 (5), A133
Cdext3 A157, A172, rinf 18
(7) Np+FYNqCdext3 (3),(6),A186
A571/22 (7),A237/2,df46,df47

A571/23 p.qC.pIqD.pIq
Preuve :
(2) pIqC.p^NàI.q^Nà
(3) pI(q^Nà)C.pNàI.q^Nà^Nà
I.q^Nà A524, A531/3
(4) qI(p^Nà)C.p^NàI.q^Nà simm.
(5) pIN(Nq^Nà)C.p^NàI.N(Nq^Nà)^Nà
C.qC.p^NàI.q^Nà A571/12, df 46, df 47 / A185/3
(6) qIN(Np^Nà)C.pC.p^NàI.q^Nà simm. / A127,A116,A117,A120/2
(7) sin2+sin3+sin4+sin5+sin6C.p.qC.dext2 (2),(3),(4),(5),(6),
(8) p.qC.sin7Ddext2 (7),A124,A323/5
C.pIqD.pIq A571/15,df33,df32

A571/24 pIqD.pIq
Preuve :
(2) F(pIq)C.F(pDq)+F(qDp) A314/A194,A129
C.qD(p^Nà)+(pIN(Nq^Nà))+(pD.q^Nà)+.qIN(Np^Nà) A24,
(3) F(pI.q^Nà)C. (pD.q^Nà)CF(q^NàDp) A314,A251
(4) F(qI.p^Nà)C.qD(p^Nà)CF(p^NàDq) id /A251
(5) F(pIq)C.F(pIN(Nq^Nà))C.F(qIN(Np^Nà))C.qD(p^Nà)+.pD.q^Nà (2),
(6) F(pIq).F(pIN(Nq^Nà)).F(qIN(Np^Nà))C.qD(p^Nà)+.pD.q^Nà (5),
(7) sin6.sin3.sin4C.dext6.dext3.dext4 A185,(6),(3),(4)/ A129
C.F(q^NàDp)+F(p^NàDq)
CF(pIq) A571/15, df 46
(8) pIqC**Fsin**7 (7), A171/2 /A170
C.pIq+(pI.q^Nà)+(qI.p^Nà)+(pIN(Nq^Nà))+.qIN(Np^Nà) A157,
(9) sin8Ddext8 (8),A323/8, df 32
A571/24 (9), df 33

A571/25 p=qC.pIqI.pIq
Preuve :
(2) p.qC.pIqD.pIq A571/24, A127
(3) p.qC.pIqI.pIq A571/23,(2),A131/3,A314
(4) Fp.FqC.pIO..qIO A16, A185
C.pIq /A172,rinf18,A251
C.pIqI.pIq df32,A16,df33,A244,A249,A219/**2**,
(5) sin3+sin4Cdext4 (3),(4)
A571/25 (5), A187

A571/26 pIqI.NpINq
Preuve :
(2) pIqI.NpINq A191/2
(3) pI(q^Nà)I.NpIN(NNq^Nà) id
(4) qI(p^Nà)I.NqIN(NNp^Nà) id
(5) pIN(Nq^Nà)I.NpI.Nq^Nà id
(6) qIN(Np^Nà)I.NqI.Np^Nà id

```
                                   / (3),(4),(5),(6),A325/2
(7)  sin2+sin3+sin4+sin5+sin6I.dext2+dext3+dext4+dext5+dext6 (2),
     A571/26                              (7), df 33

A571/27  Sp.SqC.pIqI.NpINq
Preuve :
(2)  p.qC.pIqI.pIq                  ligne (3) de la preuve de A571/25
       C.pIqI.NpINq                 A571/26

(3)  Np.NqC.NpINqI.NpINq            simm.
(4)  sin2.sin3C.dext2.dext3         (2), (3), A185
              C.pIqI.NpINq
     A571/27                        (4), df 14

A571/28  pIqI.pInq
Preuve :        pIqI.p^NàI.q^Nà            df 32
                 I.p^NàI.p^Nà^Nà           A531/3,A522
                 I.pI.q^Nà                 df 32
                 I.pInq                    df 46

A571/29  pIqD.p.rI.q.r (Preuve: A237/2,A504,A13, df 32)
                                                /au lieu de A13)
A571/30  pIqD.p+rI.q+r  (Preuve similaire, à partir de A525,

A571/31  pIqD.p^rI.q^r  (Preuve similaire, à partir de A522)

A571/32  pIqD.rZpI.rZq  (Preuve : A571/30, df 2, df 3)

A571/33  pIqC.p=q
Preuve :
(2)  pIqC.p^Nà=.q^Nà                       df32,A218
        C.p.Nà=.q.Nà                       A516, rinf 18
(3)  A504/3C./p.Nà=(q.Nà)=.p=.q.Nà         A236/3
(4)  sin2Cdext3                            (2), (3),rinf18
(5)  A504/3C./p=(q.Nà)=.p=q                A236/3
     sin2C.p=q                             (4),(5), rinf 18

A571/34  YNpC.pIqC.Hq+YNq                   /A191/2
Preuve :       YNpC.pINà                   A510/4,df11,A22,
                  C.p^NàINà                A531/3
                  C.pIqC.NàI.q^Nà          df 32
                     C.NàD.q^Nà            A314, A22
                     C.NàDq                A194/3,A194/2,A129
                     C.NàDq..Hq+.qDNà      A511,A129,A131
                     C.Hq.(NàDq)+.NàIq     A314
                     C.Hq+.NàIq            A22,A169, A129
                     C.Hq+.àINq            A191/2
                     C.Hq+YNq              A510/4 , rinf 18

A571/35  pIqD.fpIfq
Preuve :
(2)  f(p^Nà)=.fp.fNà                       A562
(3)  A511/48C.2=./f(p^Nà)=fp               A236/3, df 57, (2)
(4)  f(q^Nà)=fq                            id
(5)  p^NàI(q^Nà)C.f(q^Nà)=fp..f(q^Nà)=fq   (3),(4),A127,A131/3
                C.fp=fq                    A213
                C.fp.fq+.Ffp.Ffq           A187
(6)  fpC.fpIp                              A511/4
       C.pIqC.fpIq
(7)  fqC.fpC.pIqC.fpIfq                    (6), A511/4
```

(8) pIqC.fp.fqC.fpIfq (7),A129,A123
(9) Ffp.FfqC.fpIfq A173,A185
C.fp^NàI.fq^Nà
C.fpIfq df 32
(10) sin5C(fp.fq)+.sin5C.Ffp.Ffq (5), A114/2
(11) 8C./sin10C.pIqC.fpIfq df 32, A132
(12) dext10Cdext11 df 32, (9)
A571/35 A237/2,(10),(11),(12),A117,A194 /rinf18, A126/2)

A571/36 pIqD.FpIFq (Preuve:A571/35,A126/2,df32,A220,A223,A156/2,

A571/37 pIqD.YpIYq
Preuve :
(2) pIqC.fpIfq A571/35, A126/2
C.FfpIFfq A571/36
(3) pIqC.Ffp.pI.Ffp.q A571/29, A126/2
(4) dext2C.sin3C.Ffp.pI.Ffq.q (3)
C.YpIYq A511/9a
(5) sin2Cdext4 (2), (4)
A571/37 (5),A119,A237/2,df32

A571/38 YpIYqD.YpIYq
Preuve :
(2) Yp^NàI.Yp.Nà A504,A530
(3) Yq^NàI.Yq.Nà id
(4) A504/3C./Yp^Nà=(Yq^Nà)=.Yp=.Yq^Nà A236/3,(2),(3)
(5) Yp=(Yq^Nà)=.Yp=Yq A504/3,(4),(3),A236/3
(6) Yp^Nà=(Yq^Nà)C.Yp=Yq (4),(5),A213
C.YpIYq A511/38b
(7) YpIYqCsin6 df 32, A218
Cdext6 (6)
A571/38 (7),df32,A237/2

A571/39a pIqD.YpIYq (Preuve : A571/37,A571/38, A341)

A571/39b pItqD.pIq (Preuve : similaire + df 87)

A571/40a pIqD.rCpI.rCq (Preuve : A571/30, df 7)

A571/40b pIqD.pCrI.qCr (Preuve : A571/36, df 7)

A571/41 1Iù (Preuve : A532, A514, A531/3, df 32, df 57)

A571/42 pIàD.pIà
Preuve :
(2) A505/2D./Nà^àI.Nà.à A530/2
(3) A504/3=./àI.à.Nà A509/2, df 10
(4) Nà^àIà (2), (3)
(5) p^NàI(à^Nà)C.p^NàIà (4)
CY(p^Nà) A510/4, rinf 18
C.pIà+.NàIà A26, A510/4, rinf 18
(6) NàIàIO A511/44,A363,A115,A173
(7) dext5I.pIà (6)
A571/42 (5),(7),A237/2, df 32

A571/43 pDqI.npDq (Preuve : df 34,A13,A504,A571/16,df46)

A571/44 pD1 ((Preuve : A571/43)

A571/45 ODp (Preuve : A517, A571/43)

A571/46 pDqD.fpDfq (Preuve : A571/35, A511/6, df 34)

A571/47 pImqD.pImp
Preuve :
(2) pIN(Nq^Nà)C.NpI.Nq^Nà
C.Np^NàI.Nq^Nà^Nà
I.Nq^Nà A523,A531/3
C.N(Np^Nà)IN(Nq^Nà)
C.pIN(Nq^Nà)..N(Np^Nà)IN(Nq^Nà) A131/4
C.pIN(Np^Nà)
(3) sin2Ddext2 (2), A237/2
A571/47 (3), df 47

A571/48a fSpC.p%mpD.Xp%np
Preuve :
(2) p^NàDXpC.X(p^Nà)DXXp A570/2, A126/2
C.Xp^NàDXXp A504, df 22,A531/3,A522
C.p^NàD(Xp^Nà)..Xp^NàDXXp A131/4,df46,A571/16
C.p^NàDXXp A194/2
(3) fSpC.XXp%Xp A571/5,rinf18,A554
(4) dext3C.dext2C.p^Nà%Xp A368/4,A126/2, A124
(5) fSpC.p^NàDXpC.p^Nà%Xp (2),(3),(4),A127,A131/3,A129/2
(6) Xp%pC.dextdext5C.pIN(NXp^Nà) A571/14,df46,df47,A251,
(7) fSpCdext6 A554,(6) / A237/3,rinf 18
(8) fSpC.p^NàDXpC.pI(NXp^Nà) (5),(7),A132/2,A118,A119
C.pIN(Np^Nà) A571/47,df 47,A126/2
A571/48a (8),A194/4,A314,A133,A137/2,
A367/3,rinf18,A371/7,df46,df47

A571/48b NpC.XpDnp (Preuve : A511,A521,A504,df22,df46)

A571/48c pC.mpDKp (Preuve similaire)

A571/49 n½%½
Preuve :
(2) ½D(½^Nà)C.N(N½^Nà)D½ A193, A395
C.½D(½^Nà)..N(N½^Nà)D½ A131/4
C.N(N½^Nà)D.½^Nà A194/2
C.Y½+YN½ A27,df46,df47
CFf½ A395,A511/9a,A22
A571/49 A171/2,(2),A509,df46

A571/50 ½%m½ (Preuve : A571/49,A368/2,A395,df46,df47)

A571/51 X½%n½ (Preuve : A571/48,A509,A504,A571/50,A395,df46)

A571/52 m½%K½ (Preuve : A571/51,A368/2,A593,df47)

On trouvera dans l'Annexe N° 2 de ce Livre l'énumération d'une série d'autres théorèmes dans lesquels interviennent les foncteurs 'n', 'm', 'Î', 'I', et 'D'.

Chapitre 18.- TRES VRAI ET UN PEU VRAI

Nous reviendrons dans ce Chapitre sur le foncteur 'X' afin d'étudier d'autres propriétés de ce foncteur; nous savons déjà qu'il est distributif par rapport à la conjonction; nous verrons tout à l'heure qu'il l'est aussi par rapport à la disjonction (théorème A572).

Notre dessein principal dans ce Chapitre est, néanmoins, celui d'examiner les propriétés d'un autre foncteur, défini à partir de 'X', à savoir le foncteur 'K'. Zadeh (cf. p.ex. Z:1) introduit un foncteur ayant des propriétes similai res et le même sens visé; toutefois, ce foncteur n'est pas définissable à partir du foncteur 'très' (notre 'X') et, qui plus est, ne permet pas d'affirmer qu'il est du moins un peu vrai que p exactement dans la même mesure où il n'est pas très vrai que non-p; or cette équivalence nous paraît intuitivement certaine. L'avantage de l'opérateur de Zadeh, perdu dans le traitement ici proposé, c'est l'équivalence triangulaire entre p, "il est un peu vrai qu'il est très vrai que p" et "il est très vrai qu'il est un peu vrai que p". Dans notre traitement ces équivalences ne sont pas inconditionnellement valides. Toutefois, comme nous le verrons plus loin, il y a dans <u>A</u> des théorèmes qui se rapprochent des équivalences en question, tout en demeurant plus faibles. La valeur intuitive de ces deux équivalences est, ce nous semble, sujette à caution; le sacrifice nous paraît en tout cas d'une importance mineure.

Beaucoup de propriétés de 'K' sont aussi des propriétés de 'X'; les deux foncteurs sont distributifs aussi bien par rapport à la conjonction que par rapport à la disjonction; toutefois, tandis que 'X' est distributif par rapport à la surconjonction, 'K' est distributif, lui, par rapport à la surdisjonction, mais les réciproques ne sont pas vraies. 'Xp' implique p, tandis que p implique 'Kp'.

A572 X(p+q)I.Xp+Xq

Preuve :

(2)	p+qIpI.X(p+q)IXp	A570/5
(3)	p+qIqI.X(p+q)IXq	id
(4)	dext3+dext4	(2), (3), A195
(5)	X(p+q)Dp+.X(p+q)Dq	(4), A189/4
(6)	X(p+q)D.Xp+Xq	(5), A336
(7)	XpDX(p+q)	A346/3, A570/4
(8)	XqDX(p+q)	id
(9)	Xp+XqDX(p+q)	(7),(8), A328
	A572	(6), (9), A314

A573 X(pCq)I.pCXq (Preuve : A572, A546)

A576 pDKq (Preuve : df 23, A515/3, A193)

A577 Kp=p (Preuve : df 23, A569)

A578 FfSp=.pIKp (Preuve : A543/2, df 23, A106/4

A579 Fp+Hp+Yp+YNp=.pIKp (Preuve : A543, df 5, A142,A191/2)

A579/2 FKpIFp (Preuve : A577,A220, A351, A233/2)

A579/3 FpIKFp (Preuve : A543/3, A191/2, df 23)

A580 LpILKp (Preuve : A545/2, A191/2, df 23)

A581 HpIHKp (Preuve:A543/4,A191/2, A139, A142/2, df 23)

A582 HpIKHp (Preuve : A579)

A583 LpIKLp (Preuve : A546, A191/2, A142/3, df 23)

A584 -pI-Kp (Preuve : A581, A191/2, A141)

A585 Np=NKp (Preuve : A584, A140, A235, A218)

A586 fSp=.p%Kp (Preuve : A554, A106/4, A368/2)

A587 Sp=SKp (Preuve : A552, A106/4)

A588 KSp=SKp (Preuve : A577, A587, rinf 18)

A589 XpINKNp (Preuve : df 23)

A590 $\frac{1}{2}$DK$\frac{1}{2}$ (Preuve : A576)

A591 ½%K½ (Preuve : A586, A402, A509)
A592 K½ (Preuve : A590, A101/2)
A593 K½INX½ (Preuve : df 23, A395)
A594 KK½INXX½ (Preuve similaire, +A21)
A595 SK½ (Preuve : A593, A106/4 , A559)
A597 KpDKqI.pDq (Preuve : A570/4, A193)
A598 KpIKqI.pIq (Preuve : A570/5, A191/2)
A599 K(p.q)I.Kp.Kq (Preuve : A572, A191/2, A105, A106)
A600 K(p+q)I.Kp+Kq (Preuve : similaire, à partir de A571)
A601 K(pCq)I.pCKq (Preuve : A600, A178, A179)
A604 NKpIXNp (Preuve : A589)
A605 NXpIKNp (Preuve : A589, A191/2)
A606 X½INK½ (Preuve : A593, A191/2)
A606/2a KX½INXK½ (Preuve : A606, A598, A605)
A606/2b XK½INKX½ (Preuve similaire)
A606/3 X(p^q)I.Xp^Xq (Preuve : df 22, A504, A524)

On trouvera un certain nombre de théorèmes complémentaires dans lesquels intervient le foncteur 'K' dans l'Annexe N° 2 de ce Livre. La démonstration de la plupart d'entre eux doit utiliser A4. On y trouvera aussi des théorèmes en 'N',= en 'N̲', en 'P' et en 'P̄'.

A607 fSp=fSKp
Preuve :

(2)	fSNp=fSXNp	A571/2
	=fSNXNp	A106/4
	=fSKp	df 23
	A607	(2), A106/4

A608 fp=fKp
Preuve :

(2)	fpDp	A511/15
	DKp	A576
(3)	ffpDfKp	(2), A511/5
(4)	fpCfKp	(3),A511/11, A126/2
(5)	fKpCKp	A511/15, A126/2
	Cp	A577, rinf 18
	CLp	A171
	CFFp	A157
(6)	fKpC.fp+Yp	A511/24, A251/3, (5)
(7)	YpC.Fp+Hp+Yp+YNp	A116
	C.pIKp	A579
(8)	fKp.YpC.pIKp	A125/2, (7)
	CF(fKp.Yp)	A511/29
(9)	F(fKp.Yp)	(8), A102
(10)	fKpCfp	(6),(9), A169/2
	A608	(4), (10)

A609 YpIYKp
Preuve :

(2)	YpC.pIKp	A116, A579
	C.YpIYKp	
(3)	A576D./YKpD.Yp+Fp	A511/63 /rinf 18, A137/2
(4)	YKpC.FpIO	A511/63,A511/16,A126/2 ,A577,
	C.YKpDYp	A110/3, (3)
	A609	(2),(4),A348,A314,A189/4

A610 YNpIYNXp (Preuve : A609, A605)

A610/2 YNpIYNKp (Preuve : A559, A604)

A610/3 fSK½ (Preuve : A509, A402, A607)

A610/4 ½%K½..K½%KK½ (Preuve : A591,A586,A610/3,A117)

A610/5 K½%KK½..KK½%ù (Preuve : A610/4,A22,A610/3,df14,A607, df57,A511/6,A510/3,rinf18,A117)

D'une manière similaire, on peut démontrer ce qui suit :
KK½%KKK½..KKK½%KKKK½ KKKK½%ù KKKKK½%ù KKKKKK½%ù
KKKK½%KKKKK½ KKKKK½%KKKKKK½ KKKKKK½%KKKKKKK½ etc.

A610/6 PK½ (Preuve : A591, A450)

A610/7 FPNK½ (Preuve : A470, A610/6)

A610/8 F(½In½+.½Im½) (Preuve: A571/49,A571/50,A362,A115)

A610/9 F(½Inq)
Preuve :

(2)	½I(q^Nà)C.½I.q^Nà^Nà	A531/3
	I.q^Nà^Nà	A524
(3)	½I(q^Nà)C.2C.½I.½^Nà	(2)
	C.½In½	df 46
(4)	2C.7½I(q^Nà)C.½In½	(3), A124
	Fdext4	A610/8, A22
	A610/9	(4), (5), df 46

A610/11 Pp=.m½Dp
Preuve :

(2)	F(pD½)CF(½DNp)	A193, A395
(3)	F(½DNp)C.NpD(½^Nà)+.½IN(p^Nà)	A24,A251,df46,df47
(4)	F(F(½DNp)..½IN(p^Nà))	A610/10,df47, A116/3
(5)	F(½DNp)C.NpD.½^Nà	(3),(4),A169/2
(6)	F(pD½)Cdext5	(2), (5)
(7)	½%pCdext5	(6),A367/3,rinf18
(8)	PpCdext5	(7),A450,rinf 18
	C.N(½^Nà)Dp	A193
(9)	½%N(½^Nà)C.dext8C.½%p	A367/6, A126/2, A124
(10)	sin9	A571/50,df47,A368/2,A395
(11)	dext9	(9), (10)
(12)	N(½^Nà)DpCPp	(11),A450,rinf 18
	A610/11	(8),(12),A193,df47

A610/12 PNp=.pDn½ (Preuve : A610/11,df46,df47,A395)

A610/13 PNn½ (Preuve : A610/12, A101/3)

A610/14 F(pI½)=.m½%p+.p%n½
Preuve :

(2)	F(pI½)I.F(p^NàD½)+.F(½^NàDp)	A571/15, df 46 /A395
(3)	pDN(½^Nà)D.p^NàD.½^Nà	A521,A571/13,df46,df47,
	D½	A571/16, df 46
(4)	Fdext3CFsin3	(3),A353/3,A126/2 /A133
	C.N(½^Nà)%p	A367/3, rinf 18 /A126/2,
(5)	F(½^NàDp)=.p%.½^Nà	A367/3 /A395,A367/3,rinf18,
(6)	FY½C.N(½^Nà)%pCFdext3	A571/22,A120/2,A22,df46,df47,
(7)	N(½^Nà)%p=Fdext3	(6),A509,df31,A22,(4),A117
(8)	F(pI½)C.dext4+dext5	(2),A218,(7),(5),rinf 18
	A610/14	(8), df 46, df 47

A610/15 F(pIq)C.Fq+.mq%p+.p%nq

Preuve :

(2)	F(pIq)I.F(p^NàDq)+F(q^NàDp)	A571/15, df 46
(3)	pDN(Nq^Nà)D.p^NàDN(Nq^Nà)^Nà	A521
(4)	qC.q^NàI.N(Nq^Nà)^Nà	A571/12,df46,df47
	C.pDN(Nq^Nà)D.p^NàD.q^Nà	(3)
	Dq	A571/16, df 46
(5)	qCFdextdext4CFsindext4	(4),A353/3, A126/2
	C.N(Nq^Nà)%p	A367/3, rinf 18
(6)	F(dextdext4)C.qCdextdext5	(5), A124
	C.Fq+dextdext5	
(7)	F(q^NàDp)C.p%.q^Nà	A367/3 /df 47
	A610/15	df46,(2),(6),(7),A194,A129,

On trouvera dans l'Annexe N° 2 de ce Livre une série d'autres théorèmes en 'K', en 'm' et en 'n', ainsi que des = théorèmes en '⇞' (le foncteur surdisjonctif).

Chapitre 19.- D'AUTRES FONCTEURS

Ce Chapitre est consacré à un certain nombre de foncteurs aussi bien monadiques que dyadiques. Certains d'entre= eux sont appelés à jouer un rôle important dans un traitement philosophique adéquat (contradictoriel) du problème de l'identité mitigée. Toutefois, l'étude de tous ces foncteurs ici = entreprise sera très rapide, les preuves étant fort souvent = omises, afin d'éviter un accroissement excessif du volume de cette Section.

A611 $\hat{P}$p=.NpDX½

Preuve :

(2)	K½DpC.K½Dp&p	A353,A131/4,A172,rinf18,A164
(3)	K½Dp&pC.k½Dp	A276
	A611	(2),(3),A117,df11,A193,A606

A611/2 $\hat{P}$pD$\ddot{P}$p (Preuve : A556,A451,A366,A129,df19,A611,df16, A164,A245/2,A343)

On trouvera dans l'Annexe N° 2 d'autres théorèmes en '$\hat{P}$', en '$\ddot{P}$', en '$\bar{\bar{2}}$', en '$\hat{P}$' et en '$\bar{\bar{3}}$'

A616 p¯qI.p.q+.p+q.K(p^q)

Preuve : p¯qI.p+q..K(p^q)+.p.q df 24

I.p+q.K(p^q)+.p+q..p.q

I.p.q+.p+q.K(p.q) A346/2, A346/3

A616/3 p¯qI(p.q)+.p¯qI(p.K(p^q))+.p¯qI.q.K(p^q) (Preuve:A616/2, A342)

A616/4 p¯qI.q¯p (Preuve : A616/3,A9,A104,A504,A189/2)

A616/5 p¯qCp (Preuve: A616/3,A22,A577+rinf18, A126/2)

A616/6 p¯qCq (Preuve : A616/5, A616/4)

Dans l'Annexe N° 2 nous avons énuméré d'autres théorèmes en '¯', ainsi que des théorèmes en '_', des théorèmes et des schémas théorématiques concernant les foncteurs 'P', '⇞', 'X' et 'K' fondés sur A5, et des théorèmes et schémas théorématiques en 'đ', en 'đđ', en 'đ...đ' et d'autres foncteurs = similaires définis récursivement à partir de ceux-là. La lecture en langue naturelle de ces théorèmes nous permet de corroborer -ce qui est bien conforme à nos intuitions-, =

que, p.ex., il est très vrai qu'il est un peu vrai que p pour autant seulement qu'il est un peu vrai qu'il est un peu vrai qu'il est très vrai que p; ou encore : il est très, très vrai qu'il est un peu vrai que p pour autant seulement qu'il est un peu vrai qu'il est très vrai que p; p presque seulement dans la mesure où q, et q presque seulement dans la mesure où r, pour autant seulement que p presque presque seulement dans la mesure où r; p presque seulement dans la mesure où il est très vrai que p; etc. Voici, enfin, un certain nombre de théorèmes en '≙'.

A638 p≙qI.XpDq..XqDp (Preuve : df 63_1, df 61_1)

A638/2 p≙p (Preuve : A515/3, A7, A638)

A639 Xp≙p (Preuve : A515/3, A638, A101/3, A341)

A640 PNpC.Kp≙p A641 p≙qI.q≙p (Preuve : A638)

A642 p≙qC.p≡q (Preuve : A185, A126/2,A516/2,rinf18,A638)

A643 p≙1DHp (A551,A202/2,A515,A351/2,rinf18,A233/3,A220/4,A638)

A643/2 p≙ùCYNp

Preuve :

(2)	YNNàC.XNàINà	A543, A116
(3)	A505/2C.7XNàINà	(2)
(4)	XpDNà.(X̄NàDp)I.àDNXp..NpDà	(3), A193
(5)	NpDà≡.FNp+YNp	A510/6
	≡.Hp+YNp	
(6)	dext4̄C.Hp+YNp	A115, (5), rinf 18
(7)	HpCHXp	A544, A545
	CFNXp	
	C.àCNXpCFà	A251/2
(8)	àCNXpC.HpCFà	(7), A123
(9)	dext4Csin8	A22, A126/2
	Cdext8	(8)
	C.FHp+Fà	
(10)	FFà	A504/7,A171,A157
(11)	FàIO	(10), A173
(12)	FHp+FàIFHp	(11)
(13)	dext4C.FHp..Hp+YNp	(9), (12),(6),A131/3
(14)	FHp.(Hp+YNp)CYNp	A251, A129
(15)	dext4CYNp	(13), (14)
(16)	sin4CYNp	(4), (15)
(17)	p≙NàCYNp	(16), A638
	A643/2	(17), df 57

A645 pIqD.p≙q (Preuve : A515/3,A131/3,A323/2,A638)

A645/2 p%XqDF(p≙q)

Preuve :

(2)	F(XqDp)CF(XqDp..XpDq)	A116/3
(3)	p%XqCdext2	(2), A367/3, rinf 18
	DF(XpDq..XqDp)	A233/2,A220/4, rinf 18
	DF(p≙q)	A638

A645/3 XrIp.(r%q)DF(p≙q)

Preuve :

(2)	F(qDr)DF(XqDXr)	A570/4,A189/4,A353/3
(3)	XrIpC.F(qDr)DF(XqDp)	(2)
	CF(XqDp)	A126/2
	CF(XqDp..XpDq)	A116/3
(4)	XrIp.F(qDr)Cdext3	(3), A129

(5)	XrIp.(r%q)Cdext3	(4),A367/3, rinf 18
	Ddext3	A233/2, A220/4, rinf 18
	DF(p≙q)	A638

A645/4 p≙qI.X(p+q)D.p.q
Preuve :

(2)	XpDq.(XqDp)D.XpD(p.q)..XqD.p.q	A515/3,A350,A117,A343
	D.Xp+XqD.p.q	A328
	D.X(p+q)D.p.q	A572
(3)	X(p+q)D(p.q)D.Xp+XqD.p.q	A572, A101/3
	D.XpD(p.q)..XqD.p.q	A328
(4)	XpD(p.q)D.XpDq	A333/2
(5)	XqD(p.q)D.XqDp	id
(6)	dext3D.XpDq..XqDp	(4), (5),A117,A343
(7)	sin3Ddext6	(3),(6),A341
	D.p≙q	A638
(8)	p≙qD.X(p+q)D.p.q	(2),A638
	A645/4	(8),(7),A314

A645/5 p≙qD.FpIFq (Preuve : A642,A223,A156,A323/4,A638)

A645/6 p≙qI.Xp≙Xq (Preuve : A570/4, A325, A638)

Dans l'Annexe N° 2 de ce Livre on trouvera d'autres théorèmes en '≙'. On y trouvera aussi un grand nombre d'autres théorèmes utilisant des foncteurs définis à partir de '≙' (p.ex. '∷', qui jouera un rôle important dans l'introduction, dans la Section III, de l'identité restreinte et graduée -ou égalité-, laquelle parmettrait d'expliquer certaines des difficultés philosophiques concernant la relation d'identité, tâche cependant que nous n'entreprendons pas dans cette étude). On y trouvera, au surplus, des théorèmes en 'b', en 'j', en 'c', en 'ç' et en 'ç̈'.

Chapitre 20.- VRAI A TOUS LES EGARDS ET VRAI EN QUELQUE SORTE

Nous savons déjà quel rôle majeur joue le foncteur 'B' dans le système As : la règle du MP n'est applicable à une formule que si celle-ci est préfixée par 'B'; la règle rinf 1 nous permet de préfixer automatiquement par 'B' tous les théorèmes, ce qui contrecarre l'effet restrictif de cette conditionalisation pour ce qui est de l'inférence à partir de théorèmes. Il en va tout autrement, bien sûr, pour ce qui est des prémisses non théorématiques. La signification logico-philosophique du foncteur 'B' fera l'objet d'étude dans les livres II et III de cette étude. Il appert que le comportement de ce foncteur et les théorèmes ou thèses valides dont la formulation l'englobe rappellent de très près les opérateurs modaux de nécessité. La différence réside en ceci : dans les logiques modales, une thèse peut être vraie, donc assertable, sans que le résultat de préfixer cette thèse par l'opérateur de nécessité ne soit valide. En revanche, selon l'orientation sémantique et philosophique qui inspire la construction du système A, une formule n'est assertable que si le résultat de la préfixer par 'B' est assertable. Ceci se traduit par le fait que, quoique A contienne le principe de tiers exclu, il ne s'ensuit point que, pour chaque formule p, ou bien p ou bien "Np" soit assertable ou vrai. Autrement dit : la validité du principe interne de tiers exclu n'impose point un principe externe de tiers exclu. De ce qu'il soit vrai que ou bien la Prusse est plus forte que le Mecklenburg, ou bien le Mecklenburg est aussi fort que la Prusse **sinon plus, il**

n'en découle pas que l'on puisse affirmer que la Prusse est =
plus forte que le Mecklenburg ou que l'on puisse affirmer que
le Mecklenburg est aussi fort que la Prusse sinon plus; il se
peut qu'aucune de ces deux phrases ne soit assertable, car il
se peut qu'à certains égards la Prusse soit plus forte, tan--
dis qu'à d'autres égards le Mecklenburg soit plus fort; or,=
pour qu'une phrase soit assertable il faut qu'elle soit vraie
(peu ou prou) à tous les égards, sans exception.

Dans ce Chapitre, les preuves présentées ne sont =
qu'esquissées. Aucun renvoi n'est fait explicitement (sauf =
exception) à des théorèmes portant des numéros d'ordre infé--
rieurs à A372 (hormis les théorèmes A0, A1, A2 et A3). Les =
règles d'inférence ne sont pas non plus -sauf exception- ex--
pressément mentionnées. On omet tout renvoi à des définitions
déjà introduites (on mentionnera seulement les définitions 12,
13, 25, 26, 27, et 28). Dans tous ces cas-là on se contentera
donc -si tant est que l'on fait une référence- d'un renvoi =
global, moyennant la notation 'Aa'.

A650 BpDp

Preuve :

(2)	BpC.BpIp	A1
	C.BpDp	Aa
	A650	(2), Aa

A650/2 FBpDBFBp (Preuve : A0, A251, A1, A189/4, A348)

A651 BFBpIFBp (Preuve : Aa, A650/2, A650)

A652 JBpILBp (Preuve : A651, Aa, df 28)

A653 pDDqD.BpDBq (Preuve : A1, df 13, A3, Aa)

A653/2 B(pDDq)D.BpDDBq (Preuve : A653, rinf 1, df 13)

A654 LpDDLqC.BpCBq

Preuve :

(2)	LpDDLqC.BLpDBLq	A3
	C.BLpCBLq	Aa
(3)	pGLp	Aa, rinf 1, df 12
(4)	BpCBLp	(3), A2
(5)	LpDDLqC.BpCBLq	(2), (4), Aa
(6)	LqGq	Aa, rinf 1
(7)	BLqCBq	(6), A2
	A654	(5), (7), Aa

A655 B(pCq)C.BpCBq (Preuve : A2, df 12)

A656 B(p.q)I.Bp.Bq

Preuve :

(2)	p.qDDp	Aa, rinf 1, df 13
(3)	B(p.q)DBp	(2), A3
(4)	B(p.q)DBq	pareillem.
(5)	B(p.q)D.Bp.Bq	(3), (4), Aa
(6)	pG.qC.p.q	Aa, rinf 1, df 13
(7)	BpC.qG.p.q	(6), A3, df 12
	C.BqCB(p.q)	A2
(8)	Bp.BqCB(p.q)	(7), Aa
(9)	Bp.BqC.BpIp..BqIq..B(p.q)I.p.q	A1, (8), Aa
	C.Bp.BqI(p.q)..B(p.q)I.p.q	Aa
	C.Bp.BqIB(p.q)	Aa
	C.Bp.BqDB(p.q)	Aa
(10)	Bp.BqDB(p.q)	(9), Aa
	A656	(5), (10), Aa

A657 pDJp (Preuve : A650, Aa, df 28)

A658 pGqD.BpCBq

Preuve :

(2)	pGqC.pGqI.pCq	A1, df 12
(3)	BpC.BpIp	A1
(4)	BqC.BqIq	A1
(5)	dext2.dext3.dext4CA658	Aa
(6)	sin2.sin3C.sin2.sin3.sin4	A2, Aa
(7)	sin2.sin3CA658	(2),(3),(4),(5),(6),Aa
(8)	sin3C.sin2CA658	(7), Aa
(9)	sin3CA658	(8), Aa
(10)	FBpC.dextA658I1	Aa
	CA658	Aa
	A658	(9), (10), Aa

A659 B(pGq)D.BpGBq (Preuve : A658, rinf 1, df 12,A3, Aa)

A660 pDDqD.pDq (Preuve : A650, df 13)

A661 pGqD.pCq (Preuve : A650, df 12)

A662 pDDqC.pCq (Preuve : A660, Aa)

A663 p≡qD.Bp≡Bq (Preuve : A658, Aa, df 27)

A664 B(p≡q)I.p≡q (Preuve : A656, Aa, df 12, df 27)

A664/2 pIIqI.pDDq..qDDp

Preuve :

(2)	pIqDD.pDq..qDp	Aa, rinf 1, df 13
(3)	pDq.(qDp)DD.pIq	Aa, rinf 1, df 13
(4)	Bsin2DBdext2	(2), A3
	D.B(pDq).B(qDp)	A656
	D.pDDq..qDDp	df 13
(5)	Bsin3D.pIIq	(3), A3, df 25
(6)	pDDq.(qDDp)D.pIIq	(5), A656, df 13
	A664/2	(4), df 13, (6), Aa

A665 pIIqD.BpIBq (Preuve : A664, A653, Aa)

A666 B(p≡q)D.Bp≡Bq (Preuve : A663, Aa)

A667 BLpILBp

Preuve :

(2)	BLpCBp	Aa, rinf 20
(3)	BLpDLBp	(2), Aa
(4)	BpDBLp	Aa, rinf 19
(5)	BpC.BLpILp	A1, (4)
	C.LBLpILp..BLpILp	Aa
(6)	LBpDLBLp	(4), Aa
(7)	LBpC.LBpDLBLp.Bp	(6), Aa
	C.LBpDBLp	(5), Aa
(8)	LBpDBLp	(7), Aa
	A667	(3), (8), Aa

A667/2 FBLpIFBp (Preuve : A667, Aa)

A668 FBLpINBLp (Preuve : A667, Aa)

A669 Bp≡FJFp

Preuve :

(2)	p≡FFp	Aa, rinf 1, A664
(3)	Bp≡BFFp	(2), rinf 23
	≡FFBFFp	Aa
	≡FJFp	df 28

A670 Bp≡NJFp (Preuve : A669, Aa, df 28)

A671 FJpINJp (Preuve : Aa, df 28)

A672 NJpIBLp (Preuve : Aa, rinf 24, A667, df 28)

A673 FJFpIBLp (Preuve : A669, Aa, A667)

A674 LJpIJp (Preuve : df 28, Aa)

A675 JLpIJp (Preuve : df 28, Aa, A665, rinf 1)

A675/2 JpINBFp (Preuve : df 28, A667, Aa)

A676 FBpIJFp (Preuve : A672, A667, Aa)

A677 FBpINBLp (Preuve : A667, Aa)

A678 FJpIBFp (Preuve : A669, Aa, A667, A675)

A679 BJpIJp (Preuve : Aa, A650, A650/2)

A680 JBpIBLp (Preuve : A652, A667)

A680/2 BpIBBp

Preuve :

(2)	BBpDBp	A650
(3)	BpDJBp	A657
	DBJBp	A679
(4)	BJBpIBLBp	A652, rinf 24
	ILBBp	A667
(5)	BpDLBBp	(3), (4), Aa
(6)	BpCBBp	(5), Aa
	C.BBpIBp	A1, Aa
	C.BpDBBp	Aa
(7)	BpDBBp	(6), Aa
	A680/2	(2), (7), Aa

A680/3 BpIIBBp (Preuve : A680/2, rinf 1, df 25)

A681 JJpIJp (Preuve : Aa, A680, A676, df 28)

A682 JBp=Bp (Preuve : A652, Aa)

A683 FJBpIFBp (Preuve : A682, Aa)

A683/2 pIIqD.BpIIBq (Preuve : A665, rinf 19, df 25, A680/2)

A683/3 pDDqD.BpDDBq (Preuve : A680/2, A653/2, df 13)

Sch 2 pIIqC.---p...I---q...
(pourvu que p soit affecté dans "---p..." seulement = par des occurrences de 'B', 'F', 'N', '.', '^' et 'I' ainsi que par d'autres définis exclusivement à partir de ceux-là)

Preuve : par induction mathématique à partir de Aa, Sch 1', = rinf 20, df 25, A680/2

A684 J(p+q)I.Jp+Jq (Preuve : A656, Aa, Sch 2, df 28)

A684/2 J(pCq)I.BpCJq (Preuve : A684, df 7, A676)

A685 Bp.(pGq)CBq (Preuve : A2, Aa, df 12)

A686 FJ(pCq)C.qGp

Preuve :

(2)	FJ(pCq)IBF(Fp+q)	A678, Aa, Sch 2
	IB(Lp.Fq)	Aa, Sch 2
	IB(Fq.Lp)	Aa, rinf 1, rinf 25
(3)	Fq.LpC.Fq+p	Aa
(4)	B(Fq.Lp)CB(Fq+p)	(3), rinf 20
	CB(qCp)	
	A686	(2), (4), Aa, df 12

A687 pDDqD.NqDDNp (Preuve : A1, df 13, Aa)

A689 BpDJp (Preuve:, A650, A657, Aa)

A689/2 NJpDNBp (Preuve : A689, Aa)

A690 BFpDFBp (Preuve : A689, A676) /df 25)

A691 BpC.BpIIp (Preuve : A1,rinf20,rinf1,A655,A680/2,rinf25,

A692 BpC.FBpIIBFp (Preuve : A691,Sch 2,Aa,df25,A651,rinf25)

A693 FBpIBFpCJFp (Preuve : A692,df26,Aa,A676)

A694 HBLpIBLp (Preuve : Aa, A667)

A694/2 HBHpIBHp (Preuve : A1,Aa,A650,A359)

A694/3 BHpDHBp (Preuve : A650,rinf 19,A680/2,Aa,A694/2)

A695 Bp+BqDB(p+q) (Preuve : Aa, rinf 19,Aa)

A696 J(p.q)DJp (Preuve : Aa, A695, rinf 25, df 28)

A697 Bq+FBp+J(Fq.p) (Preuve : A655, Aa,A676,rinf23

A698 L(pGq)I.pGLq (Preuve : df 12, A667, Aa)

A699 pGq=.FqGFp (Preuve : Aa, rinf 23, df 12)

A700 B(p^q)I.Bp^Bq (Preuve : Aa,rinf23,A516,A656,A1)

A701 BXpIXBp (Preuve immédiate, par A700 + df 22)

A701/2 BKBpIKBp (Preuve : A1,A577,rinf 23,Aa) /rinf25)

A702 BKpIKBp (Preuve : A577,rinf23,A611,Sch2,rinf20,df25,A701/2

A703 Bp¯BqDB(p¯q) (Preuve : A616,A700,A656,A702,A695,rinf25)

A704 B(p¯q)I.Bp¯Bq (Preuve : A624,rinf23,A2,A1,Aa)

A705 NJNpIBLp (Preuve : df 28, A3, Aa)

A706 pGqC.JpDJq (Preuve : A655,Aa,df28,rinf23,df20,df12)

A707 pDDqD.JpDJq (Preuve similaire, à partir de A653)

A708 NpGpIBp (Preuve : Aa, rinf 1, rinf 24, df 12)

A709 pGNpIBNp (Preuve similaire)

A710 NpGLpIBLp (Preuve : A708, Aa, A698)

A711 pGFpIFJp (Preuve : Aa,rinf 1,rinf 24,df12,A678)

A712 N(pGFp)IJp (Preuve : A711,Aa,A674)

A713 pGq.(NpGq)IBq (Preuve : Aa,rinf24,A656,df12)

A714 pGq.(pGFq)IFJp (Preuve : Aa,rinf24,A656,df12,A678)

A715 BpC.qGp (Preuve : Aa,rinf20,df12)

A716 FJpC.pGq (Preuve : Aa,rinf 20,df 12,A677)

A717 BpC.JqDJ(p.q) (Preuve : Aa,rinf 20,A706,df 12, Aa)

A718 B(p+q)D.Bp+Jq (Preuve : A658,Aa;df28,rinf20)

A719 B(p+BLq)I.Bp+BLq (Preuve:A718,A680,Aa,A695,A680/2,rinf25)

A720 B(p+Bq)=.Bp+Bq (Preuve : A719, A667, Aa, rinf 23)

A721 B(p+Jq)I.Bp+Jq (Preuve : A719, A674, rinf25,A679)

A722 J(p.Jq)I.Jp.Jq (A719,Aa,A676,rinf24)

A723 J(p.BLq)I.Jp.BLq (Preuve : A722, A680, rinf 25)

A724 pDBJp (Preuve : A657,A679,rinf25)

A725 JBpDLp (Preuve : A724,A676,rinf25,A678,A674)

A726 JBpCp (Preuve : A725, Aa) /A378/6,rinf25, A676)

A727 JP(pCq)I.BpCJPq (Preuve : Aa,A430,rinf25,A684,A378/7, A728 BP(pCq)D.BpCBPq (Preuve : A433,rinf25,A655,A676,A378/6 Aa)

A729 BPpIPBPp (Preuve : A1,Aa,A380,A650,A359,A374)

A730 BPpDPBp (Preuve : A650,A374,rinf19,A680/2,A431,A729)

A731 BPpDBPBp (Preuve : A730,rinf 19, A680/2)

A732 BPBpIPBPp (Preuve : A374,A650,A431,A380,rinf 19,A729,Aa, /A734,A731)

A733 BPpIBPBp (Preuve : A729, A732)

A734 BfpIfBfp (Preuve similaire à celle de A729, par A511/11 et A511/15, au lieu de A380 et A374)

A735 BfpDfBp (Preuve : à partir de A734, similaire à celle de A730 à partir de A729; A511/15 au lieu de A374 et A511/5 au lieu de A431)

A736 BfpIBfBp (Preuve : A511/15,A650,A511/19,rinf19,A680/2,Aa)

A737 BfBpIBfp (Preuve : A734, A736)

A738 BYpIYBYp (Preuve : A691,df25,A650,A511/20,Aa,A511/16)

A739 YBà (Preuve : A504/7,rinf 1,A691,df25,Aa,A505/2)

A740 BYpDYBp (Preuve:A650,Aa,A510/4,rinf18,rinf19,A680/2,A665, A739, A738, A511/38a)

A741 YBYpDBYBp (Preuve : A740,rinf 19,A680/2,A738)

A742 J(pDq)C.BpDJq (Preuve : Aa,A656,rinf 1, df 12, rinf20, /df 28)

A743 Jp%BqCB(p%q) (Preuve : A742,Aa,df 28)

A744 fpGfqI.pRRq (Preuve : df 12,df35,df45)

A745 PpGPqI.pQQq (Preuve : df 12,df21,df44)

A746 JPpIPJPp (Preuve : df28,df5,A378/6,A378/7)

A747 JPpDPJp (Preuve : A746,A374,rinf27 bis,A431)

Sch 3 J(pIq)DJ(---p...I---q...)
(pourvu que "---p..." soit une formule où p ne soit affecté que par des foncteurs définis à partir de 'I','.','N','F', '^', 'à').
Preuve : Sch 1, rinf 27

On trouvera dans l'Annexe N° 2 de ce Livre I beaucoup d'autres théorèmes en 'B', ou tels qu'ils comprennent des foncteurs définis directement ou indirectement à partir de 'B'. Il est, en particulier, intéressant de comparer les propriétés de '%' à celles de '%%' : le premier de ces foncteurs est irréflexif et connexe, mais non transitif, non symétrique, non asymétrique et non antisymétrique; le second est irréflexif, asymétrique et transitif.

Enfin, nous estimons qu'il serait oiseux de développer formellement des preuves des théorèmes en 'T', 'W' etc., strictement parallèles à celles qui concernent les foncteurs 'B', 'J' etc. On trouvera dans l'Annexe N° 2 de ce Livre certains de ces théorèmes parallèles (plus quelques théorèmes supplémentaires, car 'T' est plus fort que 'B', puisque "Tp" implique "Bp", sans que la réciproque soit vraie). Le lecteur construira aisément beaucoup d'autres.