Núm. 16 BOLETIN INFORMATIVO DEL INSTITUTO NACIONAL DEL CARBON Julio 1954

Año III

DETERMINACION DE LOS RENDIMIENTOS PONDERALES EN LOS ENSAYOS DE LOS APARATOS DEPURADORES DE CARBON BRUTO

Por R. IBARROLA SOLANO*

En el estudio del funcionamiento de los aparatos depuradores de carbón bruto, cualquiera que sea la curva o coeficiente que se trate de determinar, es preciso conocer la forma en que se distribuye el carbón de las distintas densidades entre el lavado, el mixto y los estériles obtenidos de un bruto determinado.

Para este estudio se parte del análisis densimétrico, tanto del bruto como de los productos de la depuración, siendo necesario saber las cantidades de estos productos que se han obtenido al tratar una cantidad de carbón bruto, para poder calcular la cantidad de carbón de cada densidad que había en éste y la que ha pasado a cada uno de aquéllos.

La determinación del peso de carbón bruto tratado y de los pesos de lavado, mixtos y estériles obtenidos durante el ensayo, muy pocas veces puede hacerse directamente, ya que por lo general no existen en los lavaderos dispositivos para pesar el carbón bruto que entra en una caja, y menos para pesar el estéril que sale de ella.

Aunque no las cantidades, las proporciones de los distintos productos obtenidos en el tiempo del ensayo pueden fácilmente calcularse por las conocidas fórmulas de Preparación Mecánica llamadas de dos, o de tres, productos, según se trate de lavado y estéril, o de lavado, mixtos y estériles.

Para el empleo de estas fórmulas hay que conocer el contenido de un metal, u otra sustancia, en el mineral tratado y en los productos de la depuración, si ésta da dos productos, o el contenido de dos sustancias, cuando sean tres los productos de la depuración.

En el caso del lavado de carbones, por el análisis inmediato y por el análisis densimétrico, conocemos el contenido en cenizas de carbones de distintas densidades, tanto del bruto como de los productos de la depuración. Así, cada una de las fracciones densimétricas, en el caso de dos productos,

* Ingeniero de Minas, Jefe de la Agrupación Sovilla, de la Sociedad Hullera Española.

o cada par de fracciones, en el caso de tres, nos dará las proporciones de lavado, mixtos y estéril obtenidos por cada 100 partes de bruto, es decir, los rendimientos ponderales en los distintos productos.

Las soluciones obtenidas para cada fracción, que debieran ser idénticas, no lo serán en la práctica a causa de los errores cometidos en la toma de muestras y en su preparación y análisis.

Previamente al comienzo del ensayo del funcionamiento de un aparato dadó, se aconseja determinar el tiempo que los granos de carbón y pizarra tardan en atravesarlo. Para ello, se unen al carbón bruto trozos de ladrillo y de carbón pintados de blanco, de tamaño apropiado, y se mide el tiempo que pasa hasta que se encuentren a la salida de la caja [1].

Se pretende con esta precaución retrasar la toma de muestras del lavado y del estéril el tiempo justo que estos géneros tardan en atravesar el aparato de depuración, para que las muestras sean las correspondientes a los resultados de la depuración del bruto desmuestrado.

Al efectuar esta determinación, se encuentra no sólo que los tiempos son distintos para el carbón y el estéril, sino que son muy variables de unos granos a otros, bien por su densidad o tamaño, bien por la posición en que quedan al entrar en la caja. Así, durante un largo plazo, se pueden observar entre el estéril y entre el carbón lavado los trozos marcados que se introdujeron simultáneamente en la caja.

Por muchas precauciones que se tomen, las muestras del carbón bruto y de los distintos productos no se corresponden exactamente, y el único modo de disminuir el error que esto produce es alimentar el aparato depurador con carbón lo más homogéneo posible, no solamente durante la duración del ensayo, sino también antes de comenzarle, y extender la duración del ensayo lo bastante para que las diferencias de tiempo de los distintos granos sean insignificantes comparadas con el tiempo total de la experiencia.

Al error producido por esta causa hay que añadir los errores correspondientes a cada toma de muestras, que, como se sabe, dependen de las variaciones en la composición de los géneros, del número de tomas individuales y del volumen de éstas. Hay que tener en cuenta que las cantidades de productos pesados en el carbón, y de ligeros en el estéril, son muy pequeñas, por lo que las tomas individuales deben ser bastante voluminosas.

Estas causas de error obrarán lo mismo sobre cualquier fracción densimétrica, por lo que los errores relativos probables serán iguales.

El análisis densimétrico, que se efectúa generalmente partiendo de la menor densidad y tratando sucesivamente con líquidos de densidades crecientes la porción que no flota en el anterior, es también causa de errores, siendo fácil que granos de densidad próxima a la del baño, en más o en menos, de flotabilidad dudosa, sean ocluídos entre otros de menos o más densidad y arrastrados a la fracción inmediatamente anterior o posterior a la que les correspondería.

El análisis densimétrico no produce errores relativos iguales para todas las densidades. Habrá fácilmente un pequeño aumento de peso en las fracciones de mayor volumen, lo que produce poco error relativo, y una ligera pérdida en las fracciones de menor volumen, que será un error relativo de más importancia. Además, las partículas desclasificadas en una separación no pasarán a otras fracciones de densidad más distinta, sino que permanecerán en la inmediatamente siguiente a la que les corresponde.

La pesada de las fracciones densimétri-

1 Ver notas al final del artículo.

cas separadas dará errores absolutos comparables y, siendo las fracciones de pesos muy distintos, se obtendrán errores relativamente mucho más importantes en las fracciones pequeñas que en las grandes. Esto se puede compensar, en parte, utilizando balanzas de más precisión para determinar el peso de las fracciones pequeñas.

Para compensar en lo posible los errores debidos al análisis, se debe pues hacer el cálculo de los rendimientos ponderales, no a partir de los pesos de las fracciones densimétricas separadas, sino partiendo de los pesos acumulados de las fracciones, comenzando desde la más ligera, es decir, del total que flota en cada baño de separación. Debe empezarse con un baño de densidad suficiente para que la primera de las fracciones separadas no sea muy pequeña.

De todas formas, siempre se obtendrá una serie de valores más o menos distintos para los rendimientos ponderales. Entre todos ellos hay que elegir uno para cada producto para realizar el estudio de la depuración.

CASO DE DOS PRODUCTOS

En el caso en que se obtengan solamente dos productos en la depuración, lavado y estéril, no hay más que una incógnita, pues los dos rendimientos ponderales buscados deben sumar 1 ó 100, según se refieran a una o a cien partes de bruto.

Algunos autores aconsejan calcular estos rendimientos ponderales a partir de las cenizas del bruto, del lavado y del estéril, por considerar más exacto el análisis de cenizas que los densimétricos. Pero siendo varias las separaciones por densidad efectuadas, y varios los valores obtenidos, no puede prescindirse del resultado que de los análisis densimétricos pueda obtenerse. Por otra parte, es de desear que el bruto reconstruído mezclando el lavado y el estéril en la proporción de los distintos rendimientos ponderales, sea lo más parecido posible al bruto real, por lo que hay que utilizar el valor calculado partiendo de los datos de dicho análisis, y, si acaso, emplear los análisis de cenizas como uno más de los resultados de la separación por densidades.

Llamando L al rendimiento ponderal en carbón lavado, y E al rendimiento ponderal en estéril, y designando por l_n, e_n y b_n los contenidos, en tanto por ciento, de género de densidad menor o mayor que d_n en cada producto (lavado, estéril y bruto), tendremos:

$$L\,l_n + E\,e_n = b_n$$
$$L + E = 1$$

de donde se deduce:

$$L = \frac{b_n - e_n}{l_n - e_n} \qquad E = \frac{l_n - b_n}{l_n - e_n}$$

Aplicando estas fórmulas, se obtendrán distintos valores para L y E, de los que puede deducirse un par tomando la media aritmética de todos ellos, como puede verse en el número 8 de este Boletín [2].

Para determinar la media aritmética de los distintos valores hay que calcular previamente éstos, y siendo muchas las densidades empleadas en el fraccionamiento densimétrico, resulta un trabajo relativamente pesado. Esta media aritmética, por otra parte, no dará un valor mejor que otro cualquiera, nada más que en el caso de una distribución normal de los errores.

Puede utilizarse otro valor medio, de cálculo mucho más sencillo por resumirse en una sola fórmula, sumando los numeradores y denominadores de los quebrados que dan los distintos valores, es decir, tomando:

$$L = \frac{\Sigma\, b_n - \Sigma\, e_n}{\Sigma\, l_n - \Sigma\, e_n}$$

Para calcular así el rendimiento ponderal en lavado correspondiente al ejemplo anterior, no hay más que sumar las columnas 16, 12 y 15 del cuadro número 1 relativo a dicho ensayo [3], obteniéndose:

$$L = \frac{1.401{,}45 - 384{,}35}{1.401{,}45 - 175{,}24} = 0{,}8294$$

es decir, el mismo resultado, con mucho menos trabajo.

La misma probabilidad de compensación de errores que hay al sumar los distintos valores obtenidos para el rendimiento ponderal, la hay al sumar las cantidades de género que flotan en las distintas densidades, que son las que están primitivamente afectadas de errores.

Este procedimiento tiene que aplicarse a las cantidades que flotan o se hunden en cada densidad, y no a las fracciones densimétricas, que siempre deben sumar 100 y darían, por lo tanto, una indeterminación.

El procedimiento para calcular el rendimiento ponderal más atrayente, pero más laborioso, es el llamado de los mínimos cuadrados, que consiste en determinar los rendimientos de forma que sea un mínimo la suma de los cuadrados de las diferencias entre el bruto real y el reconstruído.

Con las mismas notaciones que antes, tenemos:

$$\Delta n = L\, l_n + E\, e_n - b_n$$
$$E = 1 - L$$

de donde se deduce:

$$\Delta n = L\,(l_n - e_n) + (e_n - b_n)$$

y, por lo tanto:

$$\Sigma\, \Delta^2 = \Sigma\,[\,L\,(l_n - e_n) + (e_n - b_n)]^2$$

Tomaremos para valor de L el que hace mínimo $\Sigma\,\Delta^2$, es decir, el que anula a su derivada respecto a L.

Derivando e igualando a cero, se obtiene:

$$\Sigma\, 2\,[L\,(l_n - e_n) + (e_n - b_n)]\,(l_n - e_n) = 0$$

de donde:

$$L = \frac{\Sigma (l_n - e_n)(b_n - e_n)}{\Sigma\,(l_n - e_n)^2}$$

valor algo más difícil de calcular que el correspondiente al procedimiento empleado por nosotros, pero no más que el del primer método.

Para facilitar el cálculo puede seguirse la disposición que se indica en el cuadro número 1, aplicada al mismo ejemplo citado. El valor que se obtiene es L = 90.024/108.565 =0, 9292, resultado prácticamente igual al deducido antes, pero que, en general, será distinto al encontrado por los otros métodos.

CUADRO NUMERO 1

Depuración que da dos productos.–Ejemplo del cálculo de los rendimientos ponderales por el método de los mínimos cuadrados

l	e	b	b — e	l — e	(b — e) × (l — e)	(l — e)²
74,00	0,06	60,84	60,78	73,94	4.494	5.467
88,76	0,10	73,30	73,20	88,66	6.490	7.861
91,43	0,12	75,53	75,41	91,31	6.886	8.338
93,07	0,15	77,14	76,99	92,92	7.154	8.634
94,49	0,19	78,43	78,24	94,30	7.378	8.892
95,68	0,28	79,33	79,05	95,40	7.541	9.101
96,72	0,60	80,26	79,66	96,12	7.657	9.239
97,48	1,25	81,03	79,78	96,23	7.677	9.260
98,03	2,64	81,80	79,16	95,39	7.551	9.099
98,52	5,08	82,75	77,67	93,44	7.257	8.731
98,89	8,82	83,68	74,86	90,07	6.743	8.112
99,05	14,42	84,88	70,46	84,63	5.963	7.162
99,21	23,55	86,57	63,02	75,66	4.768	5.724
99,45	45,31	90,61	45,30	54,14	2.453	2.931
99,95	96,25	99,50	3,25	3,70	12	14
				SUMAS......	90.024	108565

CASO DE TRES PRODUCTOS

En el caso de que se produzcan en la depuración tres productos, carbón lavado, mixtos y estéril, la determinación de los rendimientos ponderales se funda en los mismos principios que en el caso anterior, con la única diferencia de que, por haber dos incógnitas, necesitamos dos ecuaciones.

Siendo siempre más de dos las fracciones densimétricas separadas en el análisis, tendremos también más ecuaciones que incógnitas, y reuniendo estas ecuaciones de dos en dos obtendremos distintas soluciones.

Las ecuaciones serán:

$$
\begin{aligned}
&L\, l_1 + M\, m_1 + E\, e_1 = b_1\\
&L\, l_2 + M\, m_2 + E\, e_2 = b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&E = 1 - L - M
\end{aligned}
$$

de las que se deducen estas otras:

$$
\begin{aligned}
&L(l_1 - e_1) + M(m_1 - e_1) = b_1 - e_1\\
&L(l_2 - e_2) + M(m_2 - e_2) = b_2 - e_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

El CERCHAR hace el cálculo gráficamente, en un sistema de coordenadas en el que cada una de estas últimas ecuaciones vendrá representada por una línea recta, fácil de dibujar calculando los puntos donde cortan a los ejes $L = 0$ y $M = 0$. Todas estas rectas se cortarán en puntos muy próximos, y entre ellos se podrá elegir aproximadamente el central, cuyas coordenadas serán los valores de L y M buscados[4].

Esta elegante solución tiene el inconveniente de ser poco concreta. El punto central de todas las soluciones no es un punto indubitable, observándose prácticamente que los pequeños errores de los análisis conducen a valores muy diferentes para las soluciones, especialmente en lo que se refiere al rendimiento en mixtos.

En el número 12 de este Boletín se sigue en un ejemplo el método de Paul y Kühn para la determinación de los rendimientos ponderales, que consiste en admitir como mejores valores de los rendimientos los que se calculan con los datos correspondientes a las dos densidades de cortadura, que no se conocen y se calculan teniendo presente que, por definición, éstas son las que producen en el género bruto una cantidad de flotados igual al rendimiento ponderal de la depuración.

No entramos en el detalle de este procedimiento, descrito en el ejemplo a que nos acabamos de referir[5], pero hacemos observar que es completamente caprichoso escoger las densidades de cortadura como puntos en los que no ha habido ningún error ni en la toma de muestras ni en los análisis, y, además, que es trabajoso de calcular y no se presta a ser entregado a personal auxiliar, mientras que los otros métodos en los que se efectúan unas operaciones siguiendo esquemas claros, pueden ser calculados por cualquier auxiliar.

Siendo tantas las soluciones que se obtienen reuniendo de dos en dos las ecuaciones de que se dispone, es prácticamente imposible calcular todas ellas y determinar su media aritmética.

Tampoco se pueden sumar los numeradores y denominadores de las fórmulas que dan las distintas soluciones, pues se obtendrá siempre 0/0.

Pueden reunirse en una sola las distintas soluciones obtenidas con una ecuación y todas las demás, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&[(l_1 - e_1)(m_2 - e_2) - (l_2 - e_2)(m_1 - e_1)]\, L\\
&= (b_1 - e_1)(m_2 - e_2) - (m_1 - e_1)(b_2 - e_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[(l_1 - e_1)(m_3 - e_3) - (l_3 - e_3)(m_1 - e_1)]\, L\\
&= (b_1 - e_1)(m_3 - e_3) - (m_1 - e_1)(b_3 - e_3)
\end{aligned}
$$

y sumando, y despejando L:

$$
L = \frac{(b_1 - e_1)\,[(\Sigma m - m_1) - (\Sigma e - e_1)] - (m_1 - e_1)\,[(\Sigma b - b_1) - (\Sigma e - e_1)]}{(l_1 - e_1)\,[(\Sigma m - m_1) - (\Sigma e - e_1)] - (m_1 - e_1)\,[(\Sigma l - l_1) - (\Sigma e - e_1)]}
$$

ERRATA

En la página 6, línea 8 de la segunda columna, dice = 0,9292 y debe decir = 0,8292.

Podríamos determinar así los valores de L y M para cada densidad, y tomar luego la media aritmética de todos ellos. El método sería demasiado laborioso, resultando mucho más sencillo el de los mínimos cuadrados que exponemos a continuación.

Siguiendo la misma marcha que en el caso de dos productos, partiendo de las ecuaciones aplicadas más arriba tendremos:

$$\Delta n = L(l_n - e_n) + M(m_n - e_n) - (b_n - e_n)$$

y de aquí:

$$\Sigma\Delta^2 = \Sigma[L(l_n - e_n) + M(m_n - e_n) - (b_n - e_n)]^2$$

Los valores que tomamos para L y M son los que hacen mínima esta suma de cuadrados de las diferencias, o sean los que anulan al sistema formado igualando a cero las derivadas parciales respecto a L y M. Derivando e igualando a cero se obtiene el sistema:

$$\Sigma 2[L(l_n - e_n) + M(m_n - e_n) - (b_n - e_n)](l_n - e_n) = 0$$

$$\Sigma 2[L(l_n - e_n) + M(m_n - e_n) - (b_n - e_n)](m_n - e_n) = 0$$

que se reduce al

$$L\Sigma(l_n - e_n)^2 + M\Sigma(m_n - e_n)(l_n - e_n) + \Sigma(l_n - e_n)(e_n - b_n) = 0$$

$$L\Sigma(l_n - e_n)(m_n - e_n) + M\Sigma(m_n - e_n)^2 + \Sigma(m_n - e_n)(e_n - b_n) = 0$$

Poniendo:

$$\alpha = \Sigma(l_n - e_n)^2$$
$$\beta = \Sigma(l_n - e_n)(b_n - e_n)$$
$$\gamma = \Sigma(m_n - e_n)^2$$
$$\delta = \Sigma(m_n - e_n)(l_n - e_n)$$
$$\varepsilon = \Sigma(m_n - e_n)(b_n - e_n)$$

y resolviendo el sistema, se obtiene:

$$L = \frac{\beta\gamma - \varepsilon\delta}{\alpha\gamma - \delta^2} \qquad M = \frac{\alpha\varepsilon - \delta\beta}{\alpha\gamma - \delta^2}$$

Aunque el cálculo práctico es algo laborioso, si se sigue una marcha ordenada resulta fácil y susceptible de ser efectuado por personal auxiliar.

En el cuadro número 2 aplicamos este procedimiento al mismo ejemplo del número 12 de este Boletín. Con los valores de α, β, γ, δ y ε deducidos en el cuadro, obtenemos

$$L = 0{,}3849, \quad M = 0{,}1431, \quad y \quad E = 0{,}4720$$

que, comparados con el 38 % para el lavado, 17 % para los mixtos y 45 % para los estériles, indicados en dicho ejemplo, conducen a diferencias que si bien la primera no es de consideración, sí lo es la correspondiente al mixto.

Las diferencias que estos distintos rendimientos producen en los brutos reconstruídos no son de importancia en conjunto, pero en las fracciones de densidad media, que generalmente son pequeñas, los errores o diferencias son relativamente de consideración y se traducen en variaciones sensibles en las líneas o coeficientes que caracterizan la depuración. Tendremos una medida de la confianza que puede tenerse en esos coeficientes por el valor del error medio calculado por la conocida fórmula

$$\delta = \sqrt{\Delta^2/(\pi - 2)}$$

En un artículo de Grumbrech[6] puede verse la influencia de estos errores en las densidades de partición.

RESUMEN

El conocimiento de los rendimientos ponderales en los distintos productos de una depuración es imprescindible para el estudio del funcionamiento del aparato que la realiza.

Estos rendimientos se calculan fácilmente con los datos obtenidos en el análisis densimétrico, pero siendo un problema más que determinado, hay que escoger una solución que sea la mejor y una media de ellas,

CUADRO NUMERO 2

Depuración que da tres productos.–Ejemplo del cálculo de los rendimientos ponderales por el método de los mínimos cuadrados

l	m	e	b	l – e	m – e	b – e	$(l-e)^2$	$(l-e)(b-e)$	$(m-e)^2$	$(l-e)(m-e)$	$(m-e)(b-e)$
61,94	4,93	2,66	25,88	59,28	2,27	23,22	3514,1184	1376,4816	5,1529	134,5656	52,7094
86,10	8,62	4,36	36,09	81,74	4,26	31,73	6681,4276	2593,6102	18,1476	348,2124	135,1698
92,43	11,93	5,09	39,65	87,34	6,84	34,56	7628,2756	3018,4704	46,7856	597,4056	236,3904
95,75	17,17	5,87	42,05	89,88	11,30	36,18	8078,4144	3251,8584	127,6900	1015,6440	408,8340
98,08	25,31	7,46	49,10	90,63	17,85	37,64	8213,7969	3411,3132	318,6225	1617,7455	671,8740
98,84	30,23	8,69	46,60	90,15	21,54	37,91	8127,0225	3417,5865	463,9716	1941,8310	816,5814
99,26	36,92	11,49	48,71	87,77	25,43	37,22	7703,5729	3266,7994	646,6849	2231,9911	946,5046
99,46	41,48	13,71	51,15	85,75	27,77	37,44	7353,0625	3210,4800	771,1729	2381,2775	1039,7088
99,81	57,89	26,57	59,69	73,24	31,22	33,12	5364,0976	2425,7088	980,9424	2293,8768	1037,3184
99,94	80,75	63,08	78,33	36,86	17,67	15,25	1358,6596	562,1150	312,2289	651,3162	269,4675
100,00	100,00	100,00	100,00	0	0	0	—	—	—	—	—
TOTALES.........							$\alpha = 64022,4480$	$\beta = 26534,4235$	$\gamma = 3691,3993$	$\delta = 13231,8657$	$\varepsilon = 5614,5583$

o la que produzca un mínimo en la suma de los cuadrados de las diferencias entre el bruto real y el reconstruído.

En el caso de que la depuración no dé más que carbón lavado y estériles, da suficiente exactitud, y es muy fácil de calcular, una fórmula sencilla: un valor medio formado por un quebrado que tiene por numerador la suma de los numeradores y por denominador la suma de los denominadores de los quebrados que dan las distintas soluciones.

Si en la depuración se producen lavado, mixtos y estériles, el único método que, sin gran trabajo, permite llegar a la mejor solución es el de los mínimos cuadrados.

Cualquiera que sea el método seguido para el cálculo de los rendimientos ponderales, se pueden añadir a los datos obtenidos por el análisis densimétrico, como otros más, los contenidos en cenizas de los distintos productos y del carbón bruto.

Para completar los resultados del estudio de una depuración, a las cifras que caracterizan la operación debe acompañarse el valor del error medio entre el bruto real y el reconstruído.

Recibido en junio de 1954

NOTAS

[1] Hagamos la observación de que en los ensayos realizados por el Instituto Nacional del Carbón, los ladrillos salen con el carbón lavado.

[2] Marzo de 1953, páginas 39 a 42.

[3] Idem, página 39.

[4] Puede verse una aplicación de este método, por ejemplo, en el tomo III (páginas 212 a 216) de la obra «El Carbón», publicada por el Instituto el año 1951.

[5] Boletín Informativo del Instituto Nacional del Carbón, número 12 (noviembre de 1953), páginas 36 a 42.

[6] *Glückauf*, 88, **39/40**, 957-974, 1952.