

Programa de doctorado: «Ciencia y tecnología de la ingeniería geodésica y cartográfica»

Trabajo de investigación tutelado, septiembre de 2009

Facultad de Ciencias Matemáticas

Universidad Complutense de Madrid

Técnicas geodésicas y riesgos naturales

El problema inverso de la gravimetría

Alumno: José Luis García Pallero

Director: José Fernández Torres

Técnicas geodésicas y riesgos naturales. El problema inverso de la gravimetría

Copyright © 2008, 2009

José Luis García Pallero, jgpallero@gmail.com

Aviso legal. Sobre este documento

Se garantiza permiso para copiar, modificar y distribuir este documento (excepto las Figuras 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 4.10, 5.2, 5.3 y 5.4) según los términos de la *GNU Free Documentation License* (FDL), v.1.3 o cualquiera posterior publicada por la *Free Software Foundation* (FSF), sin secciones invariantes ni textos de cubierta delantera o trasera. Puede obtener una copia de la FDL o ponerse en contacto con la FSF a través de las siguientes direcciones web: <http://www.fsf.org> o <http://www.gnu.org>. Puede obtener una copia transparente de este documento (en formato \LaTeX) a través de jgpallero@gmail.com.

Aviso legal. Sobre el software que acompaña a este trabajo

Se garantiza permiso para copiar, modificar y distribuir el software que acompaña a este trabajo según los términos de la *GNU General Public License* (GPL), v.3 o cualquiera posterior publicada por la *Free Software Foundation* (FSF). Puede obtener una copia de la GPL o ponerse en contacto con la FSF a través de las siguientes direcciones web: <http://www.fsf.org> o <http://www.gnu.org>.

Índice general

Índice general	3
Índice de figuras	9
Índice de tablas	13
Agradecimientos	15
Introducción	17
1. El problema inverso de la geofísica	19
1.1. Introducción	19
1.2. Formulación general de los problemas directo e inverso	20
1.3. Existencia y unicidad de la solución del problema inverso	22
1.3.1. Existencia de la solución	22
1.3.2. Unicidad de la solución	23
1.4. Problemas mal condicionados y métodos para su resolución	24
1.4.1. Introducción	24
1.4.2. Sensibilidad y resolución de los métodos geofísicos	24
1.4.2.1. Formulación del problema inverso en el espacio matemá-	
tico general	24
1.4.2.2. Sensibilidad	25
1.4.2.3. Resolución	26
1.4.3. Formulación de problemas bien y mal condicionados	27

1.4.3.1.	Problemas bien condicionados	28
1.4.3.2.	Problemas condicionalmente bien condicionados	28
1.4.3.3.	Cuasi solución del problema mal condicionado	29
1.4.4.	Métodos de regularización en el problema inverso	31
1.4.4.1.	Operadores de regularización	31
1.4.4.2.	Funciones de estabilización	33
1.4.4.3.	La función paramétrica de Tikhonov	35
1.4.5.	Familias de funciones estabilizadoras	36
1.4.5.1.	Función de estabilización como función seudocuadrática	38
1.4.6.	Definición del parámetro de regularización	40
1.4.6.1.	Selección óptima del parámetro de regularización	40
1.4.6.2.	Selección del parámetro de regularización	43
2.	Inversión mediante el método O-R-F	45
2.1.	Introducción	45
2.2.	Método de inversión	46
2.2.1.	Espacio modelo	46
2.2.2.	Cálculos iniciales y visión global del proceso	47
2.2.3.	Criterio de apertura	48
2.2.4.	Criterios de exclusión	48
2.2.5.	Criterio de relleno: <i>forma de la anomalía</i>	49
2.2.6.	Cálculos finales y repetición del modelado	50
2.2.7.	Resumen de los pasos de modelado	51
2.3.	Ejemplos	52
2.3.1.	Prisma rectangular	52
2.3.2.	Cilindro circular	53
2.3.3.	Modelo compuesto por un cuerpo complejo	53
2.3.4.	Modelo compuesto por varios cuerpos anómalos	54
2.3.5.	Prisma rectangular con observaciones ruidosas	54
2.4.	Conclusiones	55

3. Inversión mediante el método GROWTH	63
3.1. Introducción	63
3.2. Descripción del método	64
3.2.1. Visión global del algoritmo	64
3.2.2. Metodología de inversión	67
3.2.3. Comentarios adicionales sobre el proceso de inversión	70
3.2.3.1. Variación de los contrastes de densidad durante el proceso de inversión	70
3.2.3.2. Variación de los contrastes de densidad con la profundidad	71
3.2.3.3. Elección óptima del parámetro de balance	72
3.2.3.4. Coeficiente de aleatoriedad	74
3.2.3.5. Tratamiento de errores groseros	74
3.2.3.6. Elección de la densidad para la corrección del terreno . . .	75
3.2.3.7. Tendencia regional	76
3.2.3.8. Estimación de la precisión de los parámetros ajustados . .	77
3.3. Ejemplos	77
3.3.1. Primera prueba	78
3.3.2. Segunda prueba	78
3.3.3. Tercera prueba	79
3.3.4. Cuarta prueba	79
3.3.5. Quinta prueba	79
3.3.6. Sexta prueba	80
3.3.7. Séptima prueba	80
3.4. Conclusiones	81
4. Inversión en cuencas sedimentarias	89
4.1. Introducción	89
4.2. Métodos de inversión	91
4.2.1. Planteamiento general del problema	91
4.2.2. Inversión con constreñimientos relativos y absolutos	93

4.2.2.1.	Estimación de los parámetros de balance	97
4.2.2.2.	Resultados	98
4.2.3.	Inversión sin constreñimientos	99
4.2.3.1.	Resultados	101
4.2.4.	Aproximación de la cuenca sedimentaria por un polígono de un número arbitrario de lados	102
4.2.5.	Aproximación de la cuenca sedimentaria por una figura trapezoidal	104
4.3.	Desarrollo de algunas ecuaciones	105
4.3.1.	Ajuste con constreñimientos relativos y absolutos	106
4.3.2.	Atracción de un prisma de densidad constante	107
4.3.3.	Atracción de un prisma de densidad variable con la profundidad . .	110
4.3.4.	Atracción de un polígono con un número arbitrario de lados	115
4.3.5.	Atracción de un modelo trapezoidal	117
4.4.	Ejemplos	118
4.4.1.	Primera prueba	118
4.4.2.	Segunda prueba	119
4.4.3.	Tercera prueba	119
4.4.4.	Cuarta prueba	120
4.4.5.	Quinta prueba	120
4.4.6.	Sexta prueba	121
4.4.7.	Séptima prueba	121
4.5.	Conclusiones	121
5.	Inversión de datos del polje de Zafarraya	131
5.1.	Introducción	131
5.2.	Estudios previos	133
5.3.	Datos gravimétricos	135
5.4.	Inversión gravimétrica	139
5.4.1.	Perfil I-I'	142
5.4.2.	Perfil II-II'	142

5.4.3. Perfil III-III'	143
5.4.4. Perfil IV-IV'	144
5.4.5. Perfil V-V'	145
5.4.6. Perfil VI-VI'	146
5.5. Conclusiones	147
A. GNU Free Documentation License	155
Bibliografía	167

Índice de figuras

1.1. Cuasi solución del problema inverso.	30
1.2. Operadores de regularización en la solución del problema inverso.	33
1.3. Función de estabilización y conjunto correcto.	35
1.4. Selección óptima del parámetro de regularización.	43
1.5. L-curva y posición del valor cuasi óptimo de α	44
2.1. Espacio modelo dividido en $m \times n$ prismas y puntos observados.	46
2.2. Inversión de sección de prisma rectangular. Norma L^1	56
2.3. Inversión de sección de prisma rectangular. Norma L^2	57
2.4. Inversión de sección de cilindro circular. Norma L^2 . (1).	58
2.5. Inversión de sección de cilindro circular. Norma L^2 . (2).	59
2.6. Inversión de sección de prisma con forma irregular. Norma L^2	60
2.7. Inversión de dos secciones de prisma rectangular. Norma L^2	61
2.8. Inversión de sección de prisma rectangular con ruido. Norma L^2	62
3.1. Espacio modelo y observaciones en un entorno bidimensional.	65
3.2. Primera prueba.	82
3.3. Segunda prueba.	83
3.4. Tercera prueba.	84
3.5. Cuarta prueba.	85
3.6. Quinta prueba.	86
3.7. Sexta prueba.	87
3.8. Séptima prueba.	88

4.1. Espacio modelo dividido en M prismas y puntos observados.	92
4.2. Espacio modelo dividido en $NX \times NY$ prismas y puntos observados.	100
4.3. Polígono con un número arbitrario de lados y punto atraído.	103
4.4. Aproximación de una cuenca sedimentaria por un polígono de N lados.	103
4.5. Aproximación de una cuenca sedimentaria por una figura trapezoidal.	104
4.6. Atracción de un prisma en 2D sobre un punto.	107
4.7. Aproximación discreta de un prisma de densidad variable.	111
4.8. Variación del contraste de densidad con la profundidad.	114
4.9. Variación de la atracción con la profundidad.	115
4.10. Densidad con respecto a la profundidad (datos de sondeo).	116
4.11. Modelo inicial para cuenca profunda.	119
4.12. Modelo inicial para cuenca poco profunda.	120
4.13. Primera prueba.	123
4.14. Segunda prueba.	124
4.15. Tercera prueba.	125
4.16. Cuarta prueba.	126
4.17. Quinta prueba.	127
4.18. Sexta prueba.	128
4.19. Séptima prueba.	129
5.1. Polje de Zafarraya y marco geológico.	132
5.2. Estructura del polje de Zafarraya.	133
5.3. Puntos de registro de ruido ambiental.	134
5.4. Profundidad de los sedimentos del polje de Zafarraya.	134
5.5. Levantamiento gravimétrico y anomalía de Bouguer.	136
5.6. Tendencia regional de la anomalía de Bouguer.	137
5.7. Anomalías locales.	138
5.8. Perfiles para la inversión.	140
5.9. Inversión del perfil I-I'.	149
5.10. Inversión del perfil II-II'.	150

5.11. Inversión del perfil III-III'.	151
5.12. Inversión del perfil IV-IV'.	152
5.13. Inversión del perfil V-V'.	153
5.14. Inversión del perfil VI-VI'.	154

Índice de tablas

4.1. Atracción de un prisma de densidad variable (1).	113
4.2. Atracción de un prisma de densidad variable (2).	114
5.1. Coeficientes del polinomio de la tendencia regional.	137
5.2. Coordenadas de los perfiles.	141
5.3. Profundidades de los puntos de corte entre perfiles.	148

Agradecimientos

Quiero agradecer al investigador José Fernández Torres la dirección de este trabajo así como la acogida, mediante una Beca Predoctoral Complutense, en el grupo de investigación que él coordina.

Por otra parte, doy las gracias a Antonio G. Camacho, quien me ha introducido en las técnicas de inversión gravimétrica y con quien, en una fecha no muy lejana, espero llegar a buen puerto en la realización de mi tesis doctoral.

Quiero agradecer también al programa ERASMUS la oportunidad que me brindó para realizar una estancia de tres meses en la «Friedrich-Schiller-Universität Jena» (Alemania), donde fui acogido de forma excepcional, especialmente por los profesores Gerhard Jentzsch, Adelheid Weise y Thomas Jahr, en el «Institut für Geowissenschaften».

A Pablo José González Méndez le debo bastantes lecciones de geología, la figura 5.1 de este trabajo y la introducción en el uso de la herramienta de dibujo GMT.

Por último, expreso mi gratitud a toda la comunidad que hace posible que el software libre sea una realidad. En concreto, para la realización de este trabajo se han utilizado, además del sistema operativo GNU/Linux (mediante la distribución Debian), los paquetes GNU Octave (para los cálculos numéricos) GMT, Inkscape y PDF Editor (para el procesado de los gráficos) y \LaTeX (para la redacción de esta memoria).

Introducción

La resolución del problema gravimétrico inverso aporta conocimiento acerca de la distribución de masas en el interior de la Tierra. La información que puede proporcionar esta técnica es útil tanto para el estudio de la estructura global la corteza terrestre como para la prospección en áreas de extensión más reducida, y como apoyo a otras técnicas como, por ejemplo, la sísmica (Montesinos, 1999).

El problema inverso de la gravimetría no tiene una solución única (Al-Chalabi, 1971; Bertete-Aguirre y otros, 2002; Telford y otros, 1976), por lo que, para obtener una, se han de introducir constreñimientos en su planteamiento y resolución. Como resultado, existen multitud de técnicas de inversión, dependiendo del tipo de entorno de trabajo (búsqueda de cuerpos aislados, cuencas sedimentarias, etc.) y de la forma de introducir los constreñimientos (Silva y otros, 2001b).

Una forma de clasificación de los métodos de inversión puede ser la división en dos grupos, atendiendo al número de parámetros: métodos discretos y métodos funcionales. Mientras que los primeros adoptan un número finito de parámetros modelo, los segundos implican algún tipo de función, de forma que los datos y/o las incógnitas se expresan mediante una relación espacial o temporal (Montesinos, 1999).

En cuanto a los métodos discretos, que son el objeto de estudio de este trabajo, se puede hacer una clasificación general en dos grandes grupos: métodos lineales o linealizados y métodos no lineales. En los métodos del primer grupo el operador de modelización directa es lineal, por lo que la resolución del problema será inmediata. Para los problemas no lineales no existen soluciones analíticas, pero se pueden determinar soluciones óptimas a través de técnicas iterativas de cálculo. Estas técnicas consisten en ir optimizando

un modelo inicial, comparando los datos observados con los generados por los sucesivos modelos de aproximación (Montesinos, 1999).

En este trabajo se estudian de forma general varias técnicas no lineales de inversión y se aplica una de ellas a un caso con datos reales.

En el capítulo 1 se da una breve introducción (basada en lo expuesto en Zhdanov (2002)) acerca del problema inverso de la geofísica. Se describe el planteamiento general del problema, así como una visión global de las técnicas de resolución.

En el capítulo 2 se estudia el método de inversión *open-reject-fill* (René, 1986), como punto de partida para la introducción del método GROWTH, que se describirá más adelante.

En el capítulo 3 se describe el método de inversión no lineal GROWTH, desarrollado por Antonio G. Camacho, del Instituto de Astronomía y Geodesia (IAG) (Camacho y otros, 2000, 2002, 2007). Este método constituye la principal técnica de interpretación gravimétrica empleada en multitud de trabajos recientes del IAG, como Araña y otros (2000); Camacho y otros (2001); Gottsmann y otros (2008); Montesinos y otros (2003); Nunes y otros (2006); Tiede y otros (2005).

En el capítulo 4 se estudian una serie de métodos de inversión no lineal, enfocados a la interpretación de la superficie de contacto entre sedimentos y basamento en cuencas sedimentarias. En este capítulo se propone una técnica de cálculo de la atracción gravitatoria de un prisma bidimensional cuya densidad puede variar de forma arbitraria con la profundidad.

Por último, en el capítulo 5 se aplica un método de inversión bidimensional con el fin de obtener la profundidad de la capa de sedimentos en el polje de Zafarraya (Granada).

El problema inverso de la geofísica

1.1. Introducción

Los métodos geofísicos se basan en el estudio de los diferentes campos físicos que se generan o propagan en el interior de la Tierra. Los más importantes son el gravitatorio, el magnético, el electromagnético y el sísmico. Los valores observados de estos campos dependen, principalmente, de las propiedades físicas de las rocas.

La aproximación convencional al análisis de datos geofísicos consiste en la definición de modelos geológicos y la comparación de los datos teóricos calculados según esos modelos con los datos observados en campo. Este modelado de los datos a partir de modelos propuestos a priori es conocido como *problema directo*; por tanto, la resolución del problema directo hace posible la predicción de los datos geofísicos para un modelo geológico dado.

El objetivo de la observación geofísica es la determinación de estructuras geológicas a partir de los datos observados. Debido a la complejidad de la estructura interna de la Tierra, el problema propuesto tiene una muy difícil solución, lo que conlleva a una simplificación (modelado) de la geología real para poder obtener alguna solución práctica. El problema que plantea la determinación de un modelo geológico a partir de una serie de datos observados se llama *problema inverso*. La calidad de los resultados en la interpretación geofísica depende de la habilidad a la hora de aproximar la geología real mediante los modelos propuestos, es decir, de la resolución de un problema inverso.

En lo que sigue se hará una breve introducción, basada en Zhdanov (2002), de la teoría general del problema inverso en geofísica.

1.2. Formulación general de los problemas directo e inverso

Podemos esquematizar, de forma general, los problemas directo e inverso de la geofísica de la siguiente manera:

- Problema directo: modelo{parámetros modelo \mathbf{m} } \rightarrow datos \mathbf{d} .
- Problema inverso: datos $\mathbf{d} \rightarrow$ modelo{parámetros modelo \mathbf{m} }.

Esto es, mediante el problema directo se predicen los datos de observación que genera un modelo concreto, mientras que a través del problema inverso se intentan resolver los parámetros de un modelo que genere unos determinados parámetros observados.

Estos planteamientos se formulan de la forma

$$\mathbf{d} = A(\mathbf{m}) \quad (1.1)$$

y

$$\mathbf{m} = A^{-1}(\mathbf{d}), \quad (1.2)$$

donde A y A^{-1} son los operadores de los problemas directo e inverso, respectivamente.

En la solución de cualquier problema inverso se plantean tres cuestiones importantes:

1. ¿Existe solución?
2. ¿Es única?
3. ¿Es estable?

La existencia de la solución está directamente relacionada con la formulación matemática del problema inverso. Desde el punto de vista físico debe existir una solución, ya que el objeto de estudio es una estructura que existe realmente en el interior de la Tierra. Sin embargo, desde el punto de vista matemático podría no existir ningún modelo numérico que representase adecuadamente la estructura real y que, a su vez, se ajustase de forma adecuada a los datos observados.

La unicidad de la solución puede ser ilustrada mediante el siguiente ejemplo. Considérense dos modelos diferentes, \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 , a partir de los cuales se genera el mismo conjunto de datos \mathbf{d}_0 :

$$A(\mathbf{m}_1) = \mathbf{d}_0, A(\mathbf{m}_2) = \mathbf{d}_0. \quad (1.3)$$

En este caso sería imposible distinguir los dos modelos a partir de los datos de partida. Con este ejemplo se puede ver la razón por la cual la cuestión de unicidad es una parte muy importante del planteamiento del problema inverso.

En cuanto a la estabilidad de la solución, ésta es crítica en cualquier problema de inversión. Cualquier dato procedente de la observación en campo está siempre contaminado por un cierto nivel de ruido $\delta\mathbf{d}$. La cuestión es determinar si la respuesta en el proceso de inversión de diversos conjuntos de datos que se diferencian en un cierto nivel de ruido es acorde con ese nivel de perturbación. Considérense dos modelos diferentes, \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 , que generan dos grupos de datos diferentes \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 :

$$A(\mathbf{m}_1) = \mathbf{d}_1, A(\mathbf{m}_2) = \mathbf{d}_2. \quad (1.4)$$

Asúmase también que los dos modelos son muy diferentes, mientras que los datos generados se diferencian sólo en el nivel de ruido ϵ :

$$\|\delta\mathbf{m}\| = \|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2\| > C, \|\delta\mathbf{d}\| = \|\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2\| < \epsilon, C \gg \epsilon, \quad (1.5)$$

En esta situación resulta imposible distinguir entre los dos modelos propuestos a partir de los datos observados.

Podemos considerar que un problema matemático es bien condicionado si las tres preguntas planteadas tienen respuesta afirmativa, es decir, si existe una única solución y ésta es estable. Por el contrario, llamamos mal condicionados a aquellos problemas para los que tenemos alguna respuesta negativa a alguna de las preguntas consideradas.

1.3. Existencia y unicidad de la solución del problema inverso

1.3.1. Existencia de la solución

Considérese el operador directo en la forma general:

$$\mathbf{d} = A(\mathbf{m}), \quad (1.6)$$

donde \mathbf{d} representa el conjunto de datos observados y \mathbf{m} el conjunto de parámetros modelo.

El problema de la existencia de la solución tiene dos consideraciones: por un lado se tiene la existencia física de una cierta distribución de parámetros que genera los datos observados, y por otra se tiene la existencia de una solución desde el punto de vista matemático para la ecuación (1.6). No hay duda alguna acerca de la existencia física de la solución al problema inverso, pero la existencia matemática del problema planteado puede ser cuestionada. Considérese primero que todo dato procedente de una medición \mathbf{d}_δ siempre contiene un cierto error $\delta\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d}_\delta = \mathbf{d} + \delta\mathbf{d}. \quad (1.7)$$

La cuestión radica en si es posible encontrar un cierto modelo \mathbf{m}_δ que genere los datos ruidosos observados:

$$\mathbf{d}_\delta = A(\mathbf{m}_\delta). \quad (1.8)$$

No siempre es posible encontrar un conjunto de parámetros que satisfagan la ecuación (1.8). El ruido que contamina las observaciones no tiene relación alguna con los parámetros modelo sino que, si todos los errores sistemáticos han sido correctamente corregidos, tiene una naturaleza aleatoria y no puede ser descrito por el mismo modelo funcional que relaciona las observaciones teóricas con los parámetros modelo. Por esta razón, nunca se podrá encontrar un modelo que se ajuste de forma perfecta a los datos observados.

Usualmente, la solución de un problema inverso se busca en el grupo de los modelos simplificados. Por lo tanto, la cuestión debe plantearse en torno a la *cuasi-solución* del

problema inverso, esto es, en torno a la solución aportada por el modelo que mejor ajusta los datos observados. De esta forma, se llega a la idea de *existencia en la práctica*, es decir, la solución del problema inverso existe si existe un modelo \mathbf{m}_δ tal que:

$$\|\mathbf{d}_\delta - A(\mathbf{m}_\delta)\| \leq \delta, \quad (1.9)$$

donde δ es el error de la medición. Sin embargo, es importante resaltar que es imposible encontrar una solución exacta al problema inverso. No existe ninguna interpretación práctica del ruido y los datos son siempre ruidosos. Por tanto, la solución al problema inverso debe ser entendida como el modelo que mejor ajuste las observaciones dentro de un nivel de precisión dado δ .

1.3.2. Unicidad de la solución

Otra cuestión importante es la unicidad de la solución del problema inverso. Aunque pueden encontrarse demostraciones de la no unicidad del problema inverso de la gravimetría fácilmente (Al-Chalabi, 1971; Bertete-Aguirre y otros, 2002; Telford y otros, 1976) aquí se expondrá un ejemplo intuitivo basado en la definición de la *fente no radiante*.

Consideremos dos bolas centradas en el mismo punto y con la misma masa pero diferente radio, las cuales producirán el mismo campo gravitatorio en el exterior de su superficie. Obviamente, las densidades ρ_1 y ρ_2 de las bolas B_1 y B_2 con radios R_1 y R_2 , serán diferentes bajo la condición de igualdad de masa M :

$$M = \rho_1 \frac{4\pi}{3} R_1^3 = \rho_2 \frac{4\pi}{3} R_2^3. \quad (1.10)$$

Si se considera la bola que se genera sustrayendo la bola pequeña B_1 de la grande B_2 ($R_1 < R_2$), este cuerpo esférico generará un campo gravitatorio igual a 0 en el exterior de su superficie.

La distribución de densidades $\Delta\rho$ en la bola obtenida anteriormente será:

$$\Delta\rho(r) = \begin{cases} \rho_2 - \rho_1 < 0, & \text{si } r \leq R_1, \\ \rho_2, & \text{si } R_1 \leq r \leq R_2. \end{cases} \quad (1.11)$$

Por lo tanto, la bola estará compuesta por dos capas: la bola interior, de densidad negativa (aunque la densidad es siempre un valor positivo, en geofísica se trabaja con valores de contraste de densidad, que es la diferencia con respecto a un valor de referencia) y la capa externa, de densidad positiva. Al generar este cuerpo un campo gravitatorio de intensidad 0, se podrán añadir cuantas bolas se desee a un modelo de densidades concreto sin que su influencia se vea reflejada en el campo gravitatorio total, por lo que infinitas distribuciones de densidad pueden generar el mismo campo atrayente.

1.4. Problemas mal condicionados y métodos para su resolución

1.4.1. Introducción

La solución formal de un problema inverso mal condicionado puede resultar en un modelo inestable y poco realista. La teoría de la regularización, cuyos fundamentos fueron desarrollados y publicados en Tikhonov y Arsenin (1977), proporciona una guía de cómo evitar esta dificultad.

1.4.2. Sensibilidad y resolución de los métodos geofísicos

Comenzaremos con la formulación de las nociones de sensibilidad y resolución en geofísica, que son dos conceptos importantes para un correcto entendimiento de los principios de la regularización.

1.4.2.1. Formulación del problema inverso en el espacio matemático general

En la sección 1.2 se introdujo la noción de problema inverso como la solución de la ecuación

$$\mathbf{d} = A(\mathbf{m}), \quad (1.12)$$

donde \mathbf{m} es cualquier función (o vector) que describe los parámetros modelo y \mathbf{d} es un conjunto de datos, que puede ser caracterizado como una función del punto de observa-

ción (en el caso de observaciones continuas) o como un vector (en el caso de observaciones discretas). La solución del problema inverso consiste en determinar un modelo \mathbf{m}_{pr} (modelo predicho) que genere unos datos \mathbf{d}_{pr} tales que se ajusten lo mejor posible al conjunto de datos originales \mathbf{d} . En la sección 1.3.1 se ha dejado constancia de que es imposible ajustar los datos observados de manera perfecta ya que las observaciones contienen ruido (imposible de ajustar). Por lo tanto, hemos de buscar el modelo que genere unos datos que se acerquen lo más posible (dentro del nivel de ruido de las observaciones) a los datos observados.

Sean dos espacios de Banach, M y D , y un operador A que actúa sobre el espacio M :

$$A(\mathbf{m}) = \mathbf{d}, \mathbf{m} \in M, \mathbf{d} \in D. \quad (1.13)$$

Llamaremos a D espacio de datos y a M espacio de parámetros. El operador A es el operador directo que transforma cualquier conjunto de parámetros modelo \mathbf{m} en el correspondiente conjunto de datos \mathbf{d} . El problema inverso se formula como la solución de la ecuación (1.13).

1.4.2.2. Sensibilidad

Cualquier problema geofísico directo puede ser descrito por la ecuación (1.13). Consideremos un modelo dado \mathbf{m}_0 y los correspondientes datos generados \mathbf{d}_0 . Asumamos, sin pérdida de generalidad, que en un entorno de \mathbf{m}_0 el operador $A = A_{m_0}$ es un operador lineal. Tendremos, entonces:

$$A_{m_0}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0) = A_{m_0}\mathbf{m} - A_{m_0}\mathbf{m}_0 = \mathbf{d} - \mathbf{d}_0, \quad (1.14)$$

o

$$A_{m_0}(\Delta\mathbf{m}) = \Delta\mathbf{d}, \quad (1.15)$$

donde

$$\Delta\mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0, \Delta\mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{d}_0 \quad (1.16)$$

son las perturbaciones del modelo de parámetros y de los datos.

Definición 1 La sensibilidad S_{m_0} de un método geofísico queda determinada por el cociente entre la norma de la perturbación de los datos y la norma de la perturbación de los parámetros modelo.

La máxima sensibilidad viene dada por

$$S_{m_0}^{máx} = \sup \left\{ \frac{\|\Delta d\|}{\|\Delta m\|} \right\} = \sup \left\{ \frac{\|A_{m_0}(\Delta m)\|}{\|\Delta m\|} \right\} = \|A_{m_0}\|, \quad (1.17)$$

es decir, la sensibilidad máxima es igual a la norma del operador A_{m_0} .

Si conocemos $S_{m_0}^{máx}$ podremos determinar las variaciones del modelo que producen variaciones en los datos mayores que los errores de observación δ :

$$\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_0\| \geq \frac{\delta}{S_{m_0}^{máx}}. \quad (1.18)$$

Por lo tanto, el método geofísico es sensible sólo a aquellas perturbaciones del modelo que excedan el nivel $\delta/S_{m_0}^{máx}$. Cualesquiera otras variaciones del modelo no podrán ser distinguidas a partir de los datos.

1.4.2.3. Resolución

Supongamos que en un entorno de \mathbf{m}_0 se cumple la siguiente desigualdad

$$\|A_{m_0}(\Delta m)\| \geq k\|\Delta m\|, \quad (1.19)$$

para cualquier Δm , donde $k > 0$ es una constante. Entonces, existe un operador inverso lineal $A_{m_0}^{-1}$ (Zhdanov, 2002). Esto significa que la solución del problema inverso en un entorno del punto \mathbf{m}_0 puede escribirse como

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + A_{m_0}^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{d}_0). \quad (1.20)$$

Podemos escribir la misma expresión para un conjunto de datos observados con un cierto nivel de ruido $\mathbf{d}_\delta = \mathbf{d} + \delta\mathbf{d}$:

$$\mathbf{m}_\delta = \mathbf{m}_0 + A_{m_0}^{-1}(\mathbf{d}_\delta - \mathbf{d}_0). \quad (1.21)$$

Sustituyendo deducimos

$$\mathbf{m}_\delta - \mathbf{m} = A_{m_0}^{-1}(\mathbf{d}_\delta - \mathbf{d}). \quad (1.22)$$

Ahora podemos determinar los errores máximos en la solución del problema inverso para un nivel de error dado en los datos observados igual a $\delta = \|\delta \mathbf{d}\|$:

$$\Delta_{m\acute{a}x} = \sup_{\|\mathbf{d}_\delta - \mathbf{d}\| = \delta} \|\mathbf{m}_\delta - \mathbf{m}\| = \sup_{\|\mathbf{d}_\delta - \mathbf{d}\| = \delta} \|A_{m_0}^{-1}(\mathbf{d}_\delta - \mathbf{d})\| = \|A_{m_0}^{-1}\|\delta, \quad (1.23)$$

donde

$$\|A_{m_0}^{-1}\| \leq \frac{1}{k}. \quad (1.24)$$

Basándonos en la ecuación (1.24) podemos determinar la resolución del método geofísico. Dos modelos \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 , en un entorno del punto \mathbf{m}_0 , pueden ser distinguidos si se satisface la siguiente condición:

$$\|\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2\| \geq \Delta_{m\acute{a}x} = \|A_{m_0}^{-1}\|\delta = \frac{\delta}{R_{m_0}}. \quad (1.25)$$

El valor

$$R_{m_0} = \frac{1}{\|A_{m_0}^{-1}\|} \quad (1.26)$$

es la medida de la resolución del método geofísico dado. A partir de las ecuaciones (1.24) y (1.26) se deduce que

$$R_{m_0} \geq k. \quad (1.27)$$

Cuanto más pequeña es la norma del operador inverso mayor es la resolución R_{m_0} y más cercanos uno a otro son los modelos que pueden ser distinguidos. Si la norma del operador $A_{m_0}^{-1}$ tiende a infinito, la resolución tiende a cero, $R_{m_0} \rightarrow 0$, y los errores en la determinación de los parámetros modelo tienden a infinito. Este caso se da en los problemas mal condicionados.

1.4.3. Formulación de problemas bien y mal condicionados

Se ha formulado el problema inverso como la solución de la ecuación

$$\mathbf{d} = A(\mathbf{m}), \quad (1.28)$$

donde $\mathbf{m} \in M$ es una función (o vector) del espacio de parámetros modelo M y $\mathbf{d} \in D$ es un conjunto del espacio de datos D . Existen dos tipos importantes de problemas inversos: bien y mal condicionados.

1.4.3.1. Problemas bien condicionados

Siguiendo los principios clásicos de la teoría de la regularización (Tikhonov y Arsenin, 1977) podemos dar las siguientes definiciones:

Definición 2 *El problema (1.28) está bien condicionado si se satisfacen las siguientes premisas (ya discutidas en la sección 1.2):*

1. *La solución \mathbf{m} existe.*
2. *La solución \mathbf{m} es única.*
3. *La solución \mathbf{m} depende de forma continua del conjunto de datos \mathbf{d} .*

En otras palabras, el operador inverso A^{-1} está definido en el espacio D y es continuo.

Definición 3 *El problema (1.28) es mal condicionado si al menos una de las condiciones listadas en la definición 2 anterior no se cumple.*

Si somos capaces de acotar los modelos válidos para un problema de inversión, el problema mal condicionado puede convertirse en bien condicionado. Matemáticamente, esto significa que, en lugar de buscar \mathbf{m} en todo el espacio M , sólo se tendrán en cuenta las posibles soluciones \mathbf{m} de un subespacio de M , que estará formado por los modelos más simples y/o adecuados a la solución del problema.

1.4.3.2. Problemas condicionalmente bien condicionados

Supongamos que conocemos a priori que la solución correcta a un problema se encuentra en un subconjunto C del conjunto de soluciones M , con la propiedad de que el operador inverso A^{-1} es continuo en el subconjunto de imágenes $AC \subset D$, que es el subconjunto formado por los vectores obtenidos como resultado de aplicar el operador A a los vectores \mathbf{m} del subconjunto C .

Definición 4 *El problema (1.28) es condicionalmente bien condicionado (bien condicionado en el sentido de Tikhonov) si se cumple que:*

1. Conocemos a priori que la solución existe y está contenida en un determinado subconjunto $C \subset M$,
2. El operador A proyecta C en $AC \subset D$,
3. El operador A^{-1} es continuo en $AC \subset D$.

Llamamos al conjunto C *conjunto correcto*. En contraste con un problema bien condicionado estándar, un problema condicionalmente bien condicionado no requiere poder ser resuelto en todo el espacio solución. Además, el requerimiento de continuidad de A^{-1} sobre la totalidad del espacio M es sustituido por el requerimiento de continuidad sólo sobre la imagen de C . En consecuencia, la introducción de estos constreñimientos convierte el problema mal condicionado inicial en bien condicionado.

En Tikhonov y Arsenin (1977) se introducen los principios matemáticos para la selección del subconjunto C correcto.

Definición 5 *El subconjunto K de un espacio métrico M se denomina compacto si cualquier secuencia $\mathbf{m}_i \in K$ de elementos contiene una subsecuencia convergente $\mathbf{m}_{i_j} \in K$, la cual converge a un elemento \mathbf{m} en K .*

Por ejemplo, un subconjunto R del espacio euclídeo E^n es compacto sí y sólo sí está delimitado:

$$\|x\| \leq c, \quad c > 0, \quad \text{para cualquier } x \in R. \quad (1.29)$$

De acuerdo con Tikhonov y Arsenin (1977), cualquier subconjunto compacto de M puede ser utilizado como *conjunto correcto* para la resolución de un problema mal condicionado.

1.4.3.3. Cuasi solución del problema mal condicionado

Asumamos que el problema (1.28) es condicionalmente bien condicionado (bien condicionado en el sentido de Tikhonov). Asumamos también que los datos de observación son conocidos con un cierto error:

$$\mathbf{d}_\delta = \mathbf{d} + \delta\mathbf{d}, \quad (1.30)$$

donde

$$\mu_D = (\mathbf{d}_\delta, \mathbf{d}) \leq \delta, \quad (1.31)$$

expresando μ_D la métrica en el conjunto D .

Definición 6 La cuasi solución del problema (1.28) en el conjunto correcto C es un elemento $\mathbf{m}_\delta \in C$, el cual minimiza la distancia $\mu_D(A\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta)$:

$$\mu_D(A\mathbf{m}_\delta, \mathbf{d}_\delta) = \inf_{\mathbf{m} \in C} \mu_D(A\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta). \quad (1.32)$$

La Figura 1.1 ilustra la definición de la cuasi solución. El elemento $\mathbf{m} \in M$ es la solución exacta del problema inverso

$$\mathbf{d} = A(\mathbf{m}). \quad (1.33)$$

El subconjunto AC del espacio de datos D es la imagen del conjunto correcto C , obtenida como resultado de aplicar el operador A . Una cuasi solución, \mathbf{m}_δ , es seleccionada del conjunto correcto C bajo la condición de que su imagen, $A(\mathbf{m}_\delta)$, sea el elemento más cercano en el subconjunto AC a los datos observados, \mathbf{d}_δ .

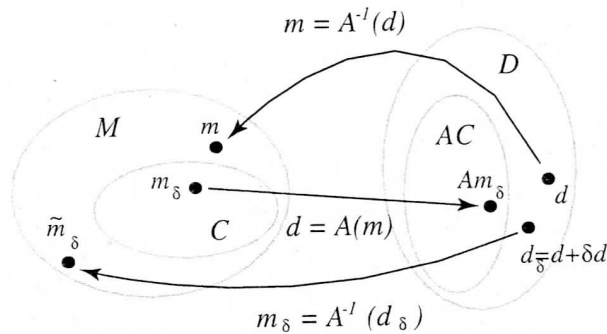


Figura 1.1: Cuasi solución del problema inverso (Zhdanov, 2002).

La idea subyacente al concepto de cuasi solución hace posible sustituir la solución del problema inverso por la minimización de la distancia $\mu_D(A\mathbf{m}, \mathbf{d})$ en un subconjunto apropiado de modelos. Los métodos estándar de minimización pueden ser utilizados para resolver este problema y, por tanto, para encontrar la cuasi solución. De este modo, se simplifica de forma significativa la resolución del problema inverso. Sin embargo, esta

aproximación sólo es efectiva si se conoce a priori el *conjunto correcto* de modelos candidatos a ser solución. En muchas situaciones es difícil describir este conjunto de forma apropiada y deberemos utilizar una aproximación más general para hallar una solución estable al problema.

1.4.4. Métodos de regularización en el problema inverso

1.4.4.1. Operadores de regularización

Consideremos de nuevo el problema inverso descrito mediante la ecuación (1.28). Por regla general el operador inverso A^{-1} no será continuo y, por lo tanto, el problema inverso será mal condicionado. La idea principal de cualquier algoritmo de regularización es considerar, en lugar del problema inverso mal condicionado, una familia de problemas bien condicionados,

$$\mathbf{d} = A_\alpha(\mathbf{m}), \quad (1.34)$$

que aproximen el problema original en algún sentido. El parámetro $\alpha > 0$ es un escalar y recibe el nombre de *parámetro de regularización*. Un requerimiento adicional es que

$$\mathbf{m}_\alpha \rightarrow \mathbf{m}_t, \text{ si } \alpha \rightarrow 0, \quad (1.35)$$

donde $\mathbf{m}_\alpha = A_\alpha^{-1}(\mathbf{d})$ es la solución del problema (1.34) y \mathbf{m}_t es la solución exacta del problema original. Por lo tanto, se ha sustituido la solución de un problema mal condicionado por las soluciones de una familia de problemas bien condicionados, donde se asume que esas soluciones tienden de manera asintótica a la solución verdadera cuando α tiende a 0.

En otras palabras, cualquier algoritmo de regularización se basa en la aproximación del operador inverso no continuo A^{-1} por una familia de operadores inversos continuos $A_\alpha^{-1}(\mathbf{d})$ que dependen del parámetro de regularización α . La regularización debe ser tal que, a medida que el parámetro α decrece, los operadores A_α^{-1} se aproximen al operador exacto A^{-1} .

Definición 7 *El operador $R(\mathbf{d}, \alpha)$ (dependiente de un parámetro escalar α) es un operador de regularización en un entorno del elemento $\mathbf{d}_t = A(\mathbf{m}_t)$ si existe una función $\alpha(\delta)$*

tal que, para un $\epsilon > 0$, podemos encontrar un número positivo $\delta(\epsilon)$ con las propiedades,

$$\mu_D(\mathbf{d}, \mathbf{d}_t) < \delta(\epsilon), \quad (1.36)$$

y

$$\mu_M(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_t) < \epsilon, \quad (1.37)$$

donde

$$\mathbf{m}_\alpha = R(\mathbf{d}, \alpha(\delta)). \quad (1.38)$$

En otras palabras, \mathbf{m}_α es una función continua de los datos y

$$\mathbf{m}_\alpha = R(\mathbf{d}, \alpha(\delta)) \rightarrow \mathbf{m}_t, \quad (1.39)$$

cuando $\alpha \rightarrow 0$.

La Figura 1.2 ilustra las propiedades básicas del operador de regularización, donde \mathbf{m}_t es la solución exacta para un conjunto de datos exactos $\mathbf{d}_t = A(\mathbf{m}_t)$. Sin embargo, nuestras observaciones consistirán en datos ruidosos $\mathbf{d}_\delta = \mathbf{d}_t + \delta\mathbf{d}$, por lo que obtendremos una solución \mathbf{m}'_δ que puede estar muy alejada de la solución verdadera si aplicamos el operador inverso riguroso a los datos \mathbf{d}_δ . Además, se podría obtener otra solución, $\tilde{\mathbf{m}}'_\delta$, completamente diferente con un conjunto de datos ligeramente diferente de datos ruidosos $\tilde{\mathbf{d}}_\delta$. La principal ventaja del operador de regularización R es que provee una solución estable en cualquier situación. Si se aplica el operador R a un conjunto de datos ruidosos \mathbf{d}_δ obtendremos una solución, $\mathbf{m}_\delta = R(\mathbf{d}_\delta, \alpha)$, que estará cerca de la solución verdadera: $\|\mathbf{m}_\delta - \mathbf{m}_t\| < \epsilon$. La aplicación de R a otro conjunto de datos ruidosos $\tilde{\mathbf{d}}_\delta$ dará como resultado otra solución, $\tilde{\mathbf{m}}_\delta = R(\tilde{\mathbf{d}}_\delta, \alpha)$, que seguirá siendo cercana a la solución verdadera \mathbf{m}_t . La exactitud de la aproximación a la solución verdadera dependerá del parámetro de regularización α .

Los operadores de regularización pueden ser construidos mediante la aproximación del problema mal condicionado (1.28) por el conjunto de problemas bien condicionados (1.34), donde el operador A_α^{-1} es continuo. Los operadores inversos pueden ser tratados como operadores de regularización:

$$A_\alpha^{-1}(\mathbf{d}) = R(\mathbf{d}, \alpha). \quad (1.40)$$

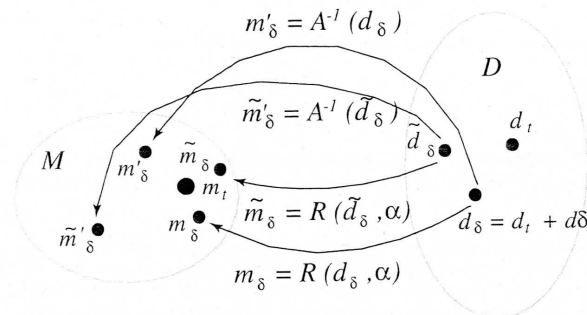


Figura 1.2: Operadores de regularización en la solución del problema inverso (Zhdanov, 2002).

1.4.4.2. Funciones de estabilización

Una función de estabilización se usa para seleccionar del espacio M de todos los posibles modelos el subespacio M_c , que es un conjunto correcto.

Definición 8 Una función no negativa $s(\mathbf{m})$ en un espacio métrico M se llama función de estabilización si, para cualquier número real $c > 0$ del dominio de valores de la función, el subconjunto M_c de elementos $\mathbf{m} \in M$, tales que $s(\mathbf{m}) \leq c$, es compacto.

Ejemplo 1 Sea el espacio real de Hilbert L^2 formado por las funciones integrables en el intervalo $[a, b]$. La métrica en el espacio L^2 queda determinada de acuerdo a la fórmula

$$\mu(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \left\{ \int_a^b [m_1(x) - m_2(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.41)$$

Puede ser probado que cualquier bola,

$$b(\mathbf{m}_0, c) = \{\mathbf{m} : \mu(\mathbf{m}, \mathbf{m}_0) \leq c, c > 0\}, \quad (1.42)$$

es un conjunto compacto en el espacio de Hilbert. Por lo tanto, podemos introducir una función de estabilización como sigue:

$$s(\mathbf{m}) = \mu(\mathbf{m}, \mathbf{m}_0), \quad (1.43)$$

donde \mathbf{m}_0 es un modelo dado de $M = L^2$. El subconjunto M_c de elementos $\mathbf{m} \in M$ para el cual $s(\mathbf{m}) \leq c$,

$$s(m) = \mu(m, m_0) \leq c, \quad (1.44)$$

es compacto.

Analicemos ahora cómo se puede utilizar un estabilizador para elegir la clase adecuada de modelos candidatos a ser solución del problema inverso. Asumamos que los datos \mathbf{d}_δ son observados con una cierta cantidad de ruido $\mathbf{d}_\delta = \mathbf{d}_t + \delta\mathbf{d}$, donde \mathbf{d}_t es la solución verdadera del problema. En otras palabras, se asume que la distancia entre los datos observados y los verdaderos es menor o igual que el nivel de error dado, δ , en los datos observados,

$$\mu_D(\mathbf{d}_\delta, \mathbf{d}_t) \leq \delta, \quad (1.45)$$

donde $\delta = \|\delta\mathbf{d}\|$.

En esta situación, resulta natural buscar la solución aproximada en el subconjunto Q_δ de modelos \mathbf{m} tales que

$$\mu_D(A(\mathbf{m}), \mathbf{d}_\delta) \leq \delta. \quad (1.46)$$

Así, $Q_\delta \subset M$ es un subconjunto de posibles soluciones.

La principal aplicación del estabilizador es seleccionar del subconjunto de posibles soluciones Q_δ las soluciones que dependan de forma continua de los datos y que posean una propiedad específica, que dependerá del tipo de estabilizador. Las soluciones podrán ser seleccionadas bajo la condición de minimización de la función de estabilización:

$$s(\mathbf{m}; \mathbf{m} \in Q_\delta) = \text{mín.} \quad (1.47)$$

Se ha introducido la función de estabilización bajo la condición de que selecciona un subconjunto compacto M_C del espacio de parámetros modelo. Así, se puede decir que el estabilizador, a partir del subconjunto de posibles soluciones Q_δ , selecciona aquella que, al mismo tiempo, pertenece al *conjunto correcto* M_C . La Figura 1.3 ayuda a comprender el papel del estabilizador.

Puede considerarse el modelo \mathbf{m}_δ como el resultado de la aplicación del operador $R(\mathbf{d}_\delta, \delta)$ a los datos observados \mathbf{d}_δ , dependiendo del parámetro δ :

$$\mathbf{m}_\delta = R(\mathbf{d}_\delta, \delta). \quad (1.48)$$

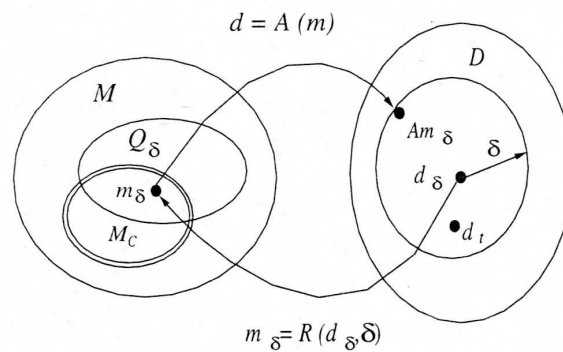


Figura 1.3: Función de estabilización y conjunto correcto (Zhdanov, 2002).

Teorema 1 *El operador $R(\mathbf{d}_\delta, \delta)$ es el operador de regularización para la ecuación (1.28) y \mathbf{m}_δ puede ser usada como una solución aproximada del problema inverso (nótese que en este caso $\alpha = \delta$, mientras que en el caso general $\alpha = \alpha(\delta)$).*

1.4.4.3. La función paramétrica de Tikhonov

En Tikhonov y Arsenin (1977) se prueba que para una amplia clase de funciones estabilizadoras su mínimo se encuentra en el modelo \mathbf{m}_δ , tal que $\mu_D(A(\mathbf{m}_\delta), \mathbf{d}_\delta) = \delta$. Así, podremos resolver el problema de minimización bajo la condición

$$\mu_D(A(\mathbf{m}_\delta), \mathbf{d}_\delta) = \delta. \tag{1.49}$$

En otras palabras, se puede considerar el problema de minimización de la función de estabilización cuando el modelo \mathbf{m} está sujeto al constreñimiento (1.49). Un procedimiento común para resolver este problema consiste en introducir una función paramétrica $P^\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta)$, $\mathbf{m} \in M$, dada por

$$P^\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta) = \mu_D^2(A(\mathbf{m}), \mathbf{d}_\delta) + \alpha s(\mathbf{m}), \tag{1.50}$$

y resolver el problema de minimización de esta función:

$$P^\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta) = \text{mín}. \tag{1.51}$$

La función $\mu_D^2(A(\mathbf{m}), \mathbf{d}_\delta)$ es llamada a menudo función de desajuste. Por lo tanto, la función paramétrica $P^\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta)$ es una combinación lineal de la función de desajuste y

la función de estabilización y el parámetro desconocido α es similar al multiplicador de Lagrange. Se determina bajo la condición

$$\mu_D(A(\mathbf{m}_\alpha), \mathbf{d}_\delta) = \delta, \quad (1.52)$$

donde \mathbf{m}_α es el elemento para el cual $P^\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta)$ alcanza su valor mínimo. La función $P^\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta)$ se llama función paramétrica de Tikhonov.

Teorema 2 *Sea A un operador continuo de M en D . Para cualquier $\mathbf{d} \in D$ y cualquier parámetro $\alpha \geq 0$, existe un modelo $\mathbf{m}_\alpha \in M$ para el cual la función*

$$P^\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \mu_D^2(A(\mathbf{m}), \mathbf{d}) + \alpha s(\mathbf{m}) \quad (1.53)$$

alcanza su cota inferior,

$$\inf_{\mathbf{m} \in M} P^\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = P^\alpha(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{d}). \quad (1.54)$$

Para cualquier $\alpha > 0$ y para cualquier vector de datos $\mathbf{d}_\delta \in D$ se ha determinado un operador, $R(\mathbf{d}_\delta, \alpha)$, tal que el modelo

$$\mathbf{m}_\alpha = R(\mathbf{d}_\delta, \alpha) \quad (1.55)$$

da el valor mínimo de la función paramétrica de Tikhonov $P^\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta)$.

El resultado fundamental de la teoría de la regularización es que el operador $R(\mathbf{d}_\delta, \alpha)$ es un operador de regularización para el problema (1.28). La prueba de este resultado puede encontrarse Tikhonov y Arsenin (1977). Por lo tanto, como solución aproximada del problema inverso (1.28) tomamos la solución de otro problema, (1.51), cercano al problema original para valores pequeños de error en los datos δ .

Es importante señalar que, en el caso en que A sea un operador lineal, donde D y M son espacios de Hilbert y donde $s(\mathbf{m})$ es una función cuadrática, la solución al problema de minimización (1.54) es única, mientras que para el caso general de A no lineal esta condición no tiene por qué cumplirse.

1.4.5. Familias de funciones estabilizadoras

El papel principal de las funciones de estabilización es seleccionar la clase apropiada de modelos para la resolución del problema inverso. En lo que sigue se enumerarán varios

ejemplos, tal y como se describen en Zhdanov (2002).

Las funciones más comunes se basan en el criterio de los mínimos cuadrados o, en otras palabras, la minimización de la norma L^2 de las funciones que describen los parámetros modelo:

$$s_{L^2(\mathbf{m})} = \|\mathbf{m}\|_{L^2}^2 = (\mathbf{m}, \mathbf{m})_{L^2} = \int_V |m(\mathbf{r})|^2 dv = \text{mín}. \quad (1.56)$$

En la fórmula (1.56) se asume que la función $m(\mathbf{r})$, que describe los parámetros modelo, es dada en un espacio tridimensional V , siendo \mathbf{r} el radio vector de un punto de observación. El principal argumento que apoya el uso de la función (1.56) proviene de la estadística y se basa en la asunción de que la solución mínimos cuadrados es la mejor dentro del conjunto de posibles soluciones.

También puede ser utilizada una función cuadrática s_w :

$$s_w = \|W\mathbf{m}\|_{L^2}^2 = (W\mathbf{m}, W\mathbf{m})_{L^2} = \int_V |w(\mathbf{r})m(\mathbf{r})|^2 dv = \text{mín}, \quad (1.57)$$

donde $w(\mathbf{r})$ es una función de ponderación arbitraria y W es un operador lineal de multiplicación de la función $m(\mathbf{r})$ por la función de pesos $w(\mathbf{r})$.

Otra posibilidad es utilizar como estabilizador la minimización de la norma de la diferencia entre el modelo seleccionado y un modelo a priori \mathbf{m}_{apr} :

$$s_{L^2(\mathbf{m})}^{apr} = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{apr}\|_{L^2}^2 = \text{mín}. \quad (1.58)$$

Si aplicamos el criterio de la mínima norma al gradiente de los parámetros solución ∇m , obtenemos la función de estabilización de máxima suavidad:

$$s_{\text{máxsm}}(\mathbf{m}) = \|\nabla\mathbf{m}\|_{L^2}^2 = (\nabla\mathbf{m}, \nabla\mathbf{m})_{L^2} = \int_V |\nabla m(\mathbf{r})|^2 dv = \text{mín}, \quad (1.59)$$

aunque en algunos casos se puede utilizar la minimización de la norma del laplaciano de los parámetros modelo como estabilizador,

$$s_{\text{máxsm}}(m) = \|\nabla^2 m\|^2 = (\nabla^2 m, \nabla^2 m) = \text{mín}. \quad (1.60)$$

Se pueden encontrar ejemplos de uso del estabilizador (1.60) en Constable y otros (1987); Smith y Booker (1991).

Todos los estabilizadores descritos hasta ahora producen modelos suavizados que, en muchas aplicaciones prácticas, no funcionan bien a la hora de describir los modelos geológicos reales.

En Rudin y otros (1992) se introduce un método basado en la variación total (*total variation*, TV) aplicado a la reconstrucción de imágenes borrosas. Se utiliza como estabilizador la función variación total que, en esencia, es la norma L^1 del gradiente de los parámetros modelo:

$$s_{TV}(\mathbf{m}) = \|\nabla \mathbf{m}\|_{L^1} = \int_V |\nabla m(\mathbf{r})| dv. \quad (1.61)$$

Un problema de esta función es que no es diferenciable en 0, aunque para evitar esta dificultad en Acar y Vogel (1994) se introduce la función de variación total modificada:

$$s_{\beta TV}(\mathbf{m}) = \int_V \sqrt{|\nabla m(\mathbf{r})|^2 + \beta^2} dv, \quad (1.62)$$

donde β es un número lo suficientemente pequeño.

La ventaja de esta función es que no requiere que la función m sea continua, aunque tiende a generar modelos más compactos que los cuerpos reales a determinar. Este efecto puede ser disminuido mediante la introducción de otras funciones de estabilización que minimizan el área donde las variaciones y/o discontinuidades significativas del modelo ocurren, como es el caso de la *minimum gradient support functional* (MGS) (Portniaguine y Zhdanov, 1999):

$$s_{MGS}(\mathbf{m}) = \int_V \frac{\nabla m \cdot \nabla m}{\sqrt{\nabla m \cdot \nabla m + \beta^2}} dv. \quad (1.63)$$

1.4.5.1. Función de estabilización como función seudocuadrática

Nótese que todas las funciones de estabilización descritas hasta ahora pueden expresarse como funciones seudocuadráticas de los parámetros modelo:

$$s(\mathbf{m}) = (W_e(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{apr}), W_e(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{apr}))_{L^2} = \int_V |w_e(\mathbf{r})(m(\mathbf{r}) - m_{apr}(\mathbf{r}))|^2 dv, \quad (1.64)$$

donde W_e es un operador lineal de multiplicación de la función parámetros modelo $m(\mathbf{r})$ por la función $w_e(\mathbf{r})$, la cual puede depender de m . Si el operador W_e es independiente de

$m(\mathbf{r})$ obtenemos una función cuadrática, como la función de mínima norma (1.58) o la de máxima suavidad (1.59). En casos generales, la función w_e puede ser una función no lineal en m , como la *minimum gradient support* (1.63). En estos casos la función $s(\mathbf{m})$, definida por (1.64), no es cuadrática. Sin embargo, representar las funciones de estabilización en forma pseudocuadrática simplifica la resolución del problema de regularización.

Por ejemplo, el estabilizador de máxima suavidad puede ser expresado por la fórmula (1.64) si $m_{apr} = 0$ y

$$w_e(\mathbf{r}) = w_e^{\text{máxsm}}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla m(\mathbf{r})}{[m^2(\mathbf{r}) + e^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.65)$$

donde $e \rightarrow 0$.

Para la función de variación total, $s_{\beta TV}(m)$, asumimos $m_{apr} = 0$ y la función $w_e(\mathbf{r})$ es:

$$w_e(\mathbf{r}) = w_e^{\beta TV}(\mathbf{r}) = \frac{[|\nabla m(\mathbf{r})|^2 + \beta^2]^{\frac{1}{4}}}{[m^2(\mathbf{r}) + e^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.66)$$

En el caso de la *minimum gradient support functional*, $s_{MGS}(m)$, asumimos $m_{apr} = 0$, queda

$$w_e(\mathbf{r}) = w_e^{MGS}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla m(\mathbf{r})}{[\nabla m(\mathbf{r}) \cdot \nabla m(\mathbf{r}) + \beta^2]^{\frac{1}{2}} [m^2(\mathbf{r}) + e^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.67)$$

Expresiones similares para $w_e(\mathbf{r})$ pueden ser fácilmente deducidas por otros tipos de funciones estabilizadoras.

Usando la forma pseudocuadrática (1.64) para las funciones de estabilización se puede escribir la función paramétrica (1.53) como

$$P^\alpha(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = (A(\mathbf{m}) - \mathbf{d}, A(\mathbf{m}) - \mathbf{d})_D + \alpha (W_e(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{apr}), W_e(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{apr}))_{L^2}. \quad (1.68)$$

Por lo tanto, el problema de la minimización de la función paramétrica introducida por la función (1.68) se puede tratar de una forma similar a la minimización de una función paramétrica de Tikhonov convencional. La única diferencia es que ahora hemos introducido un operador de ponderación W_e , el cual depende de los parámetros modelo.

De esta forma, podemos ver que la minimización de las funciones de estabilización puede imponer diferentes condiciones a los parámetros modelo resultantes. En unos casos se pueden imponer condiciones de suavidad (estabilizadores de máxima suavidad), mientras que en otros se pueden elegir modelos que contengan discontinuidades (*minimum*

gradient support stabilizer). Como resultado, mediante la elección de un tipo u otro de estabilizador podemos seleccionar las diferentes clases de solución al problema inverso. En otras palabras, las funciones de estabilización ayudan a usar información a priori sobre las propiedades deseadas de la solución.

1.4.6. Definición del parámetro de regularización

1.4.6.1. Selección óptima del parámetro de regularización

El parámetro de regularización α describe la relación entre el mejor ajuste y la estabilización más razonable. En el caso en que se selecciona un α demasiado pequeño la minimización de la función $P^\alpha(\mathbf{m})$ es equivalente a la minimización de la función de desajuste, por lo que será como si no hubiésemos utilizado regularización y obtendremos una solución inestable e incorrecta. Cuando α es demasiado grande la minimización de $P^\alpha(\mathbf{m})$ es equivalente a la minimización de la función de estabilización $s(\mathbf{m})$ y la solución se verá forzada al modelo a priori, llegando a darse el caso de que el modelo calculado se ajuste perfectamente al modelo a priori, ignorando por completo los datos observados. Por lo tanto, una cuestión crítica en la inversión es la elección del parámetro de regularización óptimo. Los principios básicos para la determinación de α se discuten en Tikhonov y Arsenin (1977).

Consideremos un conjunto de datos observado con un cierto nivel de ruido, $\mathbf{d}_\delta = \mathbf{d}_t + \delta\mathbf{d}$, donde \mathbf{d}_t son los datos reales y el nivel de ruido es igual a δ :

$$\mu_D(\mathbf{d}_\delta, \mathbf{d}_t) \leq \delta. \quad (1.69)$$

Entonces, el parámetro de regularización puede ser determinado por la condición de desajuste (1.55)

$$\mu_D(A(\mathbf{m}_\alpha), \mathbf{d}_\delta) \leq \delta. \quad (1.70)$$

Para justificar esta aproximación examinaremos más cuidadosamente las propiedades de las tres funciones implicadas en el método de regularización: la función paramétrica de Tikhonov y las funciones de estabilización y desajuste.

Introduzcamos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= P^\alpha(\mathbf{m}_\alpha, \mathbf{d}_\delta), \text{ función paramétrica,} \\ s(\alpha) &= s(\mathbf{m}_\alpha), \text{ función de estabilización,} \\ i(\alpha) &= \mu_D^2(A(\mathbf{m}_\alpha), \mathbf{d}_\delta), \text{ función de desajuste.} \end{aligned} \tag{1.71}$$

Examinaremos algunas propiedades de las funciones (1.71).

Propiedad 1 *Las funciones $p(\alpha)$, $i(\alpha)$ y $s(\alpha)$ son monótonas: $p(\alpha)$ e $i(\alpha)$ son crecientes y $s(\alpha)$ es decreciente.*

Sea $\alpha_1 < \alpha_2$ y

$$\begin{aligned} p_k &= p(\alpha_k) = P^{\alpha_k}(\mathbf{m}_{\alpha_k}, \mathbf{d}_\delta), \\ i_k &= i(\alpha_k) = \mu_D^2(A(\mathbf{m}_{\alpha_k}), \mathbf{d}_\delta), \\ s_k &= s(\alpha_k) = s(\mathbf{m}_{\alpha_k}). \end{aligned} \tag{1.72}$$

La siguiente desigualdad se cumple:

$$p_2 = i_2 + \alpha_2 s_2 \geq i_2 + \alpha_1 s_2, \tag{1.73}$$

porque $\alpha_1 < \alpha_2$. Por otra parte

$$P^{\alpha_1}(\mathbf{m}_{\alpha_2}, \mathbf{d}_\delta) = i_2 + \alpha_1 s_2 \geq i_1 + \alpha_1 s_1 = p_1 = P^{\alpha_1}(\mathbf{m}_{\alpha_1}, \mathbf{d}_\delta), \tag{1.74}$$

porque m_{α_1} alcanza el mínimo p_1 de $P^{\alpha_1}(\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta)$.

Así, de (1.73) y (1.74) tenemos

$$p_2 \geq p_1 \tag{1.75}$$

para

$$\alpha_2 > \alpha_1, \tag{1.76}$$

lo que significa que $p(\alpha)$ es una función monótona de α . Además,

$$P^{\alpha_2}(\mathbf{m}_{\alpha_1}, \mathbf{d}_\delta) = i_1 + \alpha_2 s_1 \geq i_2 + \alpha_2 s_2 = p_2 = P^{\alpha_2}(\mathbf{m}_{\alpha_2}, \mathbf{d}_\delta), \tag{1.77}$$

puesto que m_{α_2} alcanza el mínimo p_2 de $P^{\alpha_2}(\mathbf{m}, \mathbf{d}_\delta)$.

Restando el lado izquierdo de la desigualdad (1.77) al lado derecho de la desigualdad (1.74) y el lado derecho de la desigualdad (1.77) al lado izquierdo de (1.74) obtenemos

$$(\alpha_1 - \alpha_2) s_2 \geq (\alpha_1 - \alpha_2) s_1. \quad (1.78)$$

Puesto que $\alpha_1 < \alpha_2$,

$$s_1 \geq s_2. \quad (1.79)$$

De las desigualdades (1.74) y (1.79) se sigue que

$$i_2 - i_1 \geq \alpha_1 (s_1 - s_2) \quad (1.80)$$

y, entonces

$$i_2 \geq i_1. \quad (1.81)$$

Propiedad 2 *Puede ser probado que las funciones $p(\alpha)$, $i(\alpha)$ y $s(\alpha)$ son continuas (si el elemento m_α es único).*

Nótese que

$$p(\alpha) \rightarrow 0 \text{ para } \alpha \rightarrow 0, \quad (1.82)$$

y

$$p(0) = 0. \quad (1.83)$$

De

$$p(\alpha) + \alpha s(\alpha) = p(\alpha) \rightarrow 0, \text{ para } \alpha \rightarrow 0, \quad (1.84)$$

se deduce que

$$i(0) = 0. \quad (1.85)$$

Entonces, puede ser probado el siguiente teorema.

Teorema 3 *Si $i(\alpha)$ es una función uno a uno entonces, para cualquier número positivo $\delta < \delta_0 = \mu_D(a(\mathbf{m}_0), \mathbf{d}_\delta)$ (donde \mathbf{m}_0 es algún modelo a priori), existe un $\alpha(\delta)$ tal que $\mu_D(a(\mathbf{m}_{\alpha(\delta)}), \mathbf{d}_\delta) = \delta$.*

Nótese que $i(\alpha)$ es una función uno a uno cuando el elemento \mathbf{m}_α es único. Esto ocurre, por ejemplo, cuando A es un operador lineal, D es un espacio de Hilbert y $s(\mathbf{m})$ es una función cuadrática.

La Figura 1.4 ayuda a comprender el principio de la selección óptima del parámetro de regularización. Puede verse que, debido al carácter monótono de la función $i(\alpha)$, sólo hay un punto, α_0 , donde $i(\alpha_0) = \mu_D(A(\mathbf{m}_{\alpha_0}), \mathbf{d}_\delta) = \delta^2$.

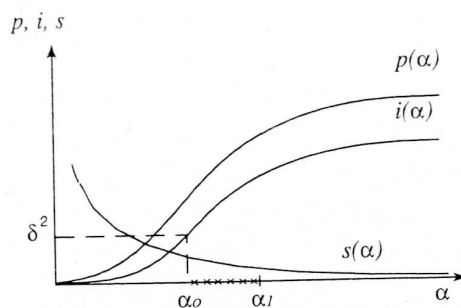


Figura 1.4: Selección óptima del parámetro de regularización (Zhdanov, 2002).

1.4.6.2. Selección del parámetro de regularización

El análisis de la L-curva (Hansen, 1998) es un método gráfico simple para una selección cuasi óptima del parámetro de regularización.

El método se basa en la representación gráfica para todos los α posibles de las curvas que representan las funciones de desajuste, $i(\alpha)$, y de estabilización $s(\alpha)$. La L-curva ilustra la relación entre el mejor ajuste y la mejor estabilización. En el caso en que α sea muy pequeño la minimización de la función $P^\alpha(\mathbf{m})$ es equivalente a la minimización de la función de desajuste, por lo que $i(\alpha)$ decrece mientras $s(\alpha)$ aumenta. Cuando α es demasiado grande la minimización de $P^\alpha(\mathbf{m})$ es equivalente a la minimización de la función de estabilización, por lo que $s(\alpha)$ decrece mientras $i(\alpha)$ aumenta. Como resultado, cuando representamos gráficamente (en una escala logarítmica) los distintos valores de las funciones citadas el gráfico adopta una forma característica de L (Figura 1.5), de ahí su nombre (Hansen, 1998).

La característica esquina del gráfico, que separa las partes horizontal y vertical, co-

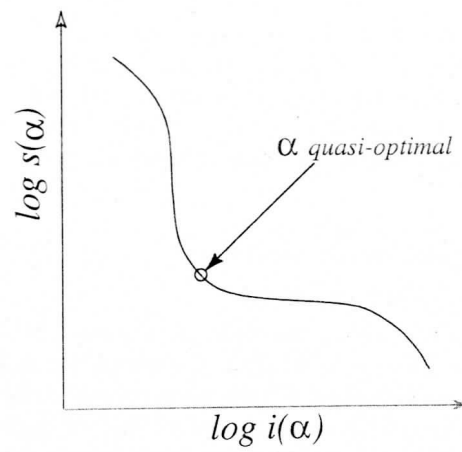


Figura 1.5: L-curva y posición del valor cuasi óptimo de α (Zhdanov, 2002).

rrresponde con el valor cuasi óptimo del parámetro de regularización α .

Inversión mediante el método O-R-F

2.1. Introducción

En René (1986) se presenta un método de inversión basado en la aplicación repetitiva de un criterio denominado *open, reject, fill* (O-R-F) al que, de aquí en adelante, denominaremos por su traducción al español «abrir, rechazar, rellenar» (A-R-R).

En la aplicación del método el espacio modelo se subdivide en prismas rectangulares, a los cuales se asigna la posibilidad de contener un contraste de densidad fijado a priori. El procedimiento de modelización consiste, en líneas generales, en rellenar algunos de esos prismas, mientras que el resto permanecerán vacíos. El proceso puede comenzar con el espacio modelo completamente vacío o, por el contrario, con un modelo inicial constituido por uno o más elementos rellenos con el contraste de densidad prescrito. El modelo irá creciendo, aplicando el criterio A-R-R, mediante la adición de un nuevo prisma en cada paso.

Mediante una elección adecuada del criterio A-R-R es generalmente posible una inversión exitosa, aunque haya que rellenar miles de elementos y a pesar del hecho de que, una vez relleno, un elemento nunca será vaciado. Los nuevos elementos son añadidos en la periferia del modelo creciente y las atracciones generadas adoptan rápidamente una forma semejante (con un factor de escala) a las observadas. A medida que el modelo crece por la adición de nuevos elementos el factor de escala se aproxima a la unidad y, por tanto, la gravedad generada se aproxima a la gravedad de partida.

2.2. Método de inversión

2.2.1. Espacio modelo

En la Figura 2.1 se puede ver el espacio modelo, que se considerará bidimensional de aquí en adelante, dividido en $m \times n$ prismas bajo un conjunto (perfil) de m puntos observados. En este caso, los puntos del perfil están separados por la misma distancia que los centros de los cuadriláteros en la dirección j , aunque este no es un requisito del método. El tamaño de los cuadriláteros puede variar a lo largo de la coordenada k , pero no en j .

	$i,j=1$	2	3	4	5	$m-1$	m
$k=1$	C	C	C	C	C	C	C
2	C	C	A	C	C	C	C
3	C	A	R	A	C	C	C
4	C	A	R	R	A	C	E
5	C	C	A	A	C	E	E
n	C	C	C	C	E	E	E

Figura 2.1: Espacio modelo dividido en $m \times n$ prismas y puntos observados. Las etiquetas de cada elemento son: (C), cerrado; (A), abierto; (R), relleno y (E), excluido.

A cada elemento del espacio modelo se le asigna inicialmente un posible contraste de densidad $\Delta\rho_{j,k}$ ($j = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$), valor que podrá ser adoptado o no al final del proceso de inversión. El método sólo es aplicable cuando todos los contrastes de densidad posibles tienen el mismo signo.

De la misma forma, a cada prisma se le asignará un estado de entre los siguientes: *relleno*, *abierto*, *cerrado* o *excluido*. Los elementos rellenos son aquellos a los que se le habrá impuesto el contraste de densidad especificado al inicio de la inversión, mientras que los abiertos son los que están vacíos y disponibles para ser rellenos por el algoritmo. Elementos cerrados son aquellos que están vacíos pero que no tienen la posibilidad de ser

rellenados inmediatamente, aunque pueden ser abiertos automáticamente por el algoritmo si cumplen una determinada condición. Por último, los elementos excluidos no podrán ser abiertos en la ejecución del programa y, por lo tanto, no podrán ser rellenos con el contraste de densidad prescrito. Es importante distinguir entre los estados inicialmente fijados por el usuario y aquéllos que van siendo establecidos por el programa a lo largo de su ejecución. Así, un elemento puede responder a un estado *relleno por el usuario*, *relleno por el programa*, *abierto por el usuario*, *abierto por el programa*, *cerrado por el usuario*, *excluido por el usuario* o *excluido por el programa*.

2.2.2. Cálculos iniciales y visión global del proceso

El primer paso en el proceso de inversión es el cálculo de la atracción de cada prisma sobre cada punto del perfil, considerando la densidad como unidad. Para ello puede utilizarse la formulación dada en Barbosa y Silva (1994); Telford y otros (1976).

Seguidamente, se calcula la atracción en cada punto del perfil debida al modelo inicial $g_{i,0}$, compuesto por todos los prismas rellenos a priori por el usuario, si hay alguno. Estos elementos constituirán la «semilla», a partir de la cual el modelo generado irá creciendo. A continuación, y mediante un proceso iterativo, se aplicará el criterio A-R-R:

1. Se van examinando los prismas cerrados, de los cuales seán abiertos aquellos que pasen el test de apertura.
2. Se examinan todos los elementos abiertos, que producirá la exclusión de aquellos que pasen el test de exclusión.
3. Por último, se recorren los elementos que queden abiertos, de los cuales sólo a uno se le adjudicará el contraste de densidad prescrito, de acuerdo al criterio de relleno.
4. Se repiten los pasos hasta que no se puedan abrir más prismas, momento en que el algoritmo termina.

2.2.3. Criterio de apertura

El criterio general de apertura de prismas seguido en el método es el de vecindad. De los elementos rellenos (por el usuario o por el programa), algunos o todos sus elementos vecinos son examinados, abriéndose todos aquellos etiquetados como cerrados para permitir que el modelo crezca a partir de los elementos de su periferia. El criterio de apertura está relacionado con las direcciones en las que al modelo se le permite crecer, que se habrán postulado al comienzo del proceso. Así, un criterio de crecimiento puede ser, por ejemplo, la apertura de todos los elementos adyacentes a los rellenos en cualquier dirección. Otros criterios más restrictivos pueden ser la apertura de prismas en una sola dirección (siempre teniendo en cuenta la vecindad con los elementos rellenos).

2.2.4. Criterios de exclusión

En este segundo paso algunos elementos abiertos serán excluidos definitivamente, de modo que no podrán ser abiertos (ni, por lo tanto, rellenos) en el resto del proceso de inversión. Vamos recorriendo todos los prismas abiertos y para cada punto del perfil calculamos la atracción debida al modelo actual, más la atracción resultante de añadir el prisma de trabajo con la densidad prefijada. Tendremos así, para cada punto del perfil observado, un valor al que denominaremos τ , expresado como

$$\tau_{i,j,k,p} = g_{i,p-1} + \Delta g_{i,j,k}, \quad (2.1)$$

donde i indica el punto del perfil, j y k el elemento abierto de trabajo y p el paso actual del proceso iterativo. A continuación restamos el perfil así calculado al perfil original, obteniéndose para cada uno de sus puntos la diferencia

$$\delta_{i,j,k,p} = g'_i - \tau_{i,j,k,p}, \quad (2.2)$$

con g'_i la atracción observada.

Las diferencias obtenidas son sometidas a los siguientes criterios de rechazo (si el contraste de densidad es positivo):

$$-\delta_{i,j,k,p} > d_{m\acute{a}x}, \quad (2.3)$$

y

$$\sum_{i=1}^m \delta_{i,j,k,p} < 0, \quad (2.4)$$

o (si el contraste es negativo):

$$\delta_{i,j,k,p} > d_{m\acute{a}x}, \quad (2.5)$$

y

$$\sum_{i=1}^m \delta_{i,j,k,p} > 0. \quad (2.6)$$

Si alguno de los criterios (2.3) o (2.4) (o bien (2.5) o (2.6), dependiendo del signo del contraste de densidad de trabajo) se cumple, el prisma implicado se excluye.

En el primer criterio, el signo negativo en la ecuación (2.3) indica que el elemento será rechazado si algún valor del perfil de diferencias δ supera un cierto margen $d_{m\acute{a}x}$. Este margen puede ser un porcentaje de la máxima atracción original en el perfil (por ejemplo un 1%) o una cota impuesta a priori. Puesto que los elementos son rellenados con contrastes de densidad sólo positivos o negativos y, una vez rellenos, no pueden ser vaciados, el perfil de atracción generado por el modelo se aproximará al perfil observado sólo desde una dirección. Aun así, se permite un cierto grado de sobreatracción en los puntos del perfil.

El segundo criterio, ecuación (2.4), implica que la media de las diferencias de atracción con respecto al modelo observado siempre ha de ser negativa (o positiva, dependiendo del signo del contraste de densidad permitido, como se ve en la ecuación (2.6)).

2.2.5. Criterio de relleno: *forma de la anomalía*

Si después del paso anterior no queda ningún elemento abierto, el proceso ha terminado. Si aún quedan elementos abiertos se aplicará el criterio de relleno antes de pasar a la siguiente iteración. El perfil observado es escalado por un factor α y se considera para cada elemento abierto la diferencia entre este perfil y el τ correspondiente

$$\varepsilon_{i,j,k,p} = \alpha_{j,k,p} g'_i - \tau_{i,j,k,p}. \quad (2.7)$$

Usando la norma L^1 , una medida de la diferencia entre ambos perfiles puede calcularse como

$$E_{j,k,p} = \sum_{i=1}^m |\varepsilon_{i,j,k,p}|, \quad (2.8)$$

donde

$$\alpha_{j,k,p} = \max_i \left[\frac{\tau_{i,j,k,p}}{g'_i} \right], \quad (2.9)$$

es el factor de escala que minimiza E , bajo el constreñimiento de que ningún valor ε es negativo (o positivo) (René, 1986).

Utilizando la norma L^2 , la medida de la diferencia entre los perfiles es

$$E_{j,k,p} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon_{i,j,k,p}^2}, \quad (2.10)$$

y el factor de escala (René, 1986)

$$\alpha_{j,k,p} = \frac{\sum_{i=1}^m g'_i \tau_{i,j,k,p}}{\sum_{i=1}^m g_i'^2}. \quad (2.11)$$

Sea cual sea la norma utilizada, el elemento que minimice E es seleccionado para incorporarse al modelo y rellenado con el contraste de densidad prescrito. El valor de E será cero si el perfil a testear tiene exactamente la misma forma que el perfil original (multiplicado por una constante). La minimización de E en cada paso del proceso iterativo hace que el modelo estimado adopte rápidamente una forma que genera un perfil de atracción semejante al original. Por lo tanto, la minimización de E puede ser considerada como un criterio de «forma de la anomalía» (*shape-of-anomaly* en René (1986)). A medida que el proceso de inversión avanza la atracción generada se aproxima a la original, es decir, para cada elemento seleccionado para ser rellenado el factor α se va aproximando a 1.

2.2.6. Cálculos finales y repetición del modelado

Después de que el proceso iterativo ha terminado se calculan algunos atributos y características del modelo generado. Para modelos en 2D estos atributos pueden ser: masa total por unidad de longitud, área y posición del centro de masas. También pueden representarse los perfiles original, calculado y la diferencia entre ambos.

A menudo, es conveniente ejecutar el proceso de inversión varias veces con diferentes estimaciones de la cota máxima de rechazo, diferentes valores de densidades anómalas o diferentes criterios de apertura de elementos.

Generalmente, el usuario no conoce el valor exacto de los contrastes de densidad del subsuelo. Entonces, se deben generar un conjunto de modelos con el conjunto correspondiente de posibles densidades anómalas. Se describe a continuación el método de la «semilla de expansión» (*expanding seed* en René (1986)), como una técnica eficiente para el cálculo de dichos modelos. En el método de la semilla de expansión los elementos de un modelo denso sirven como base para el desarrollo de un modelo menos denso. En este método, los elementos rellenados por el usuario y por el programa en el modelo base son trasladados al estado «rellenado por el usuario» para el siguiente modelo a calcular. La atracción debida a esta nueva semilla se obtiene multiplicando el perfil generado por el modelo denso por la relación entre la nueva densidad y la del modelo base. Los elementos excluidos por el programa en el procesamiento del modelo base se devuelven al estado «cerrado» y el cálculo del nuevo modelo se realiza normalmente.

2.2.7. Resumen de los pasos de modelado

A modo de resumen, el proceso de inversión propuesto puede dividirse en los siguientes pasos:

1. Cálculo de la atracción sobre cada punto del perfil de cada uno de los elementos en los que se ha dividido el subsuelo, considerando una densidad igual a la unidad.
2. Asignación a cada elemento de un contraste de densidad de trabajo.
3. Cálculo de la atracción debida al modelo inicial (si existe).
4. Apertura de elementos para su posible relleno de acuerdo a un criterio especificado.
5. Exclusión permanente de algunos de los elementos abiertos de acuerdo a un criterio de rechazo.

6. Rellenado de un elemento de acuerdo al criterio «forma de la anomalía».
7. Repetición de los pasos 4 a 6 hasta que no queden elementos abiertos.

2.3. Ejemplos

Para comprobar el método de inversión expuesto se han realizado algunas inversiones con modelos sintéticos. En los ejemplos que se verán a continuación cada espacio modelo tendrá unas dimensiones ($j \times k$) de $12 \times 5 \text{ km}$. Se dividirá en un total de 6000 prismas, teniendo cada uno de ellos, por tanto, unas dimensiones de $100 \times 100 \text{ m}$. Cada perfil de atracción consta de 120 puntos equiespaciados 100 m , cada uno de los cuales se sitúa en la vertical de los centros de los rectángulos y se apoya en la parte superior de la primera fila de prismas (excepto en el último ejemplo, donde el número de puntos es 60 y no se respeta su equiespaciado). En todos los casos, el criterio de apertura será la en vecindad en todas direcciones.

2.3.1. Prisma rectangular

En la Figura 2.2 podemos ver los resultados de la inversión de un modelo formado por la sección de un prisma rectangular de densidad anómala $\Delta\rho^o = 200 \text{ kg/m}^3$. Como densidad de cálculo se toma el valor $\Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$, se utiliza como semilla un único prisma, dejándose los otros 5999 cerrados, y se utiliza la norma L^1 como medida de la diferencia entre las atracciones original y calculada.

En la Figura 2.3 se muestran los resultados de la inversión de la misma sección de prisma rectangular que en el ejemplo anterior, con idénticas características salvo que la norma utilizada para el criterio de relleno es la L^2 .

En ambos casos podemos observar una buena determinación de la parte superior del cuerpo anómalo. También en las dos pruebas realizadas podemos ver que la parte inferior del modelo refleja la tendencia del método a generar modelos profundos. En cuanto a la superficie y masa del modelo estimado, las obtenidas con la aproximación L^1 como criterio

de relleno se acercan más a las originales, aunque la forma final del modelo calculado con la norma L^2 es más exacta. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en René (1986).

2.3.2. Cilindro circular

En la Figura 2.4 se presentan los resultados de la inversión de un modelo formado por la sección de un cilindro circular de densidad anómala $\Delta\rho^o = 200 \text{ kg/m}^3$. Como densidad de cálculo se toma el valor $\Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$, no se utiliza semilla alguna (por lo que en la primera iteración del algoritmo se examinarán todos los prismas del espacio modelo y se aplica la norma L^2 como criterio de relleno).

En la Figura 2.5 vemos los resultados de la inversión de la misma sección de cilindro circular que en el ejemplo anterior, con idénticas características salvo que la masa anómala para el cálculo del modelo es de $\Delta\rho^c = 160 \text{ kg/m}^3$.

En estos ejemplos, aparte del hecho coincidente con el caso de las secciones de prisma rectangular de una tendencia a la generación de modelos profundos, vemos como, en el caso de utilizar una densidad menor a la real, la superficie del cuerpo anómalo estimado es mayor que la del cuerpo real. Los resultados obtenidos concuerdan con los descritos en René (1986).

2.3.3. Modelo compuesto por un cuerpo complejo

En la Figura 2.6 se observan los resultados de la inversión de un modelo formado por la sección de un prisma con una forma irregular de densidad anómala $\Delta\rho^o = 200 \text{ kg/m}^3$. Como densidad de cálculo se utiliza el valor $\Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$, se impone un único prisma como semilla, situado en la parte superior del cuerpo, y se asume la norma L^2 como criterio de relleno.

Se aprecia como, aunque en las etapas iniciales del proceso de inversión (hasta la iteración número 100 aproximadamente) la forma obtenida es similar a la real, el resultado final adolece de una excesiva tendencia a la generación de estructuras profundas. Si se tuvieran evidencias de que a partir de cierta profundidad es imposible la existencia de cuerpos anómalos, esta información podría ser introducida en el proceso de inversión, por

ejemplo, como prismas excluidos por el usuario (René, 1986).

2.3.4. Modelo compuesto por varios cuerpos anómalos

En la Figura 2.7 podemos ver los resultados de la inversión de un modelo formado por dos secciones de prisma rectangular de densidad anómala $\Delta\rho^o = 200 \text{ kg/m}^3$. Como densidad de trabajo se utiliza el valor $\Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$, se trabaja con un único prisma como semilla en uno de los cuerpos anómalos y se toma la norma L^2 como criterio de relleno.

Con este ejemplo nos encontramos ante una de las principales debilidades del método. Debido al criterio de apertura, basado en la vecindad de rectángulos, resulta imposible la detección de varios cuerpos anómalos separados por espacios vacíos a menos que se disponga de información a priori sobre su localización aproximada para, de este modo, imponer las semillas correspondientes. Esto no siempre es posible en el trabajo con datos reales, por lo que los resultados de la inversión en estos casos estarán completamente errados, apareciendo estructuras con la única finalidad de satisfacer el criterio de vecindad para la expansión del modelo. Aun así, podemos ver que la atracción generada por el modelo calculado se ajusta al nivel prescrito con la observada, lo que pone una vez más de manifiesto la ambigüedad en la solución del problema inverso de la gravimetría.

2.3.5. Prisma rectangular con observaciones ruidosas

En la Figura 2.8 se presentan ver los resultados de la inversión de una sección de prisma rectangular de densidad anómala $\Delta\rho^o = 200 \text{ kg/m}^3$. Como densidad de trabajo se asume el valor $\Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$, no se usa semilla a priori y se toma la norma L^2 como criterio de relleno. En este caso, el número de observaciones se ha reducido a 60, éstas no están equiespaciadas entre sí y se les ha añadido un nivel de ruido aleatorio con desviación típica igual al $\pm 2\%$ del valor original en cada punto.

Los resultados, como era de esperar, son ligeramente peores que en el ejemplo equivalente con 120 puntos dato y sin ruido, aunque vemos que la parte superior del modelo sigue siendo estimada con bastante realismo. Ateniéndonos a este resultado podemos decir

que el método, para este caso concreto, es bastante robusto ante la presencia de ruido aleatorio y de bajo nivel en las observaciones.

2.4. Conclusiones

Se ha presentado un método de inversión gravimétrica que consiste en la aplicación iterativa del criterio «abrir, rechazar, rellenar» (A-R-R). El método se aplica sobre un espacio modelo dividido en prismas y con un contraste de densidad prefijado. El método no requiere trabajo con matrices más allá del almacenamiento y extracción de datos; en ningún caso se realiza inversión ni resolución de sistemas de ecuaciones, lo que ralentizaría el proceso en el caso de trabajar con grandes volúmenes de observaciones y prismas. La naturaleza del criterio «forma de la anomalía» favorece el desarrollo de modelos profundos (René, 1986). Si se desea, este efecto puede ser minimizado con unos apropiados constreñimientos aplicados al espacio modelo (exclusión de prismas por el usuario). Aunque sólo se han presentado ejemplos de inversión en un espacio bidimensional, la generalización del método a las tres dimensiones es inmediata, ya que en el desarrollo del método no se utiliza ningún constreñimiento relacionado con las dimensiones del espacio de trabajo (sólo el criterio de vecindad, que es extrapolable a un espacio tridimensional).

Las principales desventajas, o puntos débiles, del método presentado son las siguientes:

1. Imposibilidad de trabajo simultáneo con contrastes de densidad positivos y negativos.
2. Poca fiabilidad en la generación de modelos formados por cuerpos anómalos separados por espacios vacíos.
3. No incorporación en la formulación de parámetros de precisión de las observaciones utilizadas ni del espacio modelo.

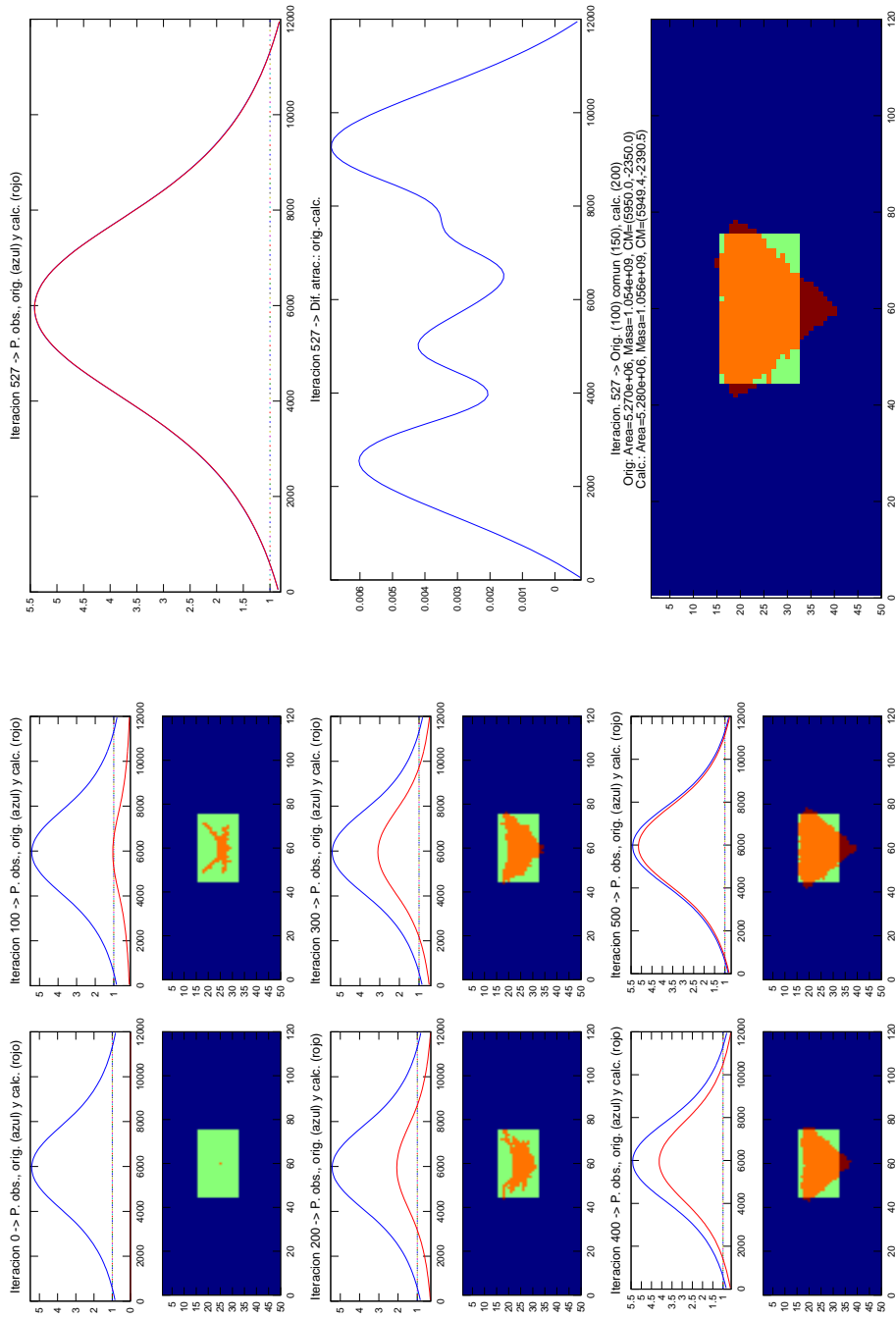


Figura 2.2: Inversión del modelo de sección de prisma rectangular. Norma L^1 . Densidades de trabajo: $\Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$. Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 100 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en $mGal$.

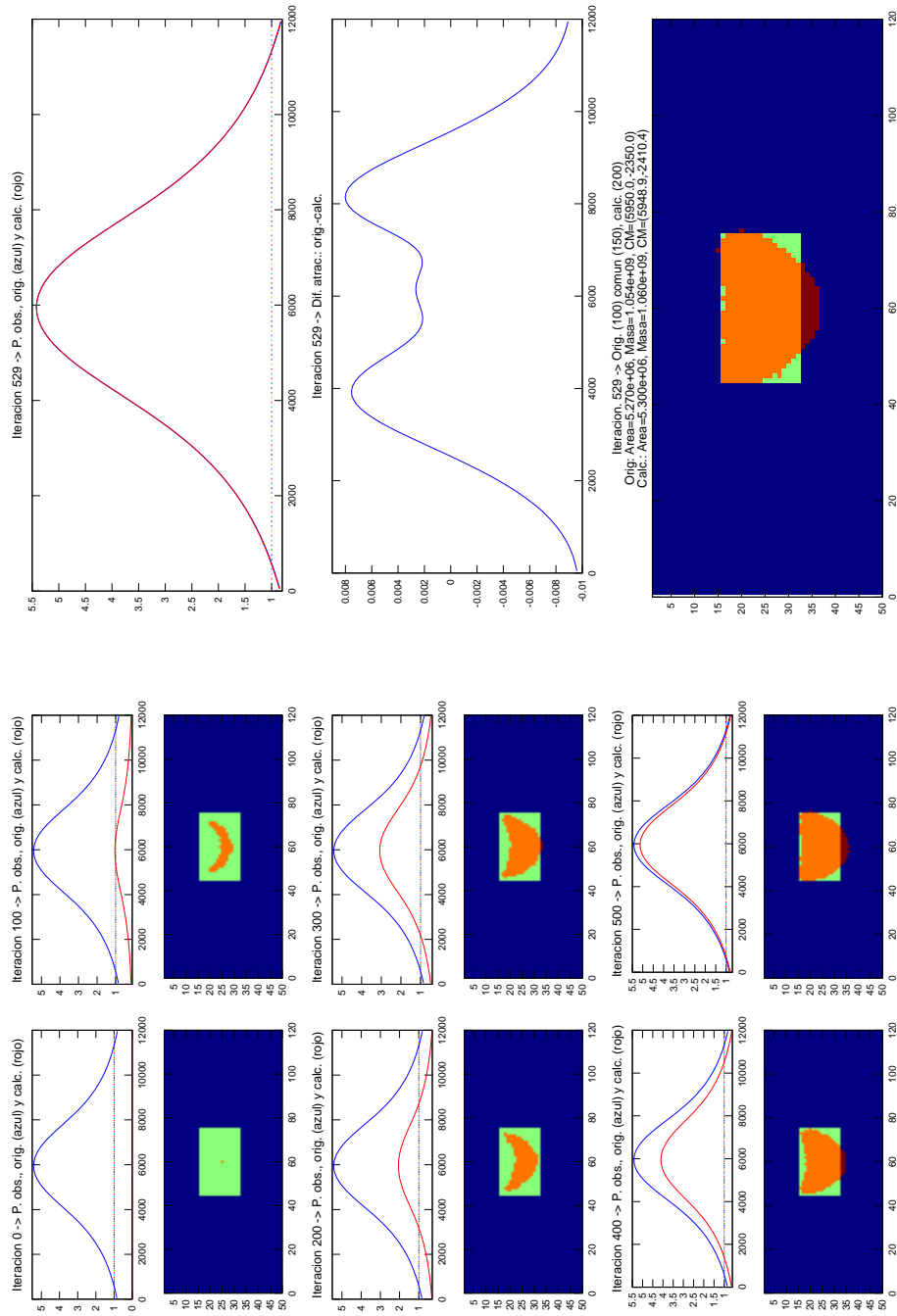


Figura 2.3: Inversión del modelo de sección de prisma rectangular. Norma L^2 . Densidades de trabajo: $\Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$. Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 100 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en $mGal$.

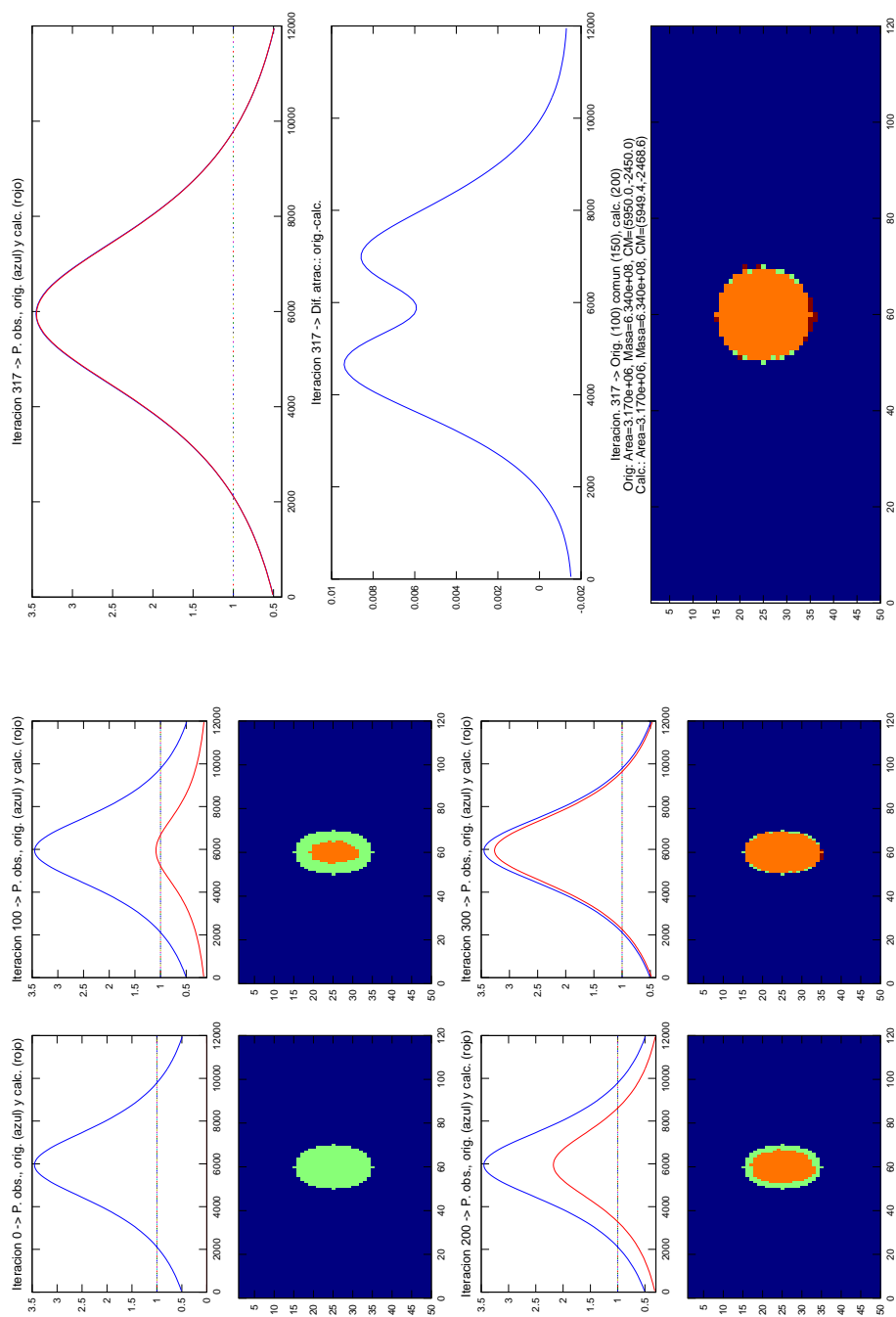


Figura 2.4: Inversión del modelo de sección de cilindro circular. Norma L^2 . Densidades de trabajo: $\Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$. Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 100 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en $mGal$.

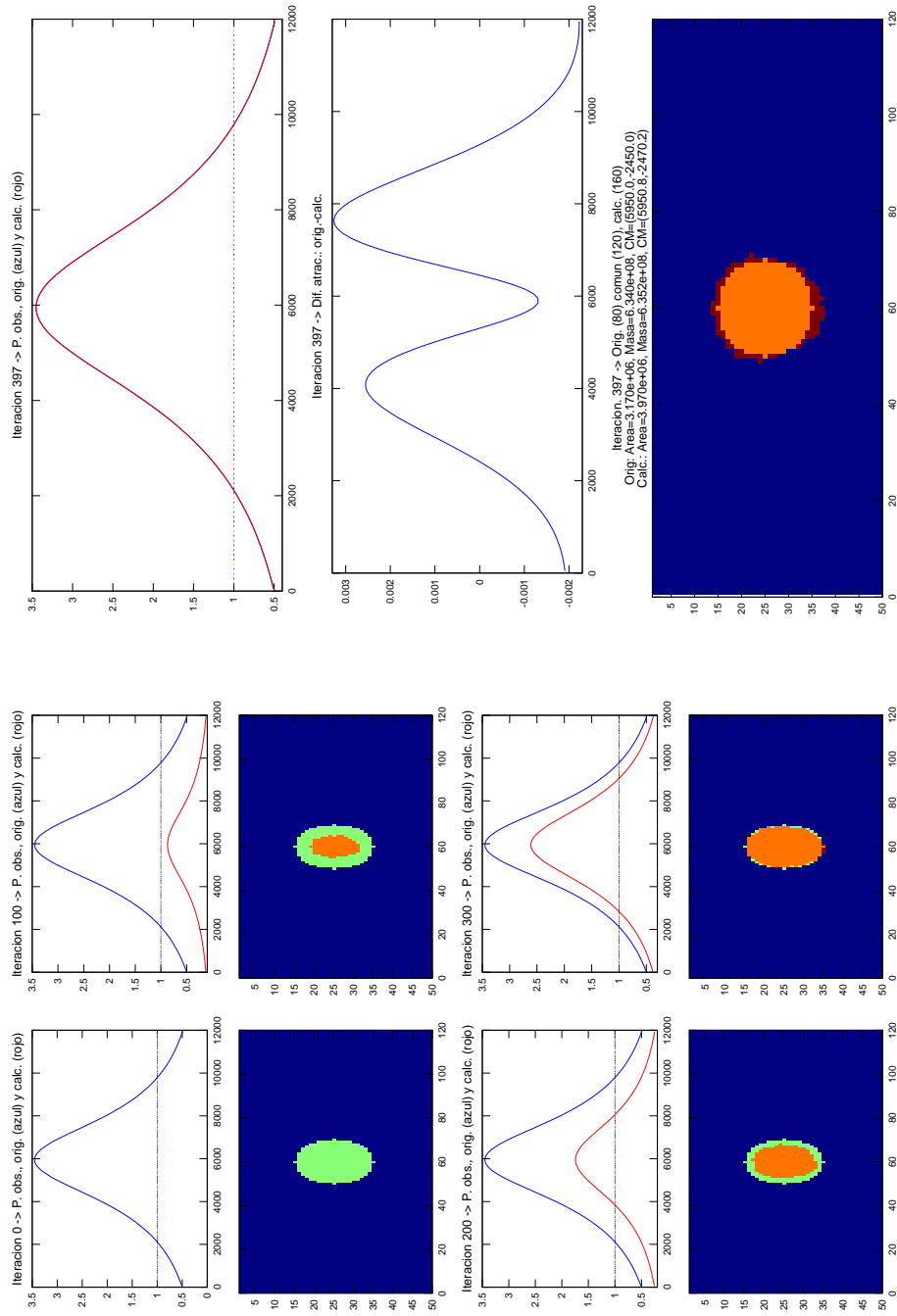


Figura 2.5: Inversión del modelo de sección de cilindro circular. Norma L^2 . Densidades de trabajo: $\Delta\rho^o = 200 \text{ kg/m}^3$, $\Delta\rho^c = 160 \text{ kg/m}^3$. Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 100 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en $mGal$.

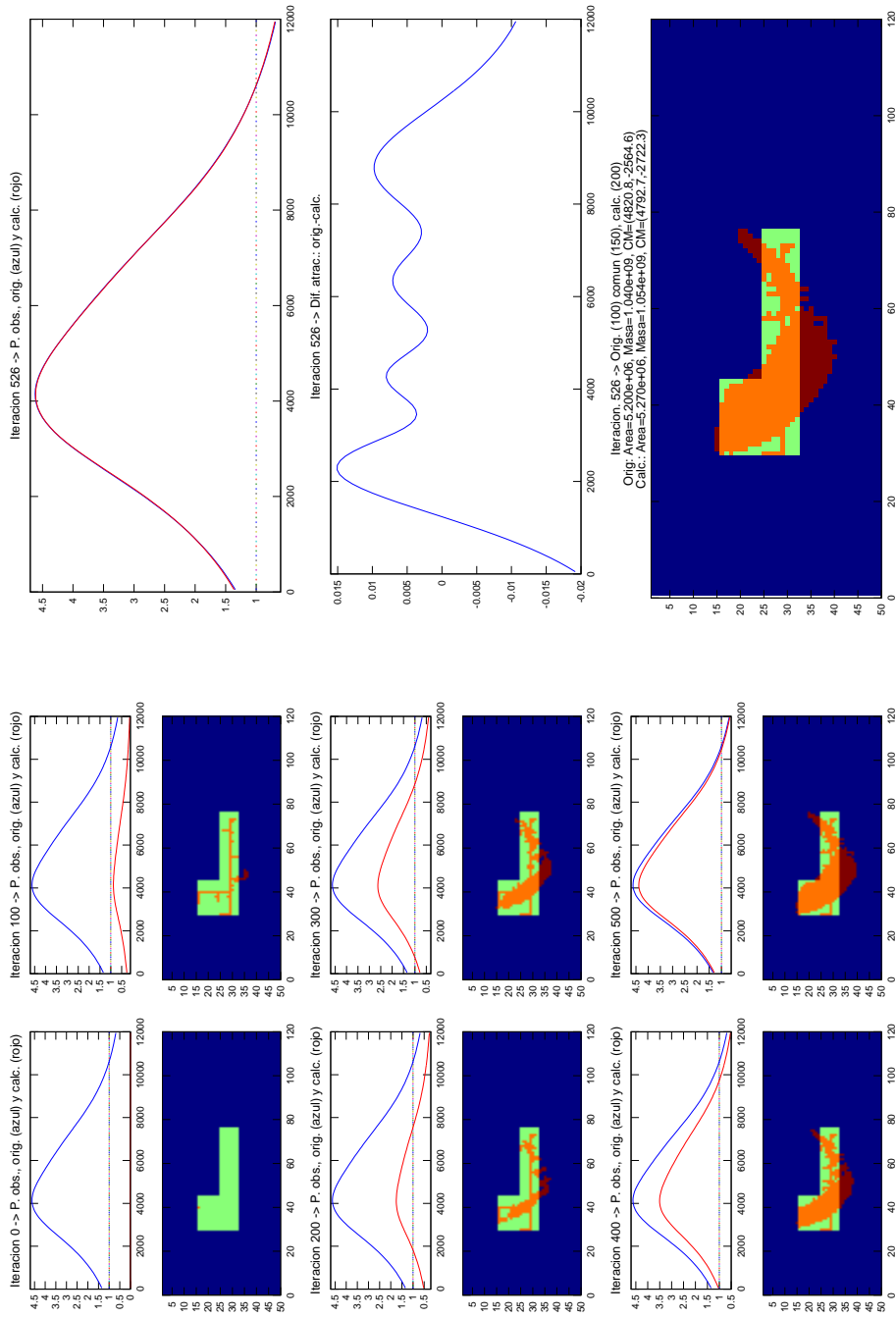


Figura 2.6: Inversión del modelo de sección de prisma con forma irregular. Norma L^2 . Densidades de trabajo: $\Delta\rho^o = \Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$. Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 100 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en $mGal$.

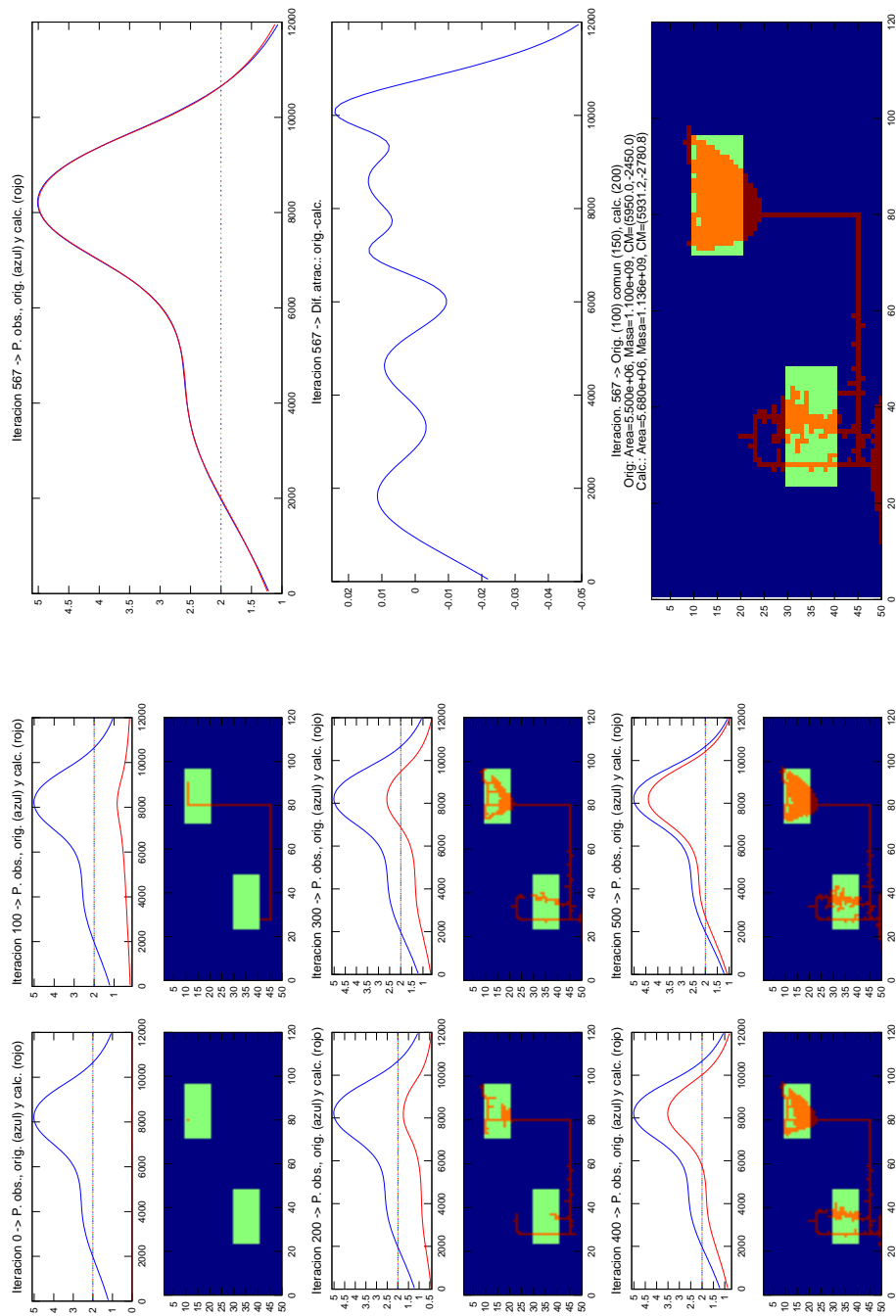


Figura 2.7: Inversión del modelo de dos secciones de prisma rectangular. Norma L^2 . Densidades de trabajo: $\Delta\rho^o = \Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$. Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 100 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en $mGal$.

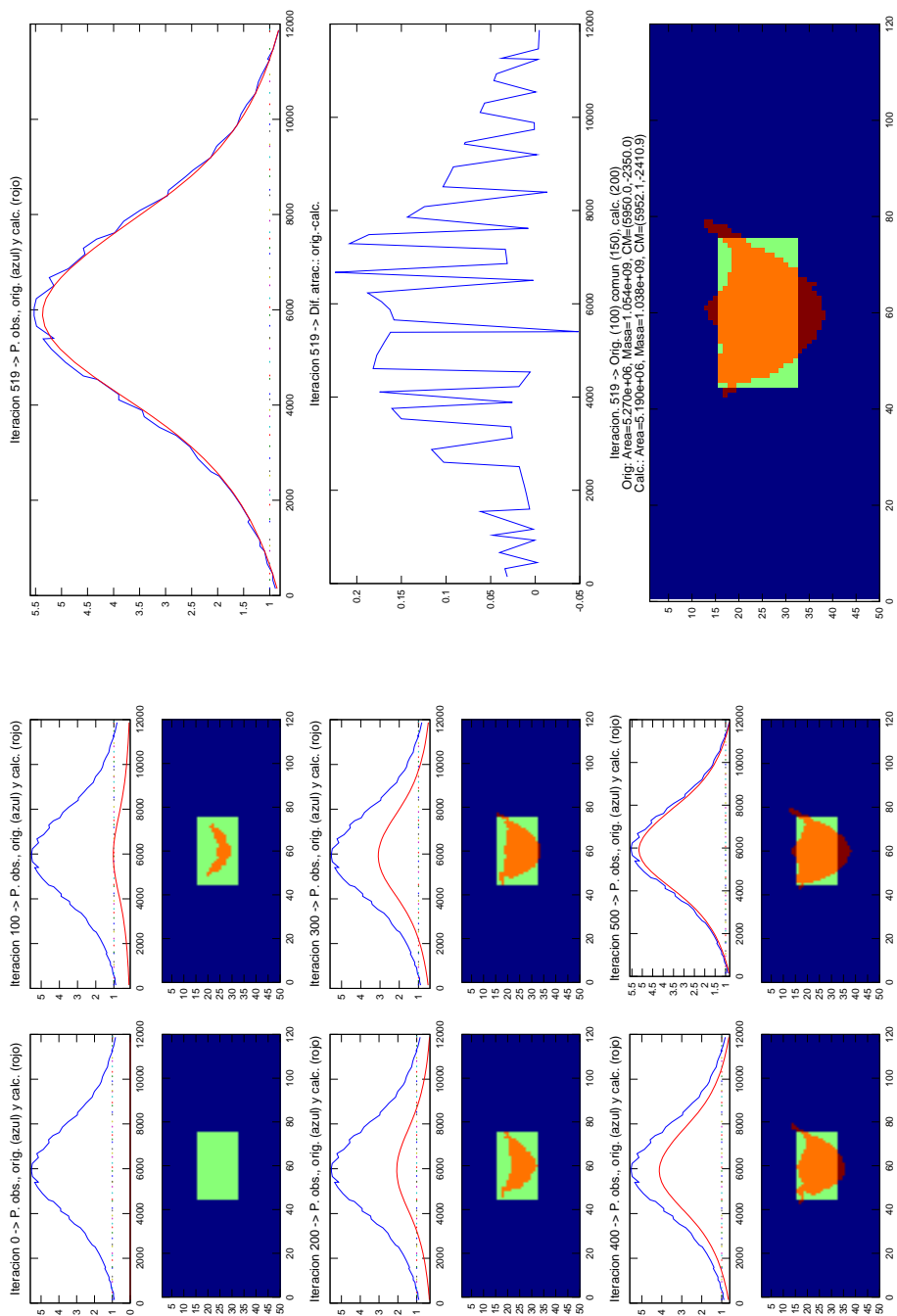


Figura 2.8: Inversión del modelo una sección de prisma rectangular con observaciones ruidosas. Norma L^2 . Densidades de trabajo: $\Delta\rho^c = 200 \text{ kg/m}^3$. Tipo de ruido: aleatorio, con desviación típica de $\pm 2\%$ de la atracción original en cada punto. Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 100 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en $mGal$.

Inversión mediante el método GROWTH

3.1. Introducción

Basándose en el método *open, reject, fill*, expuesto en René (1986), A. G. Camacho ha desarrollado un método de inversión no lineal que estima la estructura anómala del subsuelo mediante la agregación de prismas de densidad constante, fijada a priori. El método está documentado en Camacho y otros (2000, 2002, 2007) y se pueden encontrar aplicaciones en Araña y otros (2000); Camacho y otros (2001); Gottsmann y otros (2008); Montesinos y otros (2003); Nunes y otros (2006); Tiede y otros (2005).

La técnica *open, reject, fill* consideraba un espacio bidimensional y estaba limitada al trabajo con modelos con un único contraste de densidad (positivo o negativo). Además, era recomendable inicializar el modelo con una «semilla», consistente en uno o varios prismas rellenos a priori, y el cuerpo anómalo estimado sólo podía crecer en la periferia de este punto de partida.

El método GROWTH mejora al *open, reject, fill* en los siguientes aspectos:

1. Se considera un espacio de trabajo tridimensional.
2. No requiere una «semilla» de partida.
3. Se puede determinar durante el proceso de inversión una tendencia regional en las observaciones.
4. No impone que el crecimiento del modelo anómalo se produzca en prismas contiguos

- a los ya rellenos.
5. Se puede trabajar con una partición irregular (prismas de distintas dimensiones) del subsuelo.
 6. El método acepta contrastes de densidad positivos y negativos al mismo tiempo.
 7. Se tienen en cuenta los errores en las observaciones.
 8. Cuenta con un test de estimación de errores groseros simultáneo con el proceso de inversión.
 9. Existe la posibilidad de variar los contrastes de densidad durante el proceso de inversión.
 10. Incluye un factor de ajuste sobre la densidad utilizada en la corrección topográfica aplicada a las observaciones.

3.2. Descripción del método

En lo que sigue se desarrollará teóricamente el método de inversión presentado, objeto de esta parte del trabajo.

3.2.1. Visión global del algoritmo

Consideremos n estaciones $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, n$ sobre el terreno (ver Figura 3.1), donde se ha calculado la anomalía de Bouguer completa Δg_i (utilizando una densidad ρ_T para la corrección topográfica) a partir de las correspondientes observaciones gravimétricas de campo. Supondremos una distribución gaussiana de las incertidumbres de las observaciones, que serán introducidas mediante una matriz de varianza-covarianza Q_D (diagonal). El objetivo será la construcción del modelo de los cuerpos de masa anómala del subsuelo que ajuste las observaciones lo mejor posible (en el sentido de los mínimos cuadrados). Para conseguir este objetivo se divide el subsuelo en m prismas rectangulares (ver Figura 3.1), cuyas dimensiones estarán relacionadas con la profundidad de cada

prisma y la separación de las observaciones en la superficie. Así, bajo las zonas en las que haya poca separación entre las observaciones los prismas correspondientes serán más pequeños que bajo aquéllas en la que las observaciones sean dispersas (Camacho y otros, 2002, 2007).

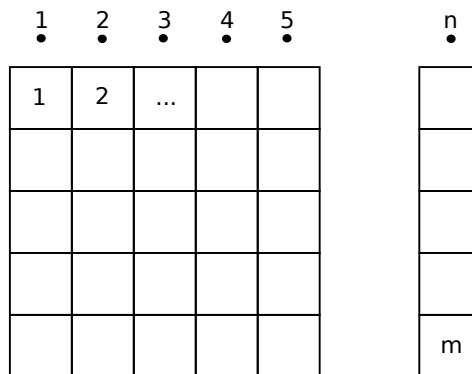


Figura 3.1: Espacio modelo y observaciones en un entorno bidimensional.

Como se ha mencionado, los valores de los contrastes de densidad de trabajo son prescritos previamente al proceso de inversión. Para cada prisma j se asignará un contraste positivo, $\Delta\rho_j^+$, y uno negativo, $\Delta\rho_j^-$.

Por otra parte, se calculará la atracción de cada prisma sobre cada punto de trabajo considerando densidad unidad y el resultado se almacenará en una matriz A , donde cada fila corresponde a un punto de observación y cada columna a un prisma, A_{ij} .

Con base en lo anterior, podemos construir las ecuaciones de observación para cada punto dato:

$$\Delta g_i = \sum_{j \in J^+} A_{ij} \Delta \rho_j^+ + \sum_{j \in J^-} A_{ij} \Delta \rho_j^- + \delta g_{reg} + \delta g_{top} + v_i, \quad (3.1)$$

con $i = 1, \dots, n$ y donde J^+ y J^- son los conjuntos de índices correspondientes a los prismas rellenos con contrastes de densidad positivos y negativos, respectivamente, δg_{reg} es la componente debida a la tendencia regional, δg_{top} la debida a la varianción de densidad para la corrección del terreno y v_i es el residuo.

Por simplicidad, para la tendencia regional se adopta una expresión lineal del tipo

$$\delta g_{reg} = p_0 + p_x (x_i - x_M) + p_y (y_i - y_M), \quad (3.2)$$

con $i = 1, \dots, n$ y donde (x_M, y_M) son las coordenadas de un punto arbitrario y p_0, p_x y p_y son los valores a ajustar.

El término referente a la corrección topográfica es

$$\delta g_{top} = \delta \rho_T C_i, \quad (3.3)$$

donde $\delta \rho_T$ es la corrección a la densidad utilizada para la corrección del terreno y C_i es el factor de corrección del terreno con densidad unidad para cada punto.

Si se dispone de información previa de la estructura del subsuelo, ésta puede ser incorporada al proceso de inversión. Para ello, se expresará esta información como valores iniciales $\rho_j^0, j = 1, \dots, m$ de las densidades de los prismas y se adoptará la matriz de varianza-covarianza correspondiente, Q_M . En el caso de no disponer de información previa, se adoptarán los valores iniciales $\rho_j^0 = 0, j = 1, \dots, m$ y se tomará la matriz Q_M como la diagonal de $(A^T A)^{-1}$.

Si sólo se tuviese en cuenta un criterio de minimización de los residuos \mathbf{v} , el trabajo con contrastes de densidad negativos y positivos y la inclusión de los parámetros de la tendencia regional y la corrección topográfica darían lugar a un problema sin solución única (Camacho y otros, 2007). Para resolver esto, se adopta una condición adicional: la minimización de la masa anómala del modelo. Por lo tanto, la solución será obtenida por medio de una condición mixta de minimización de las normas L^2 de los residuos y de la masa anómala total del modelo estimado, ambas relacionadas por un parámetro de balance λ que determina la influencia de cada norma implicada en el resultado final:

$$\Phi = \mathbf{v}^T Q_D^{-1} \mathbf{v} + \lambda \mathbf{m}^T Q_M^{-1} \mathbf{m} = \text{mín}, \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ es el vector de residuos, $\mathbf{m} = (\Delta \rho_1, \dots, \Delta \rho_m)^T$ el vector de contrastes de densidad para cada prisma y λ el parámetro de balance (positivo).

El parámetro λ controla la influencia de las normas involucradas en la función de minimización. Para valores de λ bajos se obtiene un buen ajuste de las observaciones pero el modelo estimado puede crecer de forma excesiva, dando lugar a la aparición de estructuras ficticias para ajustar lo mejor posible los datos de partida. En el caso de

trabajar con valores altos de λ el modelo estimado será muy simple y se obtendrá un ajuste pobre de las observaciones (Camacho y otros, 2007).

3.2.2. Metodología de inversión

El proceso de inversión intenta determinar el modelo del subsuelo mediante la agregación de los prismas necesarios, rellenos con el correspondiente contraste de densidad, tal que se verifique la condición de minimización expuesta en la ecuación (3.4). Para resolver este problema no lineal se recurre a un proceso de exploración de un gran número de posibles modelos solución hasta encontrar el mejor. Un método que explorase todos los posibles modelos para la partición del subsuelo sería muy ineficiente, por lo que se recurre a un método de «expansión».

En este método, al igual que en el expuesto en René (1986), el modelo estimado se va formando mediante la agregación de prismas en un proceso iterativo. De esta forma, se sustituye la exploración de todos los posibles modelos por la exploración de algunas posibilidades de crecimiento (prisma a prisma) en cada paso del proceso. Así, los prismas son sistemáticamente probados, paso a paso, con cada densidad prescrita y, finalmente, la mejor opción es elegida para agregar al modelo de trabajo. La condición de minimización es aplicada en cada paso del algoritmo, incluyendo un factor de escala f , que relaciona el modelo de trabajo no terminado con las condiciones de observación.

En el paso $(k + 1)$ del proceso ya han sido rellenos k prismas, por lo que la atracción del modelo calculado hasta ese momento será:

$$\Delta g_i^c = \Delta g_i^0 + \sum_{J_k^+} A_{ij} \Delta \rho_j^+ + \sum_{J_k^-} A_{ij} \Delta \rho_j^-, \quad (3.5)$$

con $i = 1, \dots, n$ y donde Δg_i^0 es la atracción generada por los posibles prismas fijados a priori y $\Delta \rho_j^+$ y $\Delta \rho_j^-$ son los índices de los prismas rellenos hasta el momento. Ahora buscaremos un nuevo prisma a añadir entre los $m - k$ prismas sin modificar que quedan. Para cada j -ésimo prisma sin cambios, $j \notin J_k^+, J_k^-$, se forma la siguiente ecuación:

$$\Delta g_i - (\Delta g_i^c + A_{ij} \Delta \rho_j) f - [p_0 + p_x (x_i - x_M) + p_y (y_i - y_M)] - \delta \rho_T C_i = v_i, \quad (3.6)$$

con $i = 1, \dots, n$ y donde $\Delta\rho_j$ puede tomar los valores $\Delta\rho_j^+$ y $\Delta\rho_j^-$ y $f \geq 1$ es un factor de escala para el ajuste entre las anomalías del modelo actual ($\Delta g_i^c + A_{ij}\Delta\rho_j$) y las observadas, Δg_i . Los valores positivo y negativo de los contrastes de densidad prescritos serán testeados sucesivamente para cada prisma candidato $\Delta\rho_j$, buscando aquél que mejor ajuste la condición de minimización expuesta en la ecuación (3.4).

Con cada valor de densidad, los parámetros incógnita f , p_0 , p_x , p_y y $\delta\rho_T$ son ajustados según el criterio de minimización de la ecuación (3.4) en este $(k + 1)$ -ésimo paso:

$$\Phi_{k+1} = (\mathbf{v}^T Q_D^{-1} \mathbf{v} + \lambda f^2 \mathbf{m}^T Q_M^{-1} \mathbf{m})_{k+1} = \text{mín}, \quad (3.7)$$

donde el vector \mathbf{m} incluye, además de los prismas previamente rellenos, el valor $\Delta\rho_j$ que está siendo testado.

Para simplificar los desarrollos, adoptaremos la siguiente notación para los diferentes vectores implicados en el proceso:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i - x_M, \\ y_i &= y_i - y_M, \\ z_i &= C_i, \\ u_i &= 1, \\ r_i &= \Delta g_i^c + A_{ij}\Delta\rho_j, \\ g_i &= \Delta g_i, \\ D &= Q_D^{-1}, \\ M &= Q_M^{-1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

con lo que la ecuación (3.6) queda:

$$v_i = g - r f - u p_0 - x p_x - y p_y - z p_z. \quad (3.9)$$

Considerando la notación:

$$\begin{aligned} s_{mm} &= \mathbf{m}^T M \mathbf{m}, \\ s_{ab} &= \mathbf{a}^T D \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

con $\mathbf{a}, \mathbf{b} = \{\mathbf{g}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ y desarrollando la función a minimizar (3.4), ésta se convierte en:

$$\begin{aligned}
\Phi = & s_{gg} - s_{gr}f - s_{gu}p_0 - s_{gx}p_x - s_{gy}p_y - s_{gz}p_z - \\
& s_{rg}f + s_{rr}f^2 + s_{ru}fp_0 + s_{rx}fp_x + s_{ry}fp_y + s_{rz}fp_z - \\
& s_{ug}p_0 + s_{ur}p_0f + s_{uu}p_0^2 + s_{ux}p_0p_x + s_{uy}p_0p_y + s_{uz}p_0p_z - \\
& s_{xg}p_x + s_{xr}p_xf + s_{xu}p_xp_0 + s_{xx}p_x^2 + s_{xy}p_xp_y + s_{xz}p_xp_z - \\
& s_{yg}p_y + s_{yr}p_yf + s_{yu}p_yp_0 + s_{yx}p_yp_x + s_{yy}p_y^2 + s_{yz}p_yp_z - \\
& s_{zg}p_z + s_{zr}p_zf + s_{zu}p_zp_0 + s_{zx}p_zp_x + s_{zy}p_zp_y + s_{zz}p_z^2 + s_{mm}\lambda f^2 = \text{mín.}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Para buscar el mínimo de la función derivamos la ecuación (3.11) con respecto a cada incógnita e igualamos a 0

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial f} &= (s_{rr} + s_{mm}\lambda)f + s_{ru}p_0 + s_{rx}p_x + s_{ry}p_y + s_{rz}p_z - s_{rg} = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial p_0} &= s_{ur}f + s_{uu}p_0 + s_{ux}p_x + s_{uy}p_y + s_{uz}p_z - s_{ug} = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial p_x} &= s_{xr}f + s_{xu}p_0 + s_{xx}p_x + s_{xy}p_y + s_{xz}p_z - s_{xg} = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial p_y} &= s_{yr}f + s_{yu}p_0 + s_{yx}p_x + s_{yy}p_y + s_{yz}p_z - s_{yg} = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial p_z} &= s_{zr}f + s_{zu}p_0 + s_{zx}p_x + s_{zy}p_y + s_{zz}p_z - s_{zg} = 0,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

de donde, despejando, se pueden obtener las incógnitas buscadas como:

$$\begin{aligned}
f &= \frac{s_{rg} - s_{ru}p_0 - s_{rx}p_x - s_{ry}p_y - s_{rz}p_z}{s_{rr} + s_{mm}\lambda}, \\
p_0 &= \frac{F_{gu} - F_{xu}p_x - F_{yu}p_y - F_{zu}p_z}{F_{uu}}, \\
p_x &= \frac{G_{gx} - G_{xy}p_y - G_{xz}p_z}{G_{xx}}, \\
p_y &= \frac{M_{gy} - M_{yz}p_z}{M_{yy}}, \\
p_z &= \frac{N_{gz}}{N_{zz}},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde se ha considerado, para simplificar la notación:

$$\begin{aligned}
F_{ab} &= s_{ab}(s_{rr} + \lambda s_{mm}) - s_{ra}s_{rb}, \text{ con } \mathbf{a}, \mathbf{b} = \{\mathbf{g}, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}, \\
G_{ab} &= F_{ab}F_{uu} - F_{ua}F_{ub}, \text{ con } \mathbf{a}, \mathbf{b} = \{\mathbf{g}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}, \\
M_{ab} &= G_{ab}G_{xx} - G_{xa}G_{xb}, \text{ con } \mathbf{a}, \mathbf{b} = \{\mathbf{g}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}, \\
N_{ab} &= M_{ab}M_{yy} - M_{ya}M_{yb}, \text{ con } \mathbf{a}, \mathbf{b} = \{\mathbf{g}, \mathbf{z}\}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Una vez resuelto el sistema (3.12), se calculan los residuos para el $\Delta\rho_j$ de trabajo. A continuación se calcula la función a minimizar (3.7), a partir de cuyo valor se elegirá el prisma que entrará a formar parte del modelo estimado. Aquel prisma para el cual el valor de Φ_{k+1} sea mínimo será el seleccionado y se añadirá el efecto de su atracción sobre los puntos observados al vector Δg_i^c .

Este proceso se repite para todos los prismas vacíos. A medida que avanza el proceso, el valor del factor de escala f decrece y los parámetros p_0 , p_x , p_y y $\delta\rho_T$ alcanzan valores estables. Cuando el valor del factor de escala f se acerca lo suficiente a 1 el proceso se detiene, obteniendo el modelo del subsuelo, los parámetros de la tendencia regional y el valor de corrección a la densidad utilizada para la corrección topográfica de las gravedades observadas.

3.2.3. Comentarios adicionales sobre el proceso de inversión

3.2.3.1. Variación de los contrastes de densidad durante el proceso de inversión

Este método requiere una elección adecuada de los contrastes de densidad de trabajo. Un contraste excesivamente alto ajustará la componente principal de la anomalía observada, pero producirá un modelo demasiado simple. Por el contrario, un contraste demasiado pequeño ajustará no sólo la señal generada por los cuerpos anómalos verdaderos, sino que también lo hará con el ruido observacional, apareciendo cuerpos artificiales en el modelo y siendo éste muy complejo. Para resolver este problema, particularmente cuando no se tiene un conocimiento previo muy exacto de los contrastes de densidad en la zona de trabajo, se adopta un criterio de variación de la densidad a lo largo del proceso iterativo.

Comenzando con unos valores máximos de los contrastes de densidad (llamaremos R_j^+ al contraste máximo positivo y R_j^- al negativo), éstos evolucionarán a lo largo del proceso de inversión según una ley simple. Por medio de pruebas empíricas (Camacho y otros, 2007) se ha seleccionado una función de variación de los contrastes de densidad $\Delta\rho_j^+$ y $\Delta\rho_j^-$ dada por:

$$\Delta\rho_j^\pm = R_j^\pm \left[1 - \frac{1}{(f + 0,1)^\tau} \right], \quad (3.15)$$

donde el factor de escala $f \geq 1$, correspondiente al factor calculado en el paso de trabajo del proceso de inversión, se usa como parámetro característico para describir el instante de crecimiento y τ es un factor fijo que indica la variabilidad deseada de los contrastes de densidad. Valores altos de τ producirán modelos anómalos homogéneos y con una geometría angulosa cuyos contrastes de densidad serán muy cercanos a los valores extremos. Por otra parte, valores pequeños de τ producirán modelos con contrastes de densidad muy variables, que van decreciendo hacia afuera en los cuerpos anómalos modelados, con lo cual las geometrías se suavizan. De este modo, los contrastes de densidad más altos (los más cercanos a los originales R_j^+ y R_j^-) se ajustarán a las componentes principales de la anomalía observada, mientras que para el ajuste de anomalías secundarias locales los contrastes utilizados serán menores (Camacho y otros, 2007).

3.2.3.2. Variación de los contrastes de densidad con la profundidad

Otro hecho que ha de ser tenido en cuenta en el método es la variación de los contrastes de densidad a medida que se profundiza en el subsuelo. Debido a la compactación es de esperar que los contrastes de densidad disminuyan con la profundidad. Para simular este efecto, en GROWTH se consideran dos posibles modelos de variación con la profundidad: estratificación por capas o exponencial (Camacho y otros, 2002).

En el caso de trabajar con un modelo estratificado por capas se ha de indicar el número de éstas así como sus límites superior e inferior y los contrastes de densidad asignados a cada una. Durante el proceso de inversión se identificará la capa a la que pertenece cada prisma de trabajo para aplicar los contrastes de densidad pertinentes.

Para el trabajo con un modelo de estratificación exponencial se utiliza la siguiente

expresión para calcular el contraste de densidad de cada prisma candidato:

$$\Delta\rho_j^\pm = R^\pm e^{-\theta^\pm(Z^\pm - z_j)}, \quad (3.16)$$

donde R^\pm son los contrastes de densidad extremos, $\theta^\pm \geq 0$ es un coeficiente de decrecimiento (puede haber uno para las densidades positivas y otro para las negativas), Z^\pm son las profundidades correspondientes a los contrastes extremos y z_j es la profundidad del prisma de trabajo.

Para valores grandes de θ el contraste de densidad disminuirá rápidamente con la profundidad, mientras que con valores pequeños esta disminución será menor (Camacho y otros, 2007).

3.2.3.3. Elección óptima del parámetro de balance

El parámetro λ controla la influencia de la complejidad del modelo y el ajuste de las observaciones en el proceso de inversión. Para valores pequeños de λ se obtiene un modelo que ajusta muy bien las observaciones de partida, aunque el modelo anómalo así calculado es muy masivo y complejo: aparecen masas ficticias, masa periféricas excesivas, mezcla de masas positivas y negativas, etc. Esto es debido a que también se está invirtiendo parte del ruido observacional. Por el contrario, para valores altos de λ el modelo anómalo estimado será muy condensado o simple. En este caso, el modelo no ajustará toda la señal de observación y los residuos contendrán componentes de la señal que no son ruido y que, por tanto, no han sido interpretadas (Camacho y otros, 2007). Por consiguiente, sería interesante establecer un criterio para elegir un λ adecuado.

Supondremos que nuestras observaciones incluyen información acerca de su precisión a través de la desviación típica σ . En estas circunstancias, el proceso de inversión debería invertir el 100 % de la señal contenida en las observaciones, dejando la parte correspondiente al ruido como residuo final. El modelo estimado debería ser lo suficientemente complejo como para explicar la señal contenida en las observaciones, sin incorporar ningún tipo de cuerpo ficticio para justificar el ruido. Por lo tanto, el nivel de ajuste de las observaciones en relación con el nivel de complejidad del modelo podría ser resuelto mediante el análisis

de los residuos de la inversión, en un intento de determinar si contienen parte de la señal o sólo son ruido incorrelado.

Para identificar la relación señal-ruido en los residuos finales se utiliza la técnica del análisis de covarianza (Camacho y otros, 2007; Moritz, 1980). Supondremos que la característica principal del ruido es la ausencia de correlación espacial entre los valores de cada punto observado, mientras que señales correladas indicarán componentes susceptibles de invertir. Sean v_i , $i = 1, \dots, n$ los residuos finales de la inversión en los puntos respectivos P_i . La covarianza empírica, como función de la distancia horizontal entre los puntos viene dada por

$$\text{cov}(d) = \frac{\sum_{i,j} \tilde{v}_i \tilde{v}_j}{\sum_{k=1}^n \tilde{v}_k \tilde{v}_k}, \quad (3.17)$$

donde \tilde{v} son los residuos normalizados (de acuerdo a la matriz Q_D), la suma del numerador se extiende a todos los pares de puntos P_i, P_j tal que sus distancias mutuas sean cercanas a $d \approx \text{dist}(P_i, P_j)$ y el término de varianza del denominador se utiliza para propósitos de estandarización (Camacho y otros, 2007).

Los valores empíricos de covarianza pueden determinarse para valores de distancias uniformemente separados, $d_k = k\Delta d$, $k = 1, 2, \dots$, donde Δd es un paso de distancia adecuado. En el programa GROWTH se trabaja con la mediana de las distancias de cada punto a sus tres puntos más cercanos como valor para Δd (Camacho y otros, 2007). Los valores empíricos $\text{cov}(d_k)$, $k = 1, 2, \dots$ pueden ajustarse por medio de una función analítica de covarianza (definida positiva) (Barzaghi y Sansó, 1983), por ejemplo del tipo:

$$C(d) = aJ_0(cd) e^{-db}, \quad (3.18)$$

donde $J_0(\cdot)$ es la función de Bessel de orden cero y a , b y c son parámetros a determinar.

Durante el análisis, como parámetro característico se elige la covarianza para una distancia nula $C(0)$ o, para mayor eficiencia computacional, su aproximación por medio de la primera covarianza empírica $\text{cov}(d_1)$. Por lo tanto, el valor de λ para el modelo óptimo será aquél correspondiente a un valor nulo de $C(0) \equiv \text{cov}(d_1)$ (Camacho y otros, 2007).

3.2.3.4. Coeficiente de aleatoriedad

Este parámetro, que denotaremos como α , permite sustituir la exploración sistemática del modelo por una exploración aleatoria (más rápida). En lugar de probar en cada paso del algoritmo todos los m prismas de la partición del subsuelo, sólo se trabajará con un conjunto de m/α elementos, escogidos de forma aleatoria. Como es usual en este tipo de técnicas, una exploración aleatoria proporciona buenas soluciones, aunque no la solución óptima. Así, pueden usarse coeficientes altos en los primeros intentos de inversión, para determinar el parámetro λ , por ejemplo, y un $\alpha = 1$ para el cálculo del modelo final (Camacho y otros, 2000, 2002, 2007).

3.2.3.5. Tratamiento de errores groseros

Si todos los errores de los datos fuesen aleatorios los residuos del ajuste v_i deberían presentar una distribución normal. En la práctica, algunos errores son debidos a defectos instrumentales y errores por parte del observador, lo que implica que no siguen una distribución gaussiana. Con la intención de limitar su efecto en el modelo calculado, se asumirá que los errores groseros son raros, así que la zona de la distribución normal comprendida en el intervalo $\pm B\sigma$, con $B = 2,5$, se considerará que corresponde a errores aleatorios. Asumiremos que los errores groseros e_g tienen una distribución plana (todos los tamaños de errores groseros tienen la misma probabilidad) y se encuentran en el intervalo $(-\infty, -B\sigma) \cup (B\sigma, \infty)$, donde la distribución normal es pequeña. Aunque los errores groseros podrían ser detectados a partir de los residuos finales del proceso, el método de ajuste paso a paso permite aplicar un sistema de ponderación diseñado para eliminar la contribución de los errores groseros a medida que se va invirtiendo. Primero, en cada paso del proceso iterativo se utiliza la mediana del valor absoluto de los residuos como estimador robusto de la desviación estándar (Camacho y otros, 2007)

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{med}\{|\mathbf{v}|\}}{0,6745}, \quad (3.19)$$

donde $\text{med}\{\}$ es el operador mediana y la constante 0,6745 hace de $\hat{\sigma}$ un estimador consistente para la desviación estándar en el caso de observaciones contaminadas por ruido

gausiano. Con esta estimación de la desviación se calculan los residuos estandarizados $v_i/\hat{\sigma}$ y se utilizan para determinar el sistema de ponderación adecuado w_{bi} para cada observación g_i . Una posible solución podría ser asignar a w_{bi} el valor 0 en la región fuera del intervalo $\pm 2,5\hat{\sigma}$ y así eliminar los errores groseros de forma definitiva. Una desventaja de este procedimiento es que una observación marcada como grosera y, por tanto, con peso 0 en los pasos iniciales del método no puede ser recuperada en los pasos sucesivos del algoritmo. Un método más flexible consiste en la reasignación de pesos a las observaciones a lo largo del proceso iterativo sin que nunca éstos lleguen a 0. Para ello se propone la función de reponderación (Camacho y otros, 2007)

$$w_{bi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{v_i^2}{B^2\hat{\sigma}^2 f^2} - 1\right)^2}, \text{ para } v_i^2 > B^2\hat{\sigma}^2 f^2, \quad (3.20)$$

$$w_{bi} = 1, \text{ para } v_i^2 \leq B^2\hat{\sigma}^2 f^2,$$

que da una función suavizada para el peso de los errores groseros, que hace que la convergencia de la solución sea suave.

El factor de escala f se ha introducido en la función de reponderación para prevenir la detección de errores groseros prematuramente. De hecho, en los pasos iniciales del proceso de inversión, y teniendo en cuenta la simplicidad inicial del modelo calculado, pueden aparecer muchas observaciones como groseras que en realidad no lo son (Camacho y otros, 2007).

3.2.3.6. Elección de la densidad para la corrección del terreno

El método tradicional para estimar la densidad del subsuelo para realizar la corrección del terreno es debido a Nettleton y está documentado en Nettleton (1939). El criterio de selección de la densidad se basa en la obtención de una anomalía no correlada con la topografía después de aplicar la corrección del terreno. Sin embargo, en áreas volcánicas es esperable algún tipo de correlación (Camacho y otros, 2007) con lo que el método de Nettleton no producirá resultados óptimos.

Como consecuencia de utilizar un valor inapropiado para la densidad pueden aparecer anomalías artificiales en los datos a invertir, por lo que aparecerán cuerpos ficticios en

el proceso de inversión. En estas circunstancias, un método aceptable para determinar la densidad del terreno sería escoger aquella que produjese un buen ajuste de las observaciones empleando la mínima masa anómala posible (Camacho y otros, 2007). Estas condiciones son esencialmente las mismas que determinan el método de inversión, por lo que el método podría incluir un parámetro para ajustar la densidad buscada.

El cálculo normalmente utilizado para la corrección del terreno es del tipo $\rho_T C$, donde ρ_T es la densidad del terreno y

$$C = \pi G h + \sum_i C_i, \quad (3.21)$$

donde G es la constante de gravitación universal, h es la altitud de la estación y el sumatorio se extiende a las atracciones C_i , para densidad unidad, de los elementos (prismas, coronas o sectores circulares, etc.) en los cuales se divide el volumen de terreno por encima y por debajo de la estación observada (Camacho y otros, 2007).

Este cálculo puede ser realizado a priori para C_i a partir de un modelo digital de elevaciones y tomando un valor general para ρ_T (por ejemplo, $\rho_T = 2670 \frac{kg}{m^3}$). Sin embargo, debido a la posible incertidumbre del valor ρ_T es interesante incluir el cálculo de un valor de corrección $\delta\rho_T$ en el proceso de inversión. Esta forma de determinar $\delta\rho_T$ se corresponde con la hipótesis enunciada del mejor ajuste y el modelo de masa anómala mínima. El ajuste se lleva a cabo mediante la inclusión del término corrector δg_{top} en la ecuación (3.6), dentro del cual se encuentra la incógnita $\delta\rho_T$.

3.2.3.7. Tendencia regional

La tendencia regional presente en los datos gravimétricos generalmente se ajusta antes de proceder a su inversión. Un procedimiento usual es el ajuste polinómico (Beltrão y otros, 1991). En el método GROWTH se propone una técnica para determinar la tendencia regional durante el proceso de inversión.

En el método de ajuste utilizado, la componente regional de las anomalías se considera como parte de los datos aunque, debido a su larga longitud de onda, no podrá ser modelada por los elementos de volumen predichos por el modelo.

En los artículos donde se describe el método, (Camacho y otros, 2000, 2002, 2007), siempre se ha asumido como lineal la tendencia regional $\delta g_{reg} = p_0 + p_x(x_i - x_M) + p_y(y_i - y_M)$, $i = 1, \dots, n$, con el fin de simplificar la formulación.

3.2.3.8. Estimación de la precisión de los parámetros ajustados

También se pueden estimar la precisión de los parámetros resultado de la inversión (densidad anómala, tendencia regional y corrección a la densidad utilizada para la corrección del terreno). Para ello se reescribe la ecuación (3.6) como:

$$\mathbf{d} = G\mathbf{p} - \mathbf{v}, \quad (3.22)$$

donde $\mathbf{d} = (\Delta g_1, \dots, \Delta g_n)^T$ es el vector de datos, $\mathbf{p} = (\Delta \rho_1, \dots, \Delta \rho_m, p_0, p_x, p_y, \delta \rho_T)^T$ es el vector de incógnitas y G es la matriz de diseño. La matriz de varianza-covarianza de los datos es Q_D , mientras que la correspondiente a las incógnitas, Q_P , se construye añadiendo las varianzas correspondientes a las incógnitas p_0, p_x, p_y y $\delta \rho_T$ a la matriz λQ_M . De este modo, la matriz de varianza-covarianza a posteriori se obtiene como (Tarantola, 2005):

$$Q'_P = Q_P - Q_P G^T (G Q_P G^T + Q_D)^{-1} G Q_P. \quad (3.23)$$

3.3. Ejemplos

Para comprobar el método de inversión expuesto se han realizado algunas inversiones con modelos sintéticos en 2D. En los ejemplos que se verán a continuación cada espacio modelo tiene unas dimensiones de $12 \times 5 \text{ km}$ (anchura \times profundidad). Éste se divide en un total de 6000 prismas, teniendo cada uno de ellos unas dimensiones de $100 \times 100 \text{ m}$. Cada perfil de atracción consta de 120 puntos equiespaciados 100 m , cada uno de los cuales se sitúa en la vertical de los centros de los rectángulos y se apoya en la parte superior de la primera fila de prismas.

El método de inversión utilizado será el más simple de todos, ya que sólo se pretende exponer el comportamiento general del método de inversión: no se tendrá en cuenta el cálculo de tendencia regional, ni el análisis de covarianza, ni la detección de errores groseros.

El modelo de prueba está compuesto por dos prismas rectangulares a diferentes profundidades. Los contrastes de densidad original y de cálculo de ambos prismas son iguales y tienen un valor de $\Delta\rho_o^+ = \Delta\rho_c^+ = 500 \text{ kg/m}^3$ para el prisma más profundo y de $\Delta\rho_o^- = \Delta\rho_c^- = -325 \text{ kg/m}^3$ para el más superficial. Ambos tienen una sección de $3,25 \cdot 10^6 \text{ m}^2$ y una masa por unidad de longitud de $1,625 \cdot 10^9 \text{ kg}$ para el prisma de contraste positivo y de $1,056 \cdot 10^9 \text{ kg}$ para el de contraste negativo. Las coordenadas de los centros de masa de ambos prismas son (en metros): $(3550, -2950)$ y $(8350, -1750)$ para contraste de densidad positivo y negativo, respectivamente.

Se harán pruebas con diferentes valores de los parámetros λ , τ y del coeficiente de aleatoriedad α para la búsqueda de prismas candidatos. También se intentará la inversión de un modelo con observaciones ruidosas.

3.3.1. Primera prueba

En la Figura 3.2 podemos ver los resultados de la inversión con los parámetros $\lambda = 0,001$, $\alpha = 4$ y sin variar los contrastes de densidad en el proceso.

Se observar como, a parte de los cuerpos anómalos originales, aparecen estructuras profundas que mezclan contrastes de densidad positivos y negativos. Esto es debido a la utilización de un valor del parámetro λ demasiado bajo, que hace que en la ecuación de minimización (3.4) prime el ajuste de las observaciones sobre la masa anómala del modelo estimado (Camacho y otros, 2000, 2002, 2007).

3.3.2. Segunda prueba

En la Figura 3.3 se muestran los resultados de la inversión con los parámetros $\lambda = 0,025$, $\alpha = 4$ y sin variar los contrastes de densidad en el proceso.

En este caso, al ser el parámetro λ muy alto, el modelo estimado adolece de un defecto de masa, terminando el proceso de forma prematura, mientras que las observaciones no están bien ajustadas (Camacho y otros, 2000, 2002, 2007).

3.3.3. Tercera prueba

La Figura 3.4 representa los resultados de la inversión con los parámetros $\lambda = 0,0015$, $\alpha = 4$ y sin variar los contrastes de densidad en el proceso.

Una vez seleccionado el valor óptimo para el parámetro λ (en esta serie de pruebas mediante ensayo y error) obtenemos el modelo que mejor se ajusta a los cuerpos anómalos originales. Los cuerpos anómalos estimados son ligeramente menos profundos que los originales, lo que hace que la superficie y la masa anómalas sean menores. También puede observarse que aún persisten algunos prismas aislados en zonas profundas, principalmente en los bordes de la partición del subsuelo. Por otro lado también vemos que, debido a la utilización de un coeficiente de aleatoriedad α distinto de 1, aparece algún hueco en los cuerpos estimados y sus bordes no están bien definidos por no haberse probado algunos de los prismas correspondientes.

3.3.4. Cuarta prueba

En la Figura 3.5 se observan los resultados de la inversión con los parámetros $\lambda = 0,0015$, $\alpha = 1$ y sin variar los contrastes de densidad en el proceso.

En este caso, al ser el coeficiente de aleatoriedad igual a 1 vemos que los bordes de los cuerpos reconstruidos están mejor definidos y que apenas se aprecian huecos en las estructuras anómalas, ya que todos los prismas que componen la partición del subsuelo han sido probados en cada iteración. Al ser la función de minimización (3.4) cuadrática se aprecia una tendencia a la generación de bordes redondeados en los cuerpos anómalos, especialmente en las zonas profundas (Camacho y otros, 2000, 2002, 2007).

Los cuerpos generados siguen siendo más pequeños y más superficiales que los originales, a la vez que todavía existen algunos prismas profundos.

3.3.5. Quinta prueba

En la Figura 3.6 podemos ver los resultados de la inversión con los parámetros $\lambda = 0,0015$, $\tau = 8$ y $\alpha = 1$.

Vemos que las dimensiones de los cuerpos estimados se acercan más a los originales, debido a que a medida que avanza el proceso los contrastes de densidad son menores y son necesarios más prismas para generar la atracción observada.

3.3.6. Sexta prueba

En la Figura 3.7 se muestran los resultados de la inversión con los parámetros $\lambda = 0,0015$, $\tau = 4$ y $\alpha = 1$.

Al ser el parámetro τ más pequeño se permite una mayor variación de los contrastes de densidad originales lo que puede dar lugar a la aparición de estructuras ficticias superficiales de baja densidad para ajustar la parte de la señal que, de otro modo, quedaría sin invertir o sería interpretada por prismas muy profundos. Por lo tanto, la utilización de un parámetro τ muy bajo puede dar lugar a la inversión de parte del ruido contenido en las observaciones.

3.3.7. Séptima prueba

En la Figura 3.8 podemos ver los resultados de la inversión de dos modelos con los parámetros $\lambda = 0,0015$ y $\alpha = 1$, sin variar los contrastes de densidad en el proceso (imagen izquierda) y con $\tau = 4$ (imagen derecha).

En este ejemplo se pone claramente de manifiesto el efecto que puede producir la utilización de un valor de τ demasiado bajo: la determinación de estructuras ficticias de bajo contraste de densidad cerca de la superficie, en un intento de ajustar el ruido observacional. En el caso de la no tener en cuenta la variación de densidad (Figura 3.8, izquierda) la introducción de ruido aleatorio apenas modifica el resultado final con respecto al experimento de la sección 3.3.4: el borde superior de las masas anómalas está peor definido y aparecen algunos prismas profundos más. Sin embargo, en el caso de utilizar un parámetro $\tau = 4$ (Figura 3.8, derecha) se aprecian prismas muy superficiales de contraste de densidad muy bajo que son seleccionados por el algoritmo para ajustar parte del ruido.

3.4. Conclusiones

Se ha presentado un método de inversión gravimétrica que se aplica sobre un espacio modelo dividido en prismas y con contrastes de densidad prefijados. El método no requiere trabajo con matrices más allá del almacenamiento y extracción de datos; en ningún caso se realiza inversión ni resolución de sistemas de ecuaciones, lo que ralentizaría el proceso en el caso de trabajar con grandes volúmenes de observaciones y prismas.

La principal ventaja del método es la capacidad de trabajar simultáneamente con contrastes de densidad positivos y negativos, la posibilidad de determinar una tendencia regional durante el proceso de inversión, el cálculo de un factor de corrección a la densidad utilizada para la corrección topográfica de las observaciones y la capacidad de detectar errores groseros en los datos de partida (Camacho y otros, 2007).

Las principales desventajas provienen de la necesidad de obtener un valor del parámetro λ adecuado y del hecho de que el modelo estimado será más o menos correcto en la medida en que lo sean los contrastes de densidad seleccionados para la inversión.

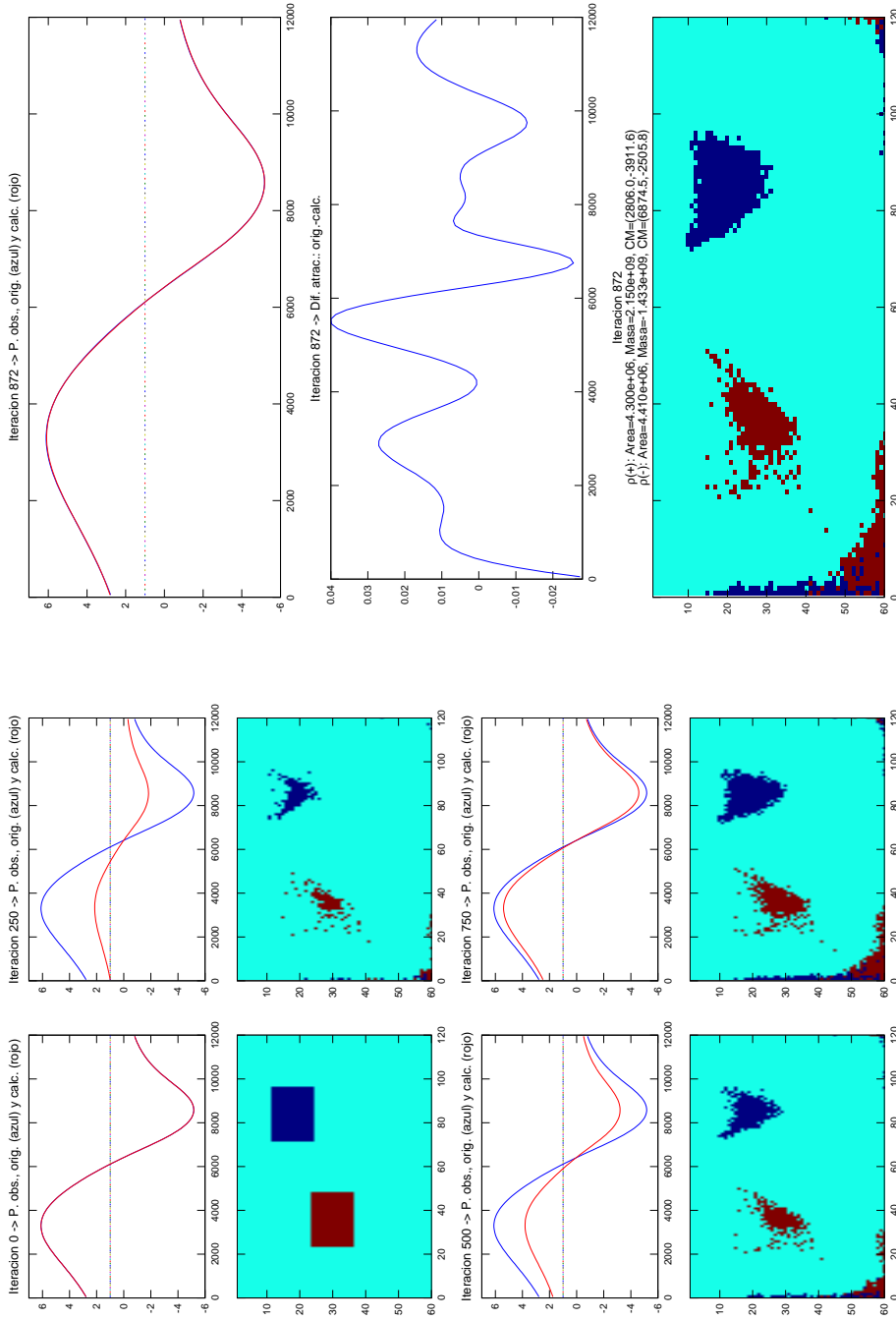


Figura 3.2: Primera prueba. Inversión de modelo de secciones de prisma rectangular. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_c^+ = \Delta\rho_c^+ = 500 \text{ kg/m}^3$ y $\Delta\rho_c^- = \Delta\rho_c^- = -325 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,001$ y $\alpha = 4$ (no se considera variación de densidad en la inversión). Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 250 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en $mGal$.

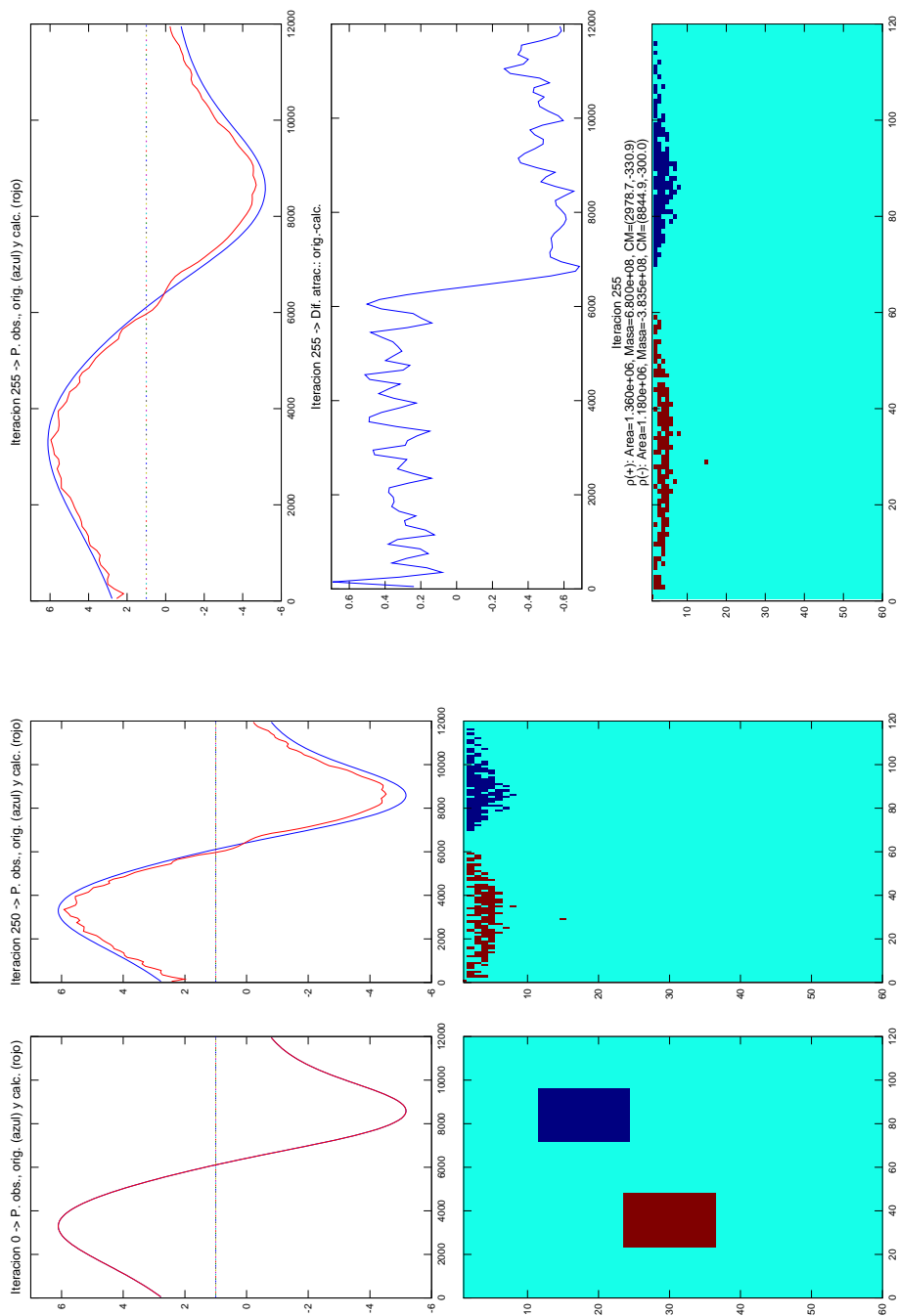


Figura 3.3: Segunda prueba. Inversión de modelo de secciones de prisma rectangular. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_o^+ = \Delta\rho_c^+ = 500 \text{ kg/m}^3$ y $\Delta\rho_o^- = \Delta\rho_c^- = -325 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,025$ y $\alpha = 4$ (no se considera variación de densidad en la inversión). Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 250 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en *mGal*.

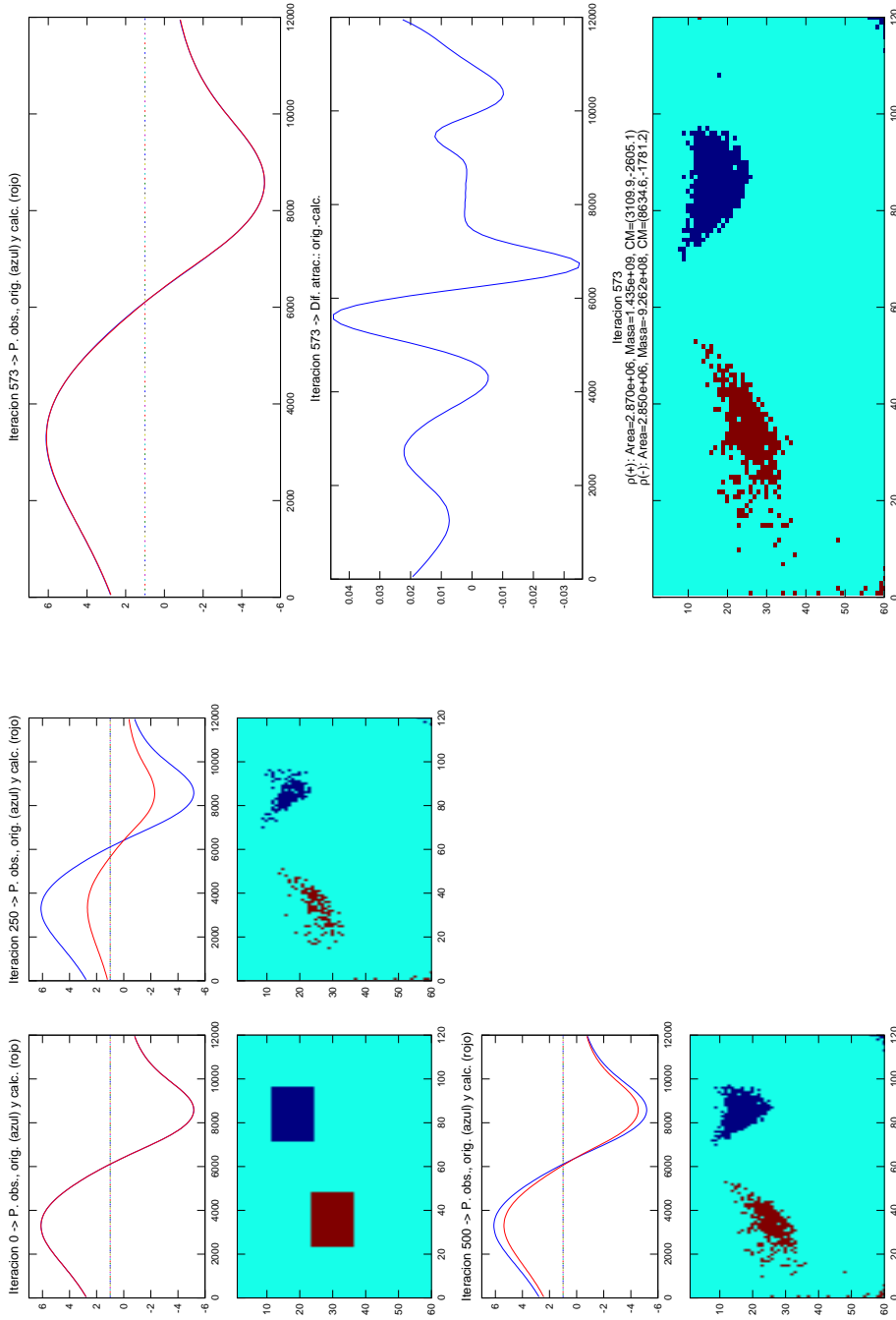


Figura 3.4: Tercera prueba. Inversión de modelo de secciones de prisma rectangular. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_0^+ = \Delta\rho_e^+ = 500 \text{ kg/m}^3$ y $\Delta\rho_0^- = \Delta\rho_e^- = -325 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,015$ y $\alpha = 4$ (no se considera variación de densidad en la inversión). Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 250 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en *mGal*.

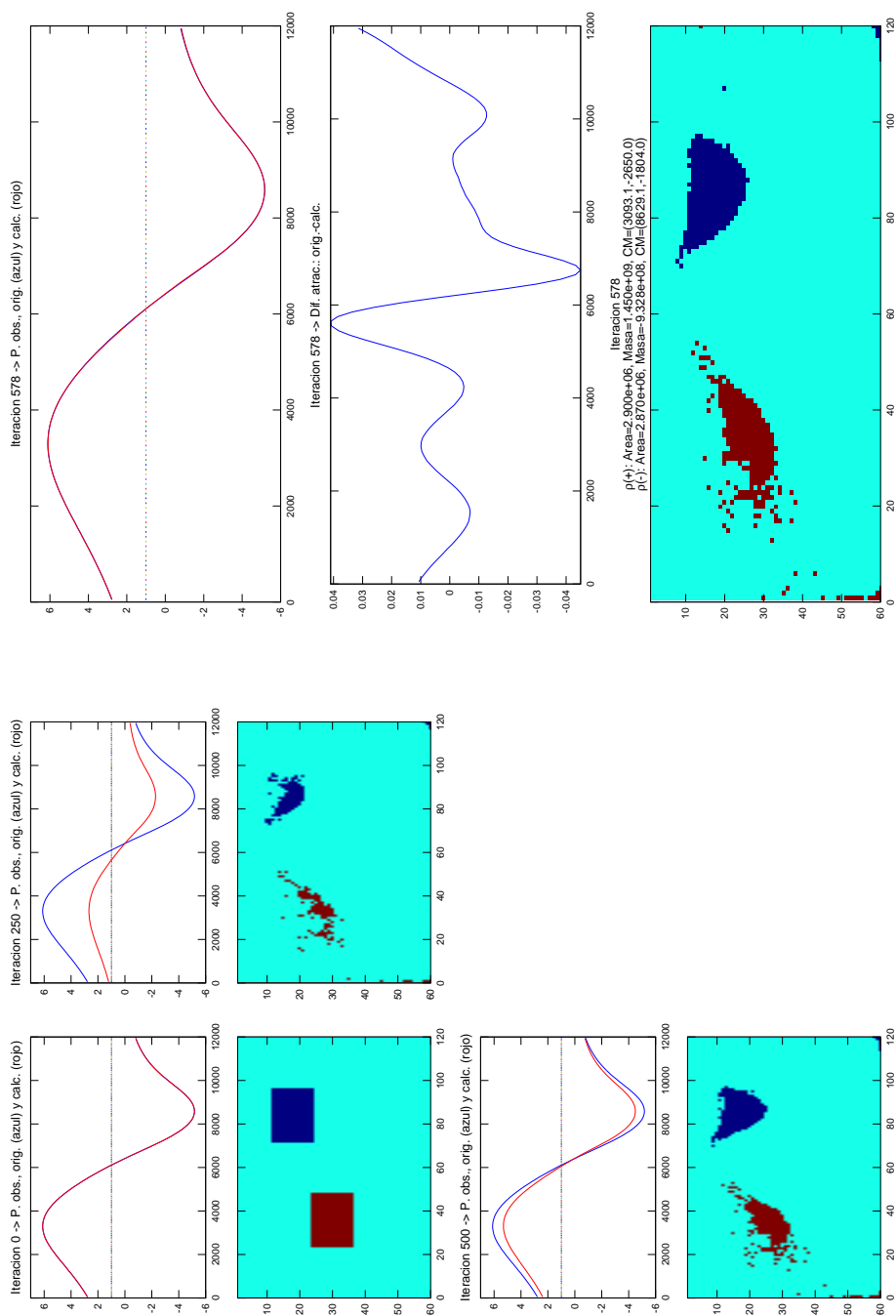


Figura 3.5: Cuarta prueba. Inversión de modelo de secciones de prisma rectangular. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_0^+ = \Delta\rho_c^+ = 500 \text{ kg/m}^3$ y $\Delta\rho_0^- = \Delta\rho_c^- = -325 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,015$ y $\alpha = 1$ (no se considera variación de densidad en la inversión). Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 250 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en *mGal*.

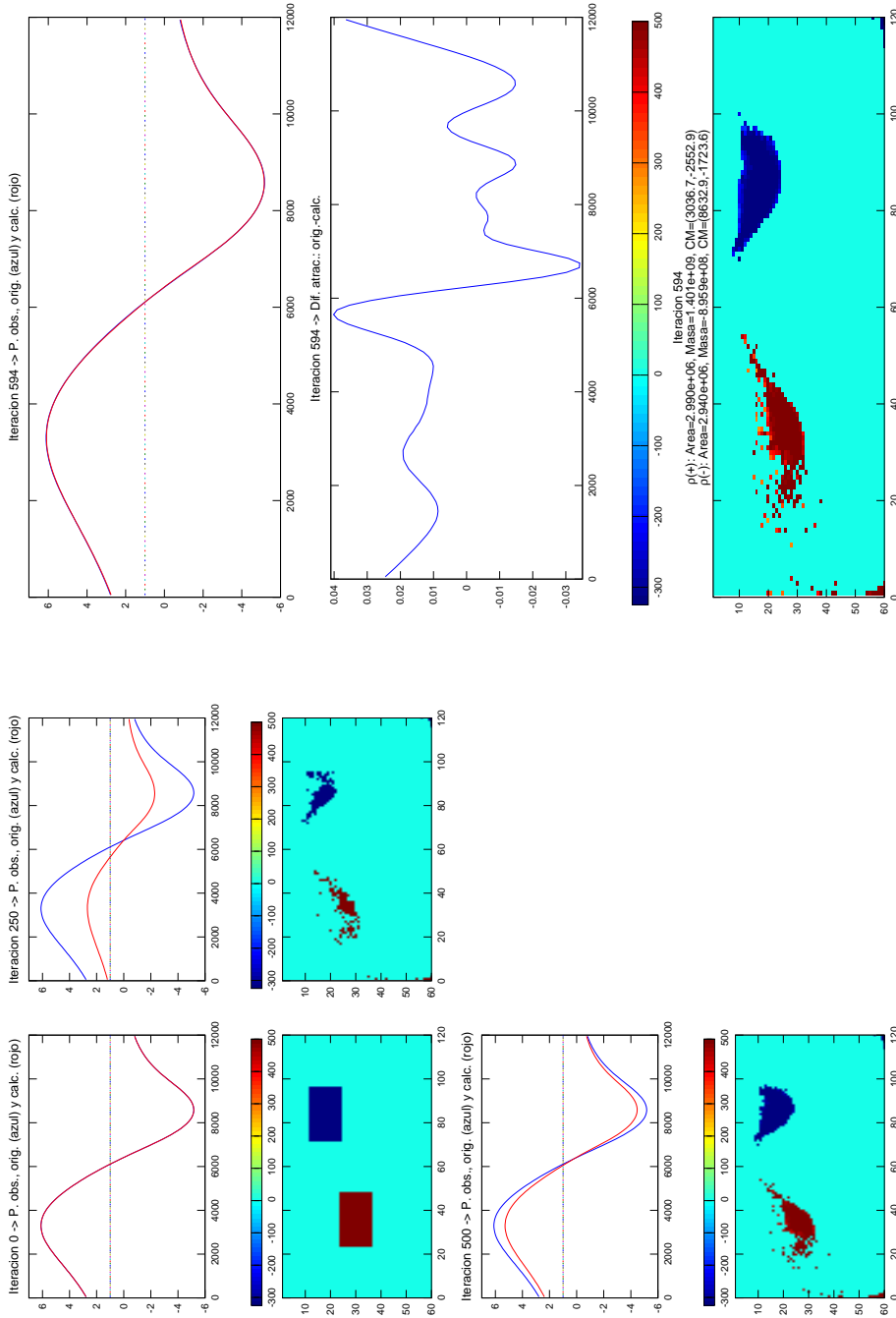


Figura 3.6: Quinta prueba. Inversión de modelo de secciones de prisma rectangular. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_o^+ = \Delta\rho_c^+ = 500 \text{ kg/m}^3$ y $\Delta\rho_o^- = \Delta\rho_c^- = -325 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,001$, $\tau = 8$ y $\alpha = 1$. Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 250 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en $mGal$.

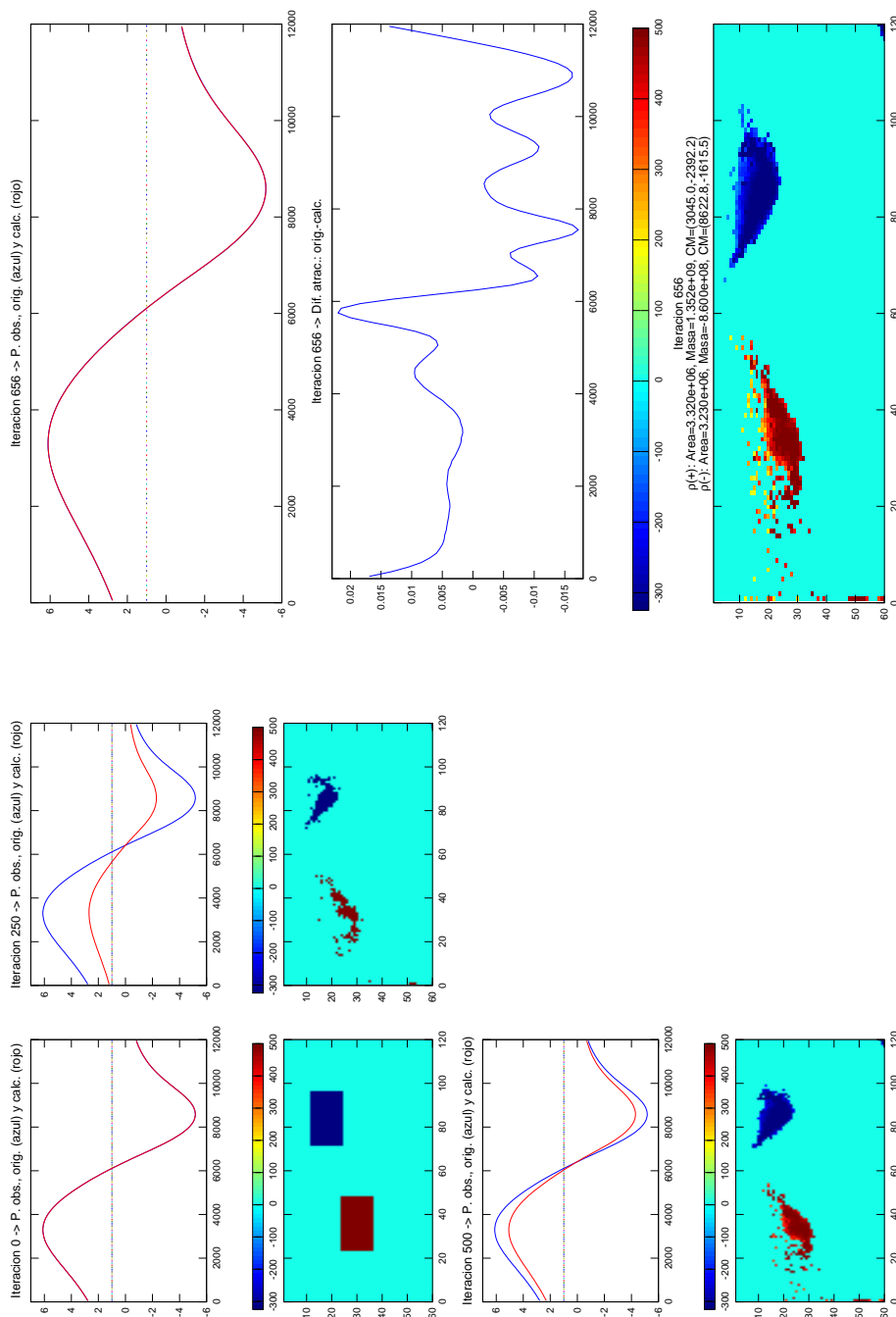


Figura 3.7: Sexta prueba. Inversión de modelo de secciones de prisma rectangular. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_c^+ = \Delta\rho_c^+ = 500 \text{ kg/m}^3$ y $\Delta\rho_c^- = \Delta\rho_c^- = -325 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,0015$, $\tau = 4$ y $\alpha = 1$. Izquierda: modelo original y evolución del proceso de inversión a intervalos de 250 iteraciones. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada. Valores de gravedad en $mGal$.

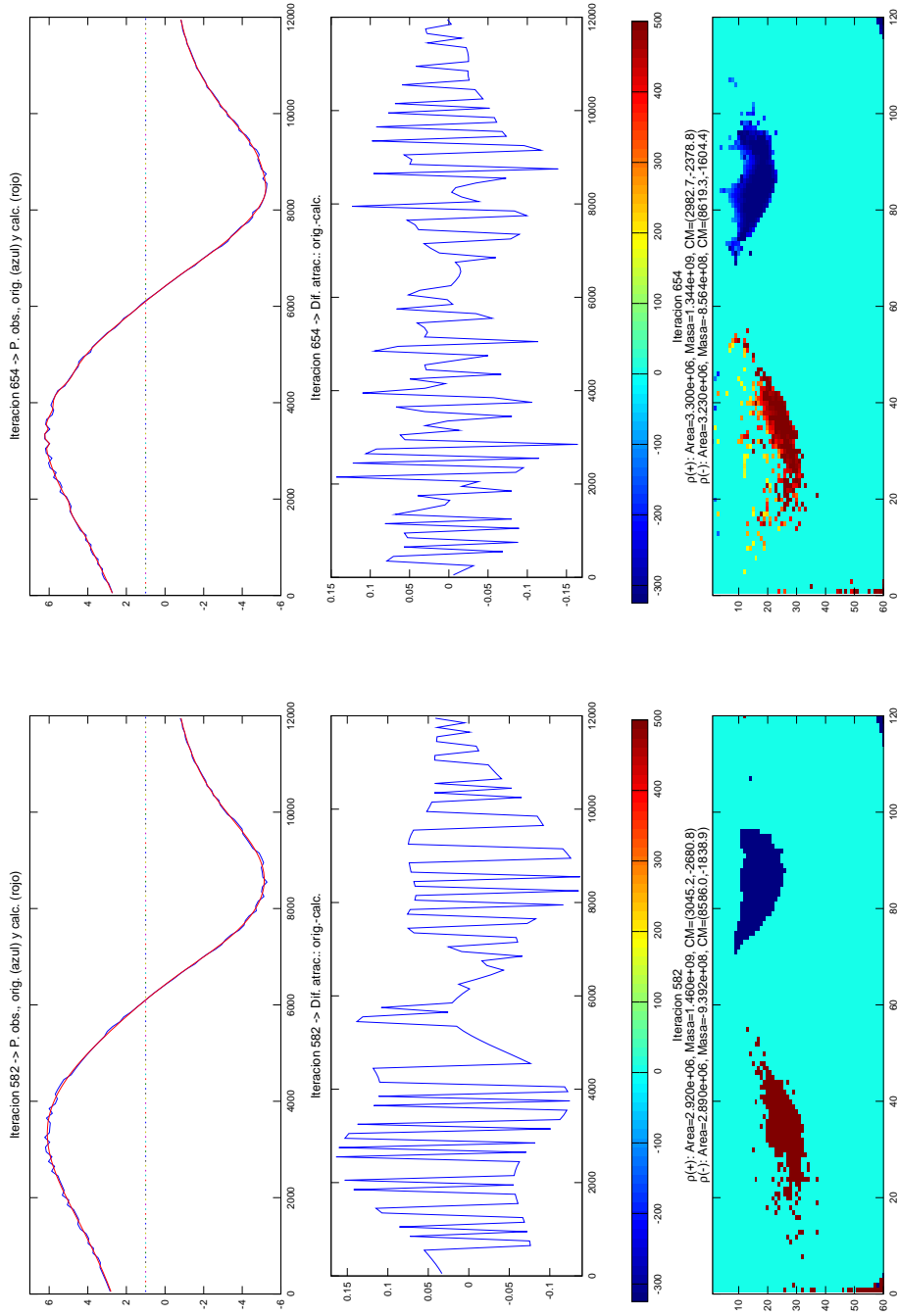


Figura 3.8: Séptima prueba. Inversión de modelo de secciones de prisma rectangular. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_0^+ = \Delta\rho_c^+ = 500 \text{ kg/m}^3$ y $\Delta\rho_0^- = \Delta\rho_c^- = -325 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,0015$, y $\alpha = 1$. Izquierda: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada sin variación de densidad en la inversión. Derecha: resultado final y diferencia entre la atracción original y estimada con $\tau = 4$. Valores de gravedad en *mGal*.

Inversión en cuencas sedimentarias

4.1. Introducción

Se presentan varios métodos de interpretación gravimétrica para estimar el relieve del límite de separación entre dos medios de distinta densidad, planteamiento correspondiente al tipo de estructura que se puede encontrar en una cuenca sedimentaria.

Todos los métodos estudiados, excepto dos, se basan en la discretización del subsuelo en una serie de prismas rectangulares, siendo alguno de los atributos de estos prismas (profundidad de su cara inferior, densidad) la incógnita del problema.

El tratamiento de un problema mal condicionado, como es el que nos ocupa, hace necesaria la introducción de constreñimientos para la obtención de una solución estable. Mediante estos constreñimientos, además de lograr la estabilidad numérica del método de resolución, se intenta introducir información plausible acerca de las características geológicas de la zona de trabajo.

Los distintos métodos propuestos pueden ser utilizados en entornos en dos y/o tres dimensiones y consideran la densidad de la capa de sedimentos constante en unos casos y variable con la profundidad en otros. En el caso de trabajar con un criterio de densidad variable, la función de variación se escoge de tal forma que exista una formulación analítica para expresar la atracción del elemento base de trabajo (el prisma, en nuestro caso) sobre un punto. Por último, se propone un criterio de trabajo para poder utilizar cualquier función de variación de la densidad con la profundidad.

La estimación, a partir de anomalías de la gravedad, de la profundidad de la superficie

de separación entre dos medios de densidades distintas es un problema inverso no lineal. Los métodos para resolver este problema pueden ser divididos en dos grupos: aquéllos que no minimizan una función de estabilización y los que sí lo hacen (mediante la incorporación a la formulación del problema de información a priori acerca de las fuentes perturbadoras).

En la primera categoría entran los trabajos Bott (1960); Cordell y Henderson (1968); Tanner (1967). Todos ellos asumen que el contraste de densidad entre los dos medios, $\Delta\rho$, es conocido y proponen procedimientos iterativos similares a la técnica de ensayo y error. En estos métodos, la solución es obtenida mediante sucesivas aproximaciones lineales a la profundidad de la superficie buscada, no asegurando ni la convergencia del algoritmo ni la estabilidad de la solución.

En los métodos de la segunda categoría se minimiza una función de estabilización, lo que permite la introducción de tipos diferentes de información geológica. En varios de los trabajos aquí estudiados (Barbosa y otros, 1997; Silva y otros, 2006, 2008) se presentan una serie de métodos estables de inversión donde la estabilidad se obtiene mediante la introducción de constreñimientos de igualdad relativa y/o absoluta acerca de la superficie de separación buscada. Los constreñimientos de igualdad relativa imponen a la solución una tendencia (local o global) al suavizamiento. Los de igualdad absoluta imponen constreñimientos en ciertos puntos, en los cuales la profundidad buscada es conocida a priori. Este tipo de constreñimientos permite el trabajo de una forma sencilla con información geológica. En Barbosa y otros (1999) se describe un método en el cual los constreñimientos utilizados no imponen ningún tipo de suavizamiento en la solución, haciendo posible la interpretación de cuencas en las cuales la superficie de contacto con el basamento pueda presentar discontinuidades debidas a fallas u otros accidentes geológicos.

El método gravimétrico es actualmente utilizado para la localización y definición de estructuras indicadoras de existencia de petróleo en cuencas sedimentarias. Algunas interpretaciones asumen un contraste de densidad constante entre los sedimentos y el basamento como, por ejemplo, en Bott (1960). Un modelo de interpretación más elaborado fue presentado en Cordell (1973), el cual permitía la variación del incremento de densidad (disminución) con la profundidad a causa de la compactación. Se asumía un decrecimien-

to exponencial del contraste de densidad con la profundidad. Sin embargo, la variación exponencial no genera una expresión analítica (en el dominio espacial) para la atracción gravitatoria producida por un cuerpo arbitrario (por simple que sea su forma). En el dominio de las frecuencias sí ha sido presentada una formulación para tal caso (Chai y Hinze, 1988). En Murthy y Rao (1979) se desarrollan expresiones para el caso de una variación lineal de la densidad con la profundidad. El método tiene la ventaja de ser analítico, pero el decrecimiento lineal del contraste de densidad sólo es realista en las partes superficiales, puesto que el decrecimiento del volumen por compactación es limitado. En Litinsky (1989); Rao y otros (1994); Rao (1986) se establecen expresiones analíticas para la anomalía de la gravedad producida por fuentes que siguen variaciones cuadrática, hiperbólica y parabólica del contraste de densidad con la profundidad, las cuales son más realistas en su aplicación a cuencas sedimentarias.

4.2. Métodos de inversion

4.2.1. Planteamiento general del problema

Se presenta el modelo utilizado en la aproximación de la cuenca de trabajo en las publicaciones estudiadas. Los casos que no se ajusten a este modelo general serán presentados de forma individual en cada apartado correspondiente. Por homogeneidad y facilidad en la exposición se ha decidido trabajar con un modelo bidimensional, siendo la extensión al modelo 3D sencilla en los casos que sea necesario (Barbosa y otros, 1997; Chakravarthi y Sundararajan, 2007).

Sea un vector N -dimensional que almacena las anomalías gravimétricas observadas, producidas por una cuenca sedimentaria. Consideramos que:

1. La cuenca tiene dimensión infinita en la dirección del eje y , con lo que podemos aproximar el problema original por uno en 2 dimensiones.
2. La cuenca puede ser aproximada por un modelo consistente en un conjunto de M prismas verticales adyacentes.

3. El contraste de densidad de los sedimentos con respecto al basamento puede ser constante o bien decrecer con la profundidad, siguiendo una ley dada a priori.

La parte superior de cada prisma es coincidente con la superficie del terreno y todos los prismas tendrán, por simplicidad, la misma dimensión horizontal. También por simplicidad, supondremos que los datos han sido observados a lo largo de un perfil paralelo a la dirección definida por el eje x y que las profundidades se consideran números positivos. No es necesario que los puntos observados se encuentren equiespaciados. Puede verse una representación esquemática del modelo en la Figura 4.1 (Silva y otros, 2006, 2008).

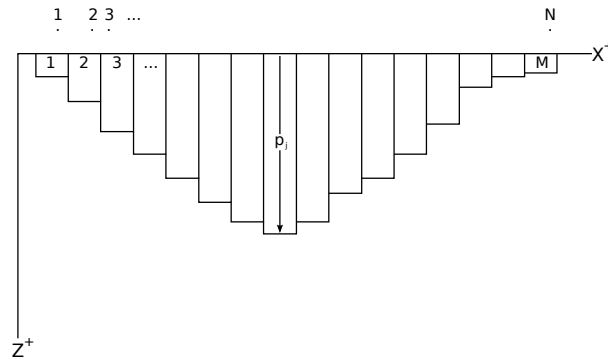


Figura 4.1: Espacio modelo dividido en M prismas de profundidad p y conjunto de N puntos observados.

Los parámetros a estimar (el grosor de los prismas) se relacionan con el campo gravitatorio anómalo observado mediante la relación:

$$g_i = \sum_{j=1}^M F(r_i, p_j), \quad (4.1)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$ y donde $F(r_i, p_j)$ es una función no lineal (Barbosa y Silva, 1994; Telford y otros, 1976) que relaciona la i -ésima observación de gravedad con el j -ésimo parámetro (p_j , grosor del prisma) del modelo calculado y r_i es el vector de posición de la i -ésima observación en el espacio xz . El término g_i define el i -ésimo elemento del vector $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{p}) = \{g_1, g_2, \dots, g_N\}^T$, que contiene la anomalía calculada, donde $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}^T$ es el vector de parámetros a estimar.

Puede verse la expresión para $F(r_i, p_j)$, considerando constante la densidad del prisma, en el apartado 4.3.1.

4.2.2. Inversión con constreñimientos relativos y absolutos

Esta es la aproximación seguida en las referencias Barbosa y otros (1997); Silva y otros (2006, 2008). Salvo pequeñas diferencias, que serán explicadas más adelante, en los tres artículos se expone el mismo método.

El problema inverso no lineal de la estimación de $\mathbf{p} \in R^M$ a partir de \mathbf{g} puede ser formulado como un problema de optimización donde hay que minimizar la función

$$\phi^g(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}\|^2, \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{g}^0 = \{g_1^0, g_2^0, \dots, g_N^0\}^T$ es un vector que contiene las observaciones y $\|\cdot\|$ es la norma euclídea (Barbosa y otros, 1997; Silva y otros, 2006, 2008). Este problema, sin embargo, es mal condicionado porque su solución es inestable. Para convertirlo en un problema bien condicionado se introducen dos tipos de constreñimientos: relativos y absolutos (Medeiros y Silva, 1995). Los constreñimientos relativos establecen relaciones lineales entre elementos del vector de parámetros. La suavidad espacial de los parámetros es un ejemplo de este tipo de constreñimiento: se impone la característica de que los parámetros adyacentes (el grosor de los prismas contiguos) deben ser similares unos a otros. Los constreñimientos absolutos imponen que algunos elementos (o todos) del vector de parámetros sean similares a unos valores numéricos conocidos a priori como, por ejemplo, datos obtenidos de sondeos. Los constreñimientos relativos y absolutos se introducen, en Barbosa y otros (1997), mediante la minimización, respectivamente, de las funciones

$$\phi^r(\mathbf{p}) = \frac{1}{L} \|R\mathbf{p}\|^2, \quad (4.3)$$

y

$$\phi^a(\mathbf{p}) = \frac{1}{H} \|A\mathbf{p} - \mathbf{h}^0\|^2. \quad (4.4)$$

R es una matriz $L \times M$, cuyas filas permiten el establecimiento de L relaciones lineales entre pares de parámetros. Por ejemplo, si disponemos de información a priori que dice que el i -ésimo parámetro es dos veces superior que el j -ésimo, la fila correspondiente a este constreñimiento en la matriz R estará formada por ceros, excepto en las posiciones i y j , que contendrán los valores 1 y -2 , respectivamente. Como resultado, el producto

$R\mathbf{p}$ expresará la relación $p_i - 2p_j \approx 0$, correspondiente a la información disponible a priori. Por otro lado, A es una matriz $H \times M$ (con $H \leq M$), que fuerza a H parámetros a ser aproximados a H valores conocidos a priori, almacenados en \mathbf{h}^0 . Por ejemplo, si disponemos de información que dice que el i -ésimo parámetro tiene un valor aproximado de 500, la fila correspondiente de A estará formada por ceros, excepto en la posición i , en la que almacenará el valor 1. De la misma manera, el elemento i -ésimo del vector \mathbf{h}^0 valdrá 500, de forma que la expresión $A\mathbf{p} - \mathbf{h}^0$ exprese el constreñimiento $p_i - 500 \approx 0$. Conviene señalar que ambos tipos de constreñimientos son aproximados, esto es, a lo largo del proceso de inversión serán forzados a cumplirse en el sentido mínimo cuadrático (Barbosa y otros, 1997; Silva y otros, 2006, 2008).

En Silva y otros (2006, 2008) sólo se utilizan constreñimientos relativos y $\phi^r(\mathbf{p})$ responde a una formulación ligeramente diferente a la expuesta en la ecuación (4.3) (Barbosa y otros, 1997):

$$\phi^r(\mathbf{p}) = \frac{1}{M-1} \|R\mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} (p_j - p_{j+1})^2, \quad (4.5)$$

donde R es una matriz $M-1 \times M$ que, para cada par de parámetros $(j, j+1)$, contiene en la fila correspondiente un 1 en la posición j y un -1 en la posición $j+1$, siendo 0 el resto de los elementos.

El problema inverso estabilizado queda definido, por lo tanto, como la minimización de $\phi^r(\mathbf{p})$ y $\phi^a(\mathbf{p})$ con la condición $\phi^g(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}) = \delta$, donde δ es un valor relacionado con el nivel de ruido de los datos. Para resolver este problema se emplea el método de los multiplicadores de Lagrange (Barbosa y otros, 1997), a fin de minimizar la función

$$\phi(\mathbf{p}) = \mu^r \phi^r(\mathbf{p}) + \mu^a \phi^a(\mathbf{p}) + \phi^g(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}), \quad (4.6)$$

donde μ^r y μ^a son los multiplicadores de Lagrange¹.

En Silva y otros (2006, 2008) se considera un contexto de densidad variable, asumiendo que el contraste de densidad $\Delta\rho$ entre el basamento y los sedimentos decrece con la

¹En la versión de Silva y otros (2006, 2008), donde sólo se utilizan constreñimientos relativos, la función a minimizar será $\phi(\mathbf{p}) = \mu^r \phi^r(\mathbf{p}) + \phi^g(\mathbf{g}^0, \mathbf{g})$.

profundidad de acuerdo a la ley hiperbólica (Litinsky, 1989)

$$\Delta\rho(z) = \frac{\Delta\rho_0\beta^2}{(\beta+z)^2}, \quad (4.7)$$

donde $\Delta\rho_0$ es el contraste de densidad en la superficie y β es un factor, expresado en unidades de longitud, que controla la disminución del contraste de densidad con la profundidad.

La expresión de $F(r_i, p_j)$ al considerar una variación del contraste de densidad que siga la ley expuesta en la ecuación (4.7) puede verse en Litinsky (1989).

La minimización de la función $\phi(\mathbf{p})$ con respecto a \mathbf{p} es un problema no lineal que se resuelve de forma iterativa por el método de Newton (Barbosa y otros, 1997). Desarrollando (trabajaremos con constreñimientos relativos y absolutos) $\phi(\mathbf{p})$ en serie de Taylor tenemos que, en el paso k del proceso

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{p}_k + \Delta\mathbf{p}_k) = & \mu^r \left[\phi^r(\mathbf{p}_k) + \Delta\mathbf{p}_k^T \mathbf{J}_k^r + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^r \Delta\mathbf{p}_k \right] + \\ & \mu^a \left[\phi^a(\mathbf{p}_k) + \Delta\mathbf{p}_k^T \mathbf{J}_k^a + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^a \Delta\mathbf{p}_k \right] + \\ & \left[\phi^g(\mathbf{p}_k) + \Delta\mathbf{p}_k^T \mathbf{J}_k^g + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^g \Delta\mathbf{p}_k \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

$$\mathbf{J}_k^r = \nabla_{\mathbf{p}} \{ \phi^r(\mathbf{p}) \}_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{J}_k^a = \nabla_{\mathbf{p}} \{ \phi^a(\mathbf{p}) \}_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k} \quad (4.10)$$

y

$$\mathbf{J}_k^g = \nabla_{\mathbf{p}} \{ \phi^a[\mathbf{g}^0, \mathbf{g}(\mathbf{p})] \}_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k} \quad (4.11)$$

son vectores gradiente² evaluados en el punto $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k$ y

$$H^r = \nabla_{\mathbf{p}} \nabla_{\mathbf{p}}^T \{ \phi^r(\mathbf{p}) \}, \quad (4.12)$$

$$H^a = \nabla_{\mathbf{p}} \nabla_{\mathbf{p}}^T \{ \phi^a(\mathbf{p}) \} \quad (4.13)$$

² ∇_p es un vector de M elementos, cada uno de ellos definido como $\frac{\partial}{\partial p_j}$, con $j = 1, 2, \dots, M$. (Barbosa y otros, 1997)

y

$$H_k^g = \nabla_{\mathbf{p}} \nabla_{\mathbf{p}}^T \{ \phi^a [\mathbf{g}^0, \mathbf{g}(\mathbf{p})] \}_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_k} \quad (4.14)$$

son matrices hessianas (Barbosa y otros, 1997). Nótese que las matrices H^r y H^a son constantes a lo largo del proceso iterativo, ya que las matrices R y A y el vector \mathbf{h}^0 son independientes del vector de parámetros \mathbf{p} .

Un estimador para la perturbación $\Delta\mathbf{p}_k$ el cual, cuando se añade a la aproximación \mathbf{p}_k produce la aproximación \mathbf{p}_{k+1} , puede ser obtenido por diferenciación de la función $\phi(\mathbf{p}_k + \Delta\mathbf{p}_k)$ con respecto a $\Delta\mathbf{p}_k$ e igualando el resultado a 0 (Barbosa y otros, 1997). Esto conducirá a un sistema lineal de M ecuaciones con M incógnitas en la forma

$$(\mu^r H^r + \mu^a H^a + H_k^g) \Delta\mathbf{p}_k = (\mu^r \mathbf{J}_k^r + \mu^a \mathbf{J}_k^a + \mathbf{J}_k^g). \quad (4.15)$$

que podrá resolverse como

$$\Delta\mathbf{p}_k = -(\mu^r H^r + \mu^a H^a + H_k^g)^{-1} (\mu^r \mathbf{J}_k^r + \mu^a \mathbf{J}_k^a + \mathbf{J}_k^g). \quad (4.16)$$

El método de Newton es simple y eficiente, presentando una convergencia cuadrática si se comienza con una aproximación lo suficientemente buena (Barbosa y otros, 1997). Sin embargo, presenta el inconveniente de la necesidad de que la suma de las matrices hessianas, $\mu^r H^r + \mu^a H^a + H_k^g$, sea una matriz definida positiva. En efecto, este requerimiento se deduce a partir de la «condición de aceptabilidad» (Bard, 1974). Cuando una función no puede ser correctamente aproximada por una función de segundo orden, la hessiana de esta función aproximada puede no ser definida positiva. En este caso, el método de Newton puede volverse inestable (Bard, 1974).

Para superar esta dificultad se aplica el método de Marquardt (Madsen y otros, 2004; Marquardt, 1963; Nielsen, 1999), que consiste en la adición a la matriz hessiana total de la ecuación (4.16) de una matriz diagonal, cuyos elementos son iguales a un factor positivo λ (conocido como parámetro de Marquardt). Para un valor lo suficientemente grande de λ , la matriz hessiana modificada se convierte en definida positiva. El parámetro λ se modifica a lo largo del proceso iterativo. Generalmente, se comienza con un valor grande (en Madsen y otros (2004) se sugiere que un buen valor de partida para λ puede ser el mayor elemento en valor absoluto de la diagonal de la matriz hessiana) porque en las

primeras iteraciones la aproximación a la solución está lejos del mínimo de la función y la matriz hessiana en esas regiones tiende a no ser definida positiva. A medida que \mathbf{p}_k se aproxima al mínimo, la matriz hessiana se vuelve definida positiva y mejor condicionada, por lo que es suficiente con un valor de λ más pequeño. Esta modificación da lugar a la expresión

$$\Delta \mathbf{p}_k = -(\mu^r H^r + \mu^a H^a + H_k^g + \lambda I)^{-1} (\mu^r \mathbf{J}_k^r + \mu^a \mathbf{J}_k^a + \mathbf{J}_k^g), \quad (4.17)$$

que es la formulación utilizada.

El proceso iterativo se detendrá cuando se verifique la desigualdad (Barbosa y otros, 1997)

$$\left| \frac{\phi(\mathbf{p}_k) - \phi(\mathbf{p}_{k-1})}{\phi(\mathbf{p}_k)} \right| \leq \varepsilon, \quad (4.18)$$

donde ε es el valor de parada (en Barbosa y otros (1997) se utiliza 0,1). Nótese que el criterio de parada está relacionado con la función $\phi(\mathbf{p})$, que incluye tanto el ajuste de las observaciones como los constreñimientos.

4.2.2.1. Estimación de los parámetros de balance

Los factores μ^r y μ^a expresan, respectivamente, la influencia relativa de $\phi^r(\mathbf{p})$ y $\phi^a(\mathbf{p})$ con respecto a $\phi^g(\mathbf{p})$, esto es, μ^r y μ^a representan la confianza que el intérprete tiene en los constreñimientos impuestos a priori. En Barbosa y otros (1997); Silva y otros (2006, 2008) se siguen diferentes criterios para la determinación de estos parámetros.

En Barbosa y otros (1997) se indica que el intérprete debe seleccionar aquellos valores de μ^r y μ^a que produzcan la más alta relación μ^a/μ^r y que, además, cumplan con ciertos requisitos como:

1. Las observaciones han de ser explicadas en el entorno de sus errores.
2. La solución ha de ser estable.
3. La solución no debe presentar inestabilidades alrededor de los puntos asociados con constreñimientos absolutos. Su presencia indica un conflicto entre los constreñimientos absolutos y relativos.

Mientras, en Silva y otros (2006, 2008) se adopta el siguiente procedimiento práctico para obtener una solución estable:

1. Se asigna a μ^r un valor lo suficientemente pequeño como para que se produzcan soluciones no estables.
2. Se contaminan las observaciones con diferentes secuencias de números pseudoaleatorios y se resuelve el problema para cada secuencia³.
3. Se aumenta el valor de μ^r .
4. Se selecciona el valor de μ^r más pequeño, tal que las soluciones obtenidas para cada secuencia contaminante sean lo más parecidas unas a otras

Esta forma de elegir μ^r permite la obtención de una solución estable en la que los constreñimientos a priori tengan una influencia mínima, es decir, la justa para convertir el problema original en bien condicionado. Hay que recalcar que, una vez que el valor óptimo de μ^r ha sido determinado, todos los cálculos sucesivos se realizarán utilizando los valores originales observados, sin ninguna adición de ruido.

4.2.2.2. Resultados

En Barbosa y otros (1997) se presentan varios ejemplos de inversión (tres sintéticos y uno real) en un entorno tridimensional, en los cuales se considera un contraste de densidad uniforme para los sedimentos. Las notas más relevantes que conviene destacar de estos ejemplos son:

1. Como punto de partida para el proceso iterativo se puede utilizar un modelo cuya profundidad corresponda en cada punto a la correspondiente a la de una lámina de Bouguer que genere una anomalía igual a la observada:

$$p_j = \frac{g_j^0}{2\gamma\pi\Delta\rho}, \quad (4.19)$$

³ En Silva y otros (2006, 2008) no se menciona la magnitud aproximada que ha de tener el vector de números aleatorios con que se han de contaminar las observaciones.

siendo γ es la constante de gravitación universal donde, utilizando unidades del SI en todas las variables, se obtienen profundidades en metros. Si los puntos observados no están situados sobre los centros de los prismas habrá que interpolar la anomalía observada para realizar este cálculo.

2. El error obtenido en la estimación de la superficie de contacto entre los sedimentos y el basamento está en torno al 7% con respecto a la amplitud máxima de las profundidades, aunque hay zonas donde se alcanza el 18%.
3. Los constreñimientos absolutos son útiles cuando están situados en los puntos de profundidad máxima, ya que este parámetro es difícil de obtener sólo con los datos de gravedad.

En Silva y otros (2006, 2008) se trabaja con modelos bidimensionales y con contrastes de densidad variables (disminuyen con la profundidad). La principal conclusión que se puede obtener es el hecho de que, si se trabaja con un modelo de variación del contraste de densidad que haga que este disminuya demasiado rápido, al ser el contraste del fondo de la cuenca demasiado próximo a 0, la anomalía de la gravedad producida por esta zona estará cercana al nivel de ruido, lo que resultará en una pobre estimación de las profundidades.

4.2.3. Inversión sin constreñimientos

En Chakravarthi y Sundararajan (2007) se presenta un método de inversión tridimensional que considera el contraste de densidad variable con la profundidad. En este caso, además de la estimación del relieve del fondo de la cuenca, también se calcula una posible tendencia regional en las anomalías observadas, que puede responder a una ecuación polinómica de segundo grado o a un modelo bilineal.

La variación del contraste de densidad con la profundidad responde aquí a una ley parabólica (Chakravarthi, 1995; Chakravarthi y otros, 2002; Chakravarthi y Sundararajan, 2004, 2005, 2006):

$$\Delta\rho(z) = \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 - \alpha z)^2}, \quad (4.20)$$

donde $\Delta\rho_0$ es el contraste de densidad en la superficie y α es una constante de variación, expresada en $kg \cdot m^{-3} \cdot km^{-1}$.

En este método, la zona de trabajo se subdivide en $NX \times NY$ prismas, siendo su profundidad los parámetros a estimar. Los puntos observados han de estar dispuestos de tal forma que haya uno por cada prisma, tal y como puede verse en el ejemplo esquemático del modelo en la Figura 4.2.

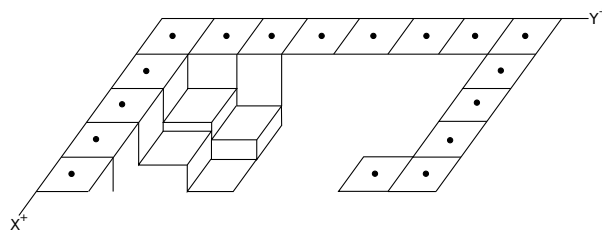


Figura 4.2: Espacio modelo dividido en $NX \times NY$ prismas y conjunto de puntos observados.

A todos los prismas de la periferia se les asigna profundidad 0, con lo que no entran como incógnitas, quedándonos solamente con $NX - 2 \times NY - 2$ profundidades a calcular. Con estos datos, y considerando que existe una tendencia regional en las anomalías observadas que se puede modelar mediante un polinomio de segundo grado, la atracción del modelo sobre un punto se expresa como

$$g_i = \sum_{n=2}^{NY-1} \sum_{m=2}^{NX-1} G(r_i, p_{m,n}) + Ax_i^2 + By_i^2 + Cx_i y_i + Dx_i + Ey_i + F, \quad (4.21)$$

con $i = 1, 2, \dots, NX \times NY$ y donde $G(r_i, p_{m,n})$ es la función⁴ que relaciona la i -ésima observación de gravedad con el (m, n) -ésimo parámetro ($p_{m,n}$, grosor del prisma) del modelo calculado, r_i es el vector de posición de la i -ésima observación y los coeficientes A, B, C, D, E y F corresponden al polinomio que modela la tendencia regional, aunque también puede utilizarse la función bilineal $Dx_i + Ey_i + F$.

Suponiendo una buena aproximación inicial a la superficie de separación buscada, la diferencia entre la atracción observada y calculada en cada punto del terreno puede

⁴Su desarrollo puede encontrarse en Chakravarthi y otros (2002); Chakravarthi y Sundararajan (2007), aunque en el apartado 4.3.3 se dará otra alternativa.

expresarse como

$$g_i^0 - g_i = \sum_{n=2}^{NY-1} \sum_{m=2}^{NX-1} \frac{\partial G_{i,m,n}}{\partial p_{m,n}} dp_{m,n} + x_i^2 dA + y_i^2 dB + x_i y_i dC + x_i dD + y_i dE + dF. \quad (4.22)$$

Llegados a este punto, y con el fin de minimizar la función $\phi = \|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}\|^2$, podemos formular un sistema de $NX - 2 \times NY - 2 + 6$ incógnitas, en el que se han empleado $NX \times NY$ observaciones y que se resuelve de forma iterativa empleando la técnica de Marquardt (Chakravarthi y Sundararajan, 2007). En este caso no se aplica ningún tipo de constreñimiento, ni relativo ni absoluto, a menos que se entienda como constreñimiento absoluto el haber fijado la profundidad de los prismas de la periferia a 0. El modelo de partida también, como en los casos anteriores, se deduce a partir de la anomalía de Bouguer que, en este caso, considerando la variación del contraste de densidad con la profundidad, presenta la siguiente formulación (Chakravarthi y Sundararajan, 2007):

$$z(m, n) = \frac{g_{(m,n)}^0 \Delta \rho_0}{41,89 \Delta \rho_0^2 + \alpha g_{(m,n)}^0}, \quad (4.23)$$

donde los valores de gravedad han de ser introducidos en $mGal$, los de densidad en $g \cdot cm^{-3}$ y el parámetro α en $g \cdot cm^{-3} \cdot km$. Para trabajar con las unidades del SI no hay más que sustituir la constante 41,89 por el valor resultante de $2\pi\gamma$, siendo γ la constante de gravitación universal en unidades del SI.

4.2.3.1. Resultados

En Chakravarthi y Sundararajan (2007) se hacen diversas pruebas con modelos sintéticos y reales. También se prueban diferentes modelos de tendencia regional y se realizan inversiones con y sin ruido en las observaciones. Las principales conclusiones son:

1. El error obtenido en las profundidades, en los ejemplos sintéticos, está entre el 6% y el 12% en los puntos de profundidad máxima, mientras que los parámetros de la tendencia regional se estiman de manera casi exacta: para unos coeficientes de valores $A = 0,0210$, $B = 0,0049$, $C = 0,0100$, $D = 0,1498$, $E = 0,0724$ y $F = 0,9980$

se obtienen unas estimaciones de $A = 0,0256$, $B = 0,0060$, $C = 0,0111$, $D = 0,1722$, $E = 0,0844$ y $F = 1,2210$.

2. El error obtenido en las profundidades en los ejemplos reales oscila entre un 7% y el 14% con respecto a profundidades obtenidas de sondeos.
3. El método no es sensible a la distinción entre una tendencia regional modelada por un polinomio de segundo grado y una aproximación bilineal (ecuación $Dx + Ey + F$). Además, en ausencia de información geológica real, esta modelización no deja de ser arbitraria.

4.2.4. Aproximación de la cuenca sedimentaria por un polígono de un número arbitrario de lados

En Chakravarthi y otros (2001) se presenta un método bidimensional basado en la aproximación de la cuenca sedimentaria en estudio mediante un polígono de un número arbitrario de lados. También se considera que el contraste de densidad varía con la profundidad, siguiendo la ley parabólica de la ecuación (4.20).

En la Figura 4.3 puede verse un esquema de los parámetros intervinientes en el cálculo de la atracción de un polígono de un número arbitrario de lados sobre un punto situado en el origen de coordenadas. La formulación de la atracción sobre el punto considerando que el polígono tiene una densidad variable con la profundidad, extraída de Chakravarthi y otros (2001), puede verse en el apartado 4.3.4.

El método de interpretación se basa en la generación de un polígono cuya cara superior coincida con la superficie del terreno y que tenga un vértice por cada uno de los M puntos donde se hayan hecho observaciones. La coordenada x de cada vértice será la correspondiente a cada punto, mientras que la coordenada z será la incógnita a resolver. Como puede verse en la sección 4.3.4, ecuación (4.53), la atracción en cada punto depende de las coordenadas de todos los vértices por lo que, considerando las diferencias entre los valores observados y los calculados para un polígono lo suficientemente aproximado a la

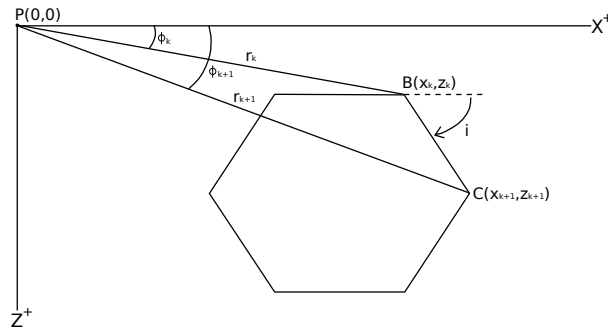


Figura 4.3: Situación de un polígono con un número arbitrario de lados con respecto al punto atraído.

cuenca de trabajo obtenemos

$$g_i^0 - g_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_i}{\partial z_j} dz_j, \tag{4.24}$$

con $i = 1, 2, \dots, M = N$, expresión a partir de la cual se construirá un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas que, resuelto utilizando el método de Marquardt (Chakravarthi y otros, 2001), conducirá a la minimización de la función

$$\phi = \|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}\|^2. \tag{4.25}$$

Mediante un proceso iterativo se irán refinando las coordenadas z de cada vértice del polígono hasta que la función ϕ tome un valor lo suficientemente pequeño, momento en el que el proceso terminará.

En la Figura 4.4 se muestra un esquema del polígono de aproximación de la cuenca de trabajo en un paso arbitrario k del proceso iterativo.

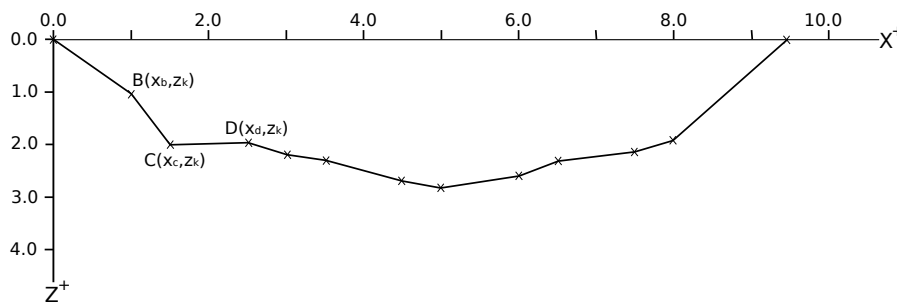


Figura 4.4: Aproximación de una cuenca sedimentaria por un polígono de N lados.

Aunque las derivadas de la ecuación (4.24) pueden calcularse utilizando las expresiones analíticas adecuadas, en Chakravarthi y otros (2001) se opta por su cálculo de forma numérica.

4.2.5. Aproximación de la cuenca sedimentaria por una figura trapezoidal

En Rao (1990) se presenta un método bidimensional de inversión que se basa en la aproximación de la cuenca sedimentaria en estudio mediante un trapecio asimétrico, cuya densidad se considera variable con la profundidad Z de acuerdo a la ecuación cuadrática

$$\Delta\rho(Z) = a_0 + a_1Z + a_2Z^2, \quad (4.26)$$

donde el coeficiente a_0 representa la densidad en la superficie del terreno. Estos coeficientes pueden ser estimados mediante un ajuste por mínimos cuadrados a partir de datos obtenidos de sondeos (Rao, 1990).

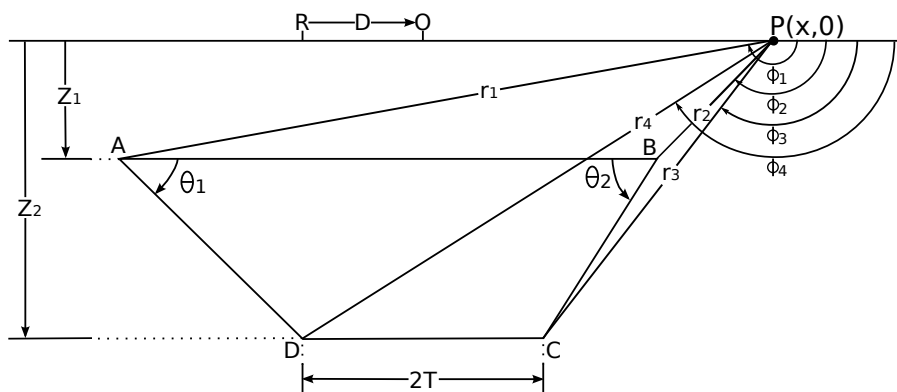


Figura 4.5: Aproximación de una cuenca sedimentaria por una figura trapezoidal.

En la Figura 4.5 se representa de forma esquemática la situación, donde el trapecioide tiene por vértices los puntos A, B, C y D , y el origen de coordenadas se sitúa en un punto del terreno sobre la vertical del punto medio de la cara inferior del trapecio, CD , distancia que se expresará como $2T$. Las profundidades de las caras superior e inferior del modelo son Z_1 y Z_2 . Puesto que en un trapecioide asimétrico el mínimo (o máximo, si se considera un contraste de densidad positivo) de la anomalía generada no se encuentra

en la vertical de su centro, se añade una nueva incógnita D , que es la distancia desde un punto de referencia R al origen O . De esta forma, nos encontramos con que el modelo queda definido por los parámetros $Z_1, Z_2, T, \theta_1, \theta_2$ y D , que serán las incógnitas a estimar en el proceso de inversión. Las expresiones necesarias para el cálculo de la atracción del trapecoide se muestran en el apartado 4.3.5.

Como en el caso de la aproximación de la cuenca mediante un polígono con un número arbitrario de lados, aquí también consideraremos la diferencia entre las atracciones observadas y las calculadas sobre un modelo aproximado como

$$g_i^0 - g_i = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial g_i}{\partial p_j} dp_j, \quad (4.27)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, 6$, y donde N corresponde al número de puntos observados y el vector $\mathbf{p} \equiv \{Z_1, Z_2, T, \theta_1, \theta_2, D\}^T$ almacena las incógnitas. En este caso nos encontraremos con un sistema de N ecuaciones y 6 incógnitas que, con el objetivo de la minimización de la función $\phi = \|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}\|^2$, será resuelto utilizando el algoritmo de Marquardt (Rao, 1990) a partir de una aproximación inicial a la solución.

Dada la complejidad de las expresiones que determinan la atracción del trapecoide con la densidad considerada, que se verán en la sección 4.3.5, en Rao (1990) se realizan las derivadas correspondientes de forma numérica.

4.3. Desarrollo de algunas ecuaciones

En esta sección se detallan algunos desarrollos matemáticos correspondientes a la resolución de los problemas presentados. Se ha decidido hacerlo en una sección aparte para no complicar el desarrollo general de los métodos explicados en las secciones precedentes. Se considerará el trabajo en un entorno bidimensional.

4.3.1. Ajuste con constreñimientos relativos y absolutos

En el ajuste con constreñimientos relativos y absolutos, la función a minimizar responde a la expresión

$$\phi(\mathbf{p}) = \mu^r \phi^r(\mathbf{p}) + \mu^a \phi^a(\mathbf{p}) + \phi^g(\mathbf{g}^0, \mathbf{g}), \quad (4.28)$$

que, desarrollada en serie de Taylor hasta el segundo orden, da (para un paso k en el proceso iterativo)

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{p}_k + \Delta\mathbf{p}_k) = & \mu^r \left[\phi^r(\mathbf{p}_k) + \Delta\mathbf{p}_k^T \mathbf{J}_k^r + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^r \Delta\mathbf{p}_k \right] + \\ & \mu^a \left[\phi^a(\mathbf{p}_k) + \Delta\mathbf{p}_k^T \mathbf{J}_k^a + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^a \Delta\mathbf{p}_k \right] + \\ & \left[\phi^g(\mathbf{p}_k) + \Delta\mathbf{p}_k^T \mathbf{J}_k^g + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^g \Delta\mathbf{p}_k \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para hallar un mínimo de la función se deriva con respecto a $\Delta\mathbf{p}_k$ y se iguala a 0, con lo que se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\mathbf{p}_k + \Delta\mathbf{p}_k)}{\partial \Delta\mathbf{p}_k} = & \mu^r \left[\mathbf{J}_k^{rT} + \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{p}_k^T H_k^{rT} + \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^{rT}) \right] + \\ & \mu^a \left[\mathbf{J}_k^{aT} + \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{p}_k^T H_k^{aT} + \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^{aT}) \right] + \\ & \left[\mathbf{J}_k^{gT} + \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{p}_k^T H_k^{gT} + \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^{gT}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

que, simplificando, conduce a

$$\begin{aligned} \mu^r (\mathbf{J}_k^{rT} + \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^{rT}) + \mu^a (\mathbf{J}_k^{aT} + \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^{aT}) + (\mathbf{J}_k^{gT} + \Delta\mathbf{p}_k^T H_k^{gT}) = \\ \mu^r (\mathbf{J}_k^r + H_k^r \Delta\mathbf{p}_k) + \mu^a (\mathbf{J}_k^a + H_k^a \Delta\mathbf{p}_k) + (\mathbf{J}_k^g + H_k^g \Delta\mathbf{p}_k) = \\ (\mu^r H_k^r + \mu^a H_k^a + H_k^g) \Delta\mathbf{p}_k + \mu^r \mathbf{J}_k^r + \mu^a \mathbf{J}_k^a + \mathbf{J}_k^g = 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

y despejando $\Delta\mathbf{p}_k$

$$\Delta\mathbf{p}_k = -(\mu^r H_k^r + \mu^a H_k^a + H_k^g)^{-1} (\mu^r \mathbf{J}_k^r + \mu^a \mathbf{J}_k^a + \mathbf{J}_k^g). \quad (4.32)$$

Por otro lado, la función ϕ^g se expresa como

$$\phi^g = \phi^g(\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}) = \frac{1}{N} \|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}\|^2, \quad (4.33)$$

que puede desarrollarse en la forma

$$\phi^g(\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(g_i^0 - \sum_{j=1}^M F_{ij} \right)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (g_i^0 - g_i)^2, \quad (4.34)$$

donde la atracción en cada punto observado viene dada por

$$g_i = \sum_{j=1}^M F_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (4.35)$$

4.3.2. Atracción de un prisma de densidad constante

En dos dimensiones, la atracción de un prisma de densidad constante en función de su grosor puede ser derivada a partir de la expresión mostrada en Barbosa y Silva (1994); Telford y otros (1976), donde viene en función de las coordenadas de las esquinas del prisma (ver Figura 4.6).

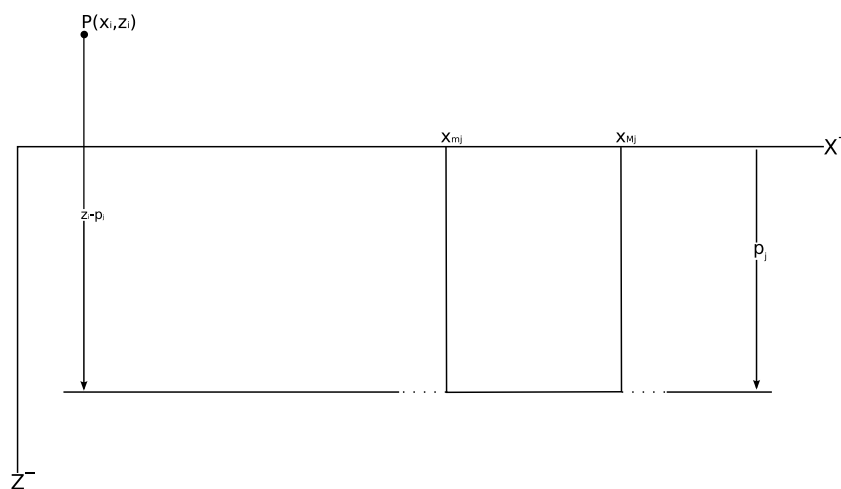


Figura 4.6: Atracción de un prisma en dos dimensiones sobre un punto.

En función de la profundidad, la expresión queda

$$F_{ij} = F(x_i, z_i, x_{mj}, x_{Mj}, p_j) = \gamma \rho_j \left[A \ln \frac{A^2 + D^2}{A^2 + C^2} - B \ln \frac{B^2 + D^2}{B^2 + C^2} + 2D \left(\arctan \frac{A}{D} - \arctan \frac{B}{D} \right) - 2C \left(\arctan \frac{A}{C} - \arctan \frac{B}{C} \right) \right], \quad (4.36)$$

$$\text{con } \begin{cases} A = x_i - x_{mj}, \\ B = x_i - x_{Mj}, \\ C = z_i, \\ D = z_i - p_j, \end{cases}$$

donde γ es la constante de gravitación universal, (x_i, z_i) son las coordenadas del punto de observación, (x_{mj}, x_{Mj}) son las coordenadas x mínima y máxima que definen los límites del prisma, p_j su profundidad y ρ_j la densidad considerada. La coordenada z del punto atraído ha de venir dada como número positivo, mientras que la profundidad será un valor negativo con respecto al mismo plano que sirve de referencia al punto (recordemos que en la exposición de los distintos métodos se consideró la profundidad como un número positivo, lo que ha de ser tenido en cuenta a la hora de operar con esta expresión). La atracción así calculada tendrá el mismo signo que el del contraste de densidad utilizado.

Hay que tener en cuenta los posibles casos singulares que pueden presentarse en la evaluación de la ecuación (4.36). En concreto, tenemos que las únicas partes que pueden presentar singularidad corresponden a los elementos primero, segundo y cuarto del corchete cuando A o B valgan 0 y sólo si $C = 0$. Que C valga 0 implica que el punto de observación está situado sobre la cara superior del prisma. El elemento D nunca valdrá 0, ya que el prisma siempre tendrá dimensión vertical > 0 .

Considerando que $C = 0$ podemos simplificar el primer elemento del corchete de la ecuación (4.36) en la forma

$$A \ln \frac{A^2 + D^2}{A^2 + C^2} = A \ln \frac{A^2 + D^2}{A^2}, \quad (4.37)$$

donde puede producirse singularidad (de tipo $0 \cdot \infty$) al calcular el límite cuando $A \rightarrow 0$. Para deshacer la singularidad $0 \cdot \infty$ se convierte en ∞/∞ , para lo cual se transforma la

función original en

$$\lim_{A \rightarrow 0} A \ln \frac{A^2 + D^2}{A^2} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{A^2 + D^2}{A^2}}{\frac{1}{A}}, \quad (4.38)$$

donde, aplicando la regla de l'Hôpital queda

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{2AD^2}{A^2 + D^2} = 0. \quad (4.39)$$

El caso del segundo elemento del corchete de la ecuación (4.36) es idéntico (cambiando A por B) al del primer elemento, por lo que su valor cuando $B \rightarrow 0$ también será 0. El cuarto elemento también vale 0 al hacer la simplificación $C = 0$.

La derivada de F_{ij} con respecto a la profundidad se expresa como

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial p_j} = -2\gamma\rho_j \left(\arctan \frac{A}{D} - \arctan \frac{B}{D} \right), \quad (4.40)$$

y la derivada segunda es

$$\frac{\partial^2 F_{ij}}{\partial p_j^2} = -2\gamma\rho_j \left(\frac{A}{A^2 + D^2} - \frac{B}{B^2 + D^2} \right). \quad (4.41)$$

En estas expresiones no existe singularidad en ningún caso, puesto que en todos los denominadores aparece el término D , que nunca vale 0.

Los componentes del vector gradiente se calculan como

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_p^g &= \nabla_p^g \{\phi^g\}_{k=1,2,\dots,M} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N -2 \left(g_i^0 - \sum_{j=1}^M F_{ij} \right) \frac{\partial F_{ik}}{\partial p_k} = \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N (g_i^0 - g_i) \frac{\partial F_{ik}}{\partial p_k}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

mientras que los de la matriz hessiana tienen por expresión

$$\begin{aligned} H_p^g &= \nabla_p^g \nabla_p^{gT} \{\phi^g\}_{\{k,l\}=1,2,\dots,M} = \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\partial F_{ik}}{\partial p_k} \frac{\partial F_{il}}{\partial p_l} + \left(g_i^0 - \sum_{j=1}^M F_{ij} \right) \frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial p_l \partial p_k} \right] = \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\partial F_{ik}}{\partial p_k} \frac{\partial F_{il}}{\partial p_l} + (g_i^0 - g_i) \frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial p_l \partial p_k} \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde $\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial p_l \partial p_k} \neq 0$ si $k = l$.

Por último, las expresiones para los gradientes y matrices hessianas de las funciones ϕ^r y ϕ^a , de fácil deducción, son:

$$\mathbf{J}_p^r = \nabla_p^r \{\phi^r\}_{k=1,2,\dots,M} = \frac{2}{L} \sum_{i=1}^L (R\mathbf{p})_i R_{ik}, \quad (4.44)$$

$$H^r = \nabla_p^r \nabla_p^{rT} \{\phi^r\}_{\{k,l\}=1,2,\dots,M} = \frac{2}{L} \sum_{i=1}^L R_{ik} R_{il}, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{J}_p^a = \nabla_p^a \{\phi^a\}_{k=1,2,\dots,M} = \frac{2}{H} \sum_{i=1}^H (A\mathbf{p} - \mathbf{h}^0)_i A_{ik}, \quad (4.46)$$

y

$$H^a = \nabla_p^a \nabla_p^{aT} \{\phi^a\}_{\{k,l\}=1,2,\dots,M} = \frac{2}{H} \sum_{i=1}^H A_{ik} A_{il}. \quad (4.47)$$

4.3.3. Atracción de un prisma de densidad variable con la profundidad

Como puede verse en Chakravarthi y otros (2002); Chakravarthi y Sundararajan (2007); Rao y otros (1994), las expresiones que dan la atracción de un prisma en 2 ó 3 dimensiones cuando se considera que su densidad varía con la profundidad son difíciles de manejar, debido principalmente a la cantidad de términos que intervienen. Además, como se indica en Silva y otros (2006), algunas funciones de variación útiles, como la exponencial, no dan lugar a expresiones cerradas para las fórmulas de atracción. Por esto, es conveniente la aproximación al problema desde un punto de vista numérico donde, aprovechando la velocidad de cómputo de un ordenador, sea posible de forma rápida y eficiente el cálculo de la atracción del prisma considerando una función arbitraria de variación de la densidad.

La atracción de un prisma de densidad variable con la profundidad en función de su grosor puede ser determinada mediante la discretización en subprismas del prisma original y la asignación a cada uno de ellos de una densidad dependiente de su profundidad. La atracción total resulta de la suma de las atracciones de los prismas utilizados. Puede verse una representación esquemática en la Figura 4.7.

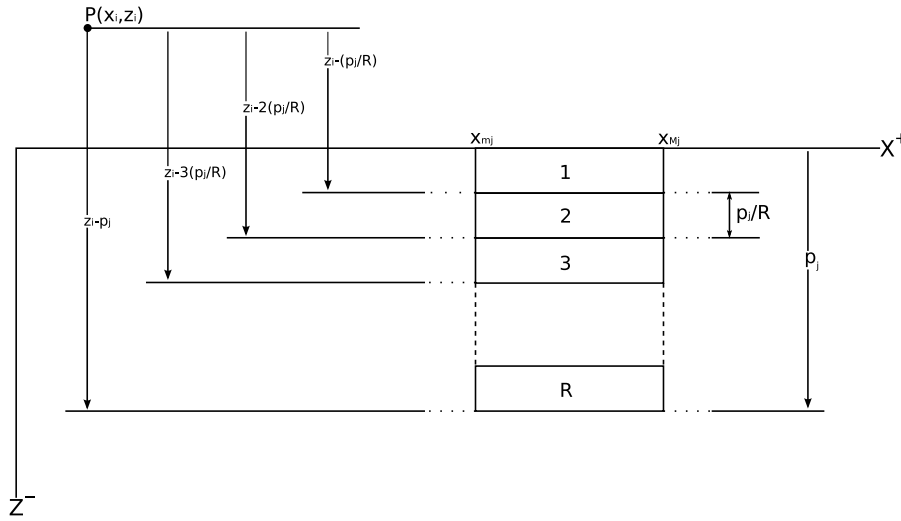


Figura 4.7: Aproximación discreta de un prisma de densidad variable de forma continua con la profundidad. El prisma original se subdivide en R subprismas de densidad correspondiente a su profundidad según la función de variación utilizada. La atracción total se calcula como la suma de las atracciones de cada subprisma.

La atracción, en función de la profundidad, de expresa como

$$F_{ij} = F(x_i, z_i, x_{mj}, x_{Mj}, p_j, \rho_k) =$$

$$\gamma \sum_{k=1}^R \rho_k \left[A \ln \frac{A^2 + D_k^2}{A^2 + C_k^2} - B \ln \frac{B^2 + D_k^2}{B^2 + C_k^2} + \right.$$

$$\left. 2D_k \left(\arctan \frac{A}{D_k} - \arctan \frac{B}{D_k} \right) - 2C_k \left(\arctan \frac{A}{C_k} - \arctan \frac{B}{C_k} \right) \right], \quad (4.48)$$

$$\text{con } \begin{cases} A = x_i - x_{mj}, \\ B = x_i - x_{Mj}, \\ C_k = z_i - (k-1) \frac{p_j}{R}, \\ D = z_i - (k-1) \frac{p_j}{R} - \frac{p_j}{R} = z_i - k \frac{p_j}{R}, \end{cases}$$

donde el j -ésimo prisma se ha dividido en R subprismas de profundidad $\frac{p_j}{R}$ con respecto a su cara superior correspondiente, γ es la constante de gravitación universal, (x_i, z_i) son las coordenadas del punto de observación, (x_{mj}, x_{Mj}) son las coordenadas x mínima y máxima que definen los límites del prisma, p_j su profundidad y ρ_k la densidad considerada para cada subprisma. La coordenada z del punto atraído ha de venir dada como número

positivo, mientras que la profundidad será un valor negativo con respecto al mismo plano que sirve de referencia al punto, que será la cara superior de cada subprisma. La atracción así calculada tendrá el mismo signo que el del contraste de densidad utilizado (si mantiene el mismo signo en todos los subprismas). Al igual que en la ecuación (4.36), se presentan casos singulares en los elementos primero, segundo y cuarto dentro del corchete cuando A , B y C_k valen 0, respectivamente. En estos casos, los elementos citados también valen 0.

La derivada de F_{ij} con respecto a la profundidad se expresa como

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial p_j} = \frac{2\gamma}{R} \sum_{k=1}^R \rho_k \left[(k-1) \left(\arctan \frac{A}{C_k} - \arctan \frac{B}{C_k} \right) - k \left(\arctan \frac{A}{D_k} - \arctan \frac{B}{D_k} \right) \right]. \quad (4.49)$$

La derivada segunda es

$$\frac{\partial^2 F_{ij}}{\partial p_j^2} = \frac{2\gamma}{R^2} \sum_{k=1}^R \rho_k \left[(k-1)^2 \left(\frac{A}{A^2 + C_k^2} - \frac{B}{B^2 + C_k^2} \right) - k^2 \left(\frac{A}{A^2 + D_k^2} - \frac{B}{B^2 + D_k^2} \right) \right], \quad (4.50)$$

donde no hay casos singulares, ya que ni C_k ni D_k valdrán nunca 0.

En realidad, las expresiones

$$(k-1) \left(\arctan \frac{A}{C_k} - \arctan \frac{B}{C_k} \right), \quad (4.51)$$

en la derivada primera y

$$(k-1)^2 \left(\frac{A}{A^2 + C_k^2} - \frac{B}{B^2 + C_k^2} \right), \quad (4.52)$$

en la segunda no existen cuando se trabaja con el primero (el más superficial) de los subprismas, ya que la cota de su cara superior siempre es 0 y, por tanto, el elemento C_k correspondiente ($k = 1$) no depende de la profundidad p_j y será tomado como una constante al derivar, lo que elimina la posible singularidad cuando $C_1 = 0$.

Las Tablas 4.1 y 4.2 muestran los resultados de los cálculos realizados sobre un prisma con dos funciones de variación del contraste de densidad diferentes, utilizando la formulación exacta y la aproximación en subprismas descrita. En los dos casos se ha utilizado

un prisma de 1000 m de anchura y 4000 m de profundidad, que se ha dividido en una serie de subprismas de igual grosor. La densidad correspondiente a cada subprisma se ha calculado con la función de decrecimiento correspondiente, tomando como profundidad la del centro de cada subprisma.

Para los cálculos que se pueden ver en la Tabla 4.1 se han utilizado los siguientes parámetros: $\Delta\rho_0 = -520,6\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\alpha = 0,0576\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$ en la función de variación del contraste de densidad. Se observa una precisión por debajo del μGal con la partición en 100 subprismas o menor.

Subprismas	$g_{\text{exac.}}$	$g_{\text{aprox.}}$	$g_{\text{exac.}} - g_{\text{aprox.}}$
10	-17268,398	-17212,996	-55,402
25	-17268,398	-17259,498	-8,900
100	-17268,398	-17267,841	-0,557
500	-17268,398	-17268,376	-0,022
1000	-17268,398	-17268,392	-0,006

Tabla 4.1: Atracción generada por un prisma de contraste de densidad variable de 1000 m de longitud, -4000 m de profundidad y parámetros de densidad $\Delta\rho_0 = -520,6\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\alpha = 0,0576\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$. Atracción en μGal .

En los resultados listados en la Tabla 4.2 los parámetros de la función de variación son $\Delta\rho_0 = -450\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\alpha = 0,2806\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$. En este caso el decrecimiento de la densidad con la profundidad es más acusado, por lo que se necesita una partición más densa para obtener la misma precisión que en el caso anterior. Se obtiene una precisión por debajo del μGal a partir de la división en 200 subprismas en adelante.

Los parámetros para la función de variación de la densidad han sido tomados de Chakravarthi y otros (2002, 2001) y puede verse una representación gráfica de su comportamiento en la Figura 4.8.

En la Figura 4.9 se muestran las atracciones individuales de cada subprisma para una partición de 200 elementos. En este caso, además se ha considerado también un prisma de densidad constante. Se observa como, para grandes profundidades, la contribución de

Subprismas	$g_{exact.}$	$g_{aprox.}$	$g_{exact.} - g_{aprox.}$
10	-8756,408	-8538,460	-217,948
25	-8756,408	-8720,343	-36,064
100	-8756,408	-8754,140	-2,267
500	-8756,408	-8756,317	-0,091
1000	-8756,408	-8756,385	-0,023

Tabla 4.2: Atracción generada por un prisma de contraste de densidad variable de 1000 m de longitud, -4000 m de profundidad y parámetros de densidad $\Delta\rho_0 = -450 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\alpha = 0,2806 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$. Atracción en μGal .

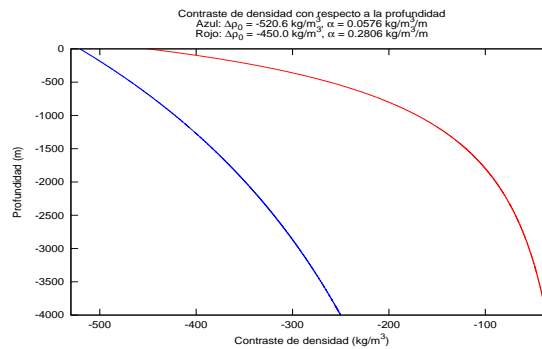


Figura 4.8: Variación del contraste de densidad con la profundidad. Trazo azul: $\Delta\rho_0 = -520,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\alpha = 0,0576 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$. Trazo rojo: $\Delta\rho_0 = -450 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\alpha = 0,2806 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$.

cada subprisma es una parte muy pequeña de la atracción total y en el caso de utilizar una función de decrecimiento de la densidad donde la variación sea muy grande la contribución de estos prismas es menor aún. De este hecho se puede concluir que, en el caso de fuertes disminuciones del contraste de densidad con la profundidad, las atracciones de los prismas muy profundos pueden contribuir sólo al nivel del ruido de las observaciones, con la consiguiente indeterminación en profundidades buscadas (Silva y otros, 2006). Se destaca en detalle la contribución de cada prisma a grandes profundidades, viéndose la escasa atracción de los subprismas a partir de los -3500 m de la función de parámetros $\Delta\rho_0 = -450 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\alpha = 0,2806 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$ con respecto a los del prisma de densidad

constante.

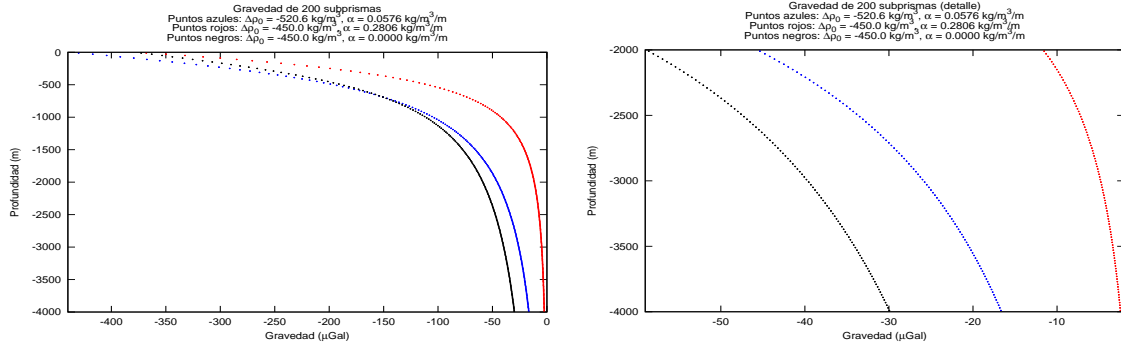


Figura 4.9: Variación de la atracción con la profundidad para una partición en 200 subprismas. Azul: $\Delta\rho_0 = -520,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\alpha = 0,0576 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$. Rojo: $\Delta\rho_0 = -450 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\alpha = 0,2806 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$. Negro: $\Delta\rho_0 = -450 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\alpha = 0$.

Por último, en la Figura 4.10 se puede ver la distribución de densidades con respecto a la profundidad obtenida de un sondeo en una cuenca sedimentaria (Silva y otros, 2006). Se muestran también dos funciones ajustadas según el modelo hiperbólico de la ecuación (4.7). Se ve que hay una zona en la que la densidad se aleja de forma ostensible de la tendencia global, con lo que los posibles ajustes que se hagan adolecerán del efecto producido por esta diferencia. Sin embargo, si se utiliza el método de la partición en subprismas, las densidades pueden ser interpoladas directamente en el registro del sondeo, con lo que se obtendrá una distribución más realista.

4.3.4. Atracción de un polígono con un número arbitrario de lados

La atracción en dos dimensiones de un polígono de un número N de lados, según se muestra en la Figura 4.3, se calcula a partir de la suma de las contribuciones de cada lado de forma individual mediante la expresión

$$g = \sum_{k=1}^N dg(k), \quad (4.53)$$

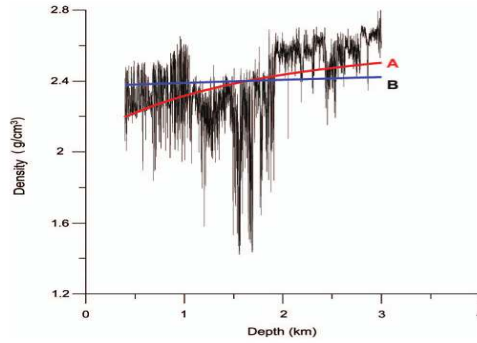


Figura 4.10: Densidad con respecto a la profundidad obtenida de datos de sondeo (negro) y dos ajustes (azul y rojo) según una ley hiperbólica igual a la ecuación (4.7). Imagen tomada de Silva y otros (2006).

donde $dg(k)$, en el caso de trabajar con densidad variable según la ley de la ecuación (4.20) es (Chakravarthi y otros, 2001):

$$dg(k) = \frac{2\gamma\Delta\rho_0^3}{A} \left[\frac{\phi'_{k+1}(z_{k+1}F1 + CF2)}{S2} - \frac{\phi'_k(z_kF1 + CF2)}{S1} + C \sin i \ln \left(\frac{S1r_{k+1}}{S2r_k} \right) \right], \quad (4.54)$$

con

$$S1 = \Delta\rho_0 - \alpha z_k, \quad S2 = \Delta\rho_0 - \alpha z_{k+1}, \quad (4.55)$$

$$R = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (z_{k+1} - z_k)^2}, \quad (4.56)$$

$$\sin i = \frac{z_{k+1} - z_k}{R}, \quad \cos i = \frac{x_{k+1} - x_k}{R}, \quad (4.57)$$

$$C = x_k \sin i - z_k \cos i, \quad A = C^2 \alpha^2 + 2\Delta\rho_0 \alpha C \cos i + \Delta\rho_0^2, \quad B = -2C \alpha \cos i - 2\Delta\rho_0, \quad (4.58)$$

$$T1 = \arctan \frac{z_k + C \cos i}{C \sin i}, \quad T2 = \arctan \frac{z_{k+1} + C \cos i}{C \sin i}, \quad (4.59)$$

$$F1 = \Delta\rho_0 + \alpha C \cos i, \quad F2 = \Delta\rho_0 \cos i + \alpha C, \quad (4.60)$$

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + z_k^2}, \quad r_{k+1} = \sqrt{x_{k+1}^2 + z_{k+1}^2}, \quad (4.61)$$

$$\phi'_k = \frac{\pi}{2} - \phi_k, \quad \phi'_{k+1} = \frac{\pi}{2} - \phi_{k+1}, \quad (4.62)$$

y

$$\phi_k = \arctan \frac{z_k}{x_k}, \quad \phi_{k+1} = \arctan \frac{z_{k+1}}{x_{k+1}}. \quad (4.63)$$

4.3.5. Atracción de un modelo trapezoidal

De acuerdo a la formulación presentada en Rao (1990), la atracción generada por un trapecio asimétrico, que presenta una variación de la densidad con respecto a la profundidad dada por la ecuación (4.26) es, siguiendo la notación de la Figura 4.5

$$\begin{aligned}
g(x) = & 2\gamma a_0 [Z_1(\phi_2 - \phi_1) + Z_2(\phi_4 - \phi_3) + F_5 G_1 - F_6 G_2] + \\
& \frac{2\gamma a_1}{2} \left\{ Z_1^2(\phi_2 - \phi_1) + Z_2^2(\phi_4 - \phi_3) + \right. \\
& F_5 [(Z_2 - Z_1) \sin \theta_1 + F_5 G_3] - \\
& F_6 [(Z_2 - Z_1) \sin \theta_2 + F_6 G_4] \left. \right\} + \\
& \frac{2\gamma a_2}{3} \left\{ Z_1^3(\phi_2 - \phi_1) + Z_2^3(\phi_4 - \phi_3) + \right. \\
& F_5 \left[\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{2} \sin \theta_1 + F_5 (Z_2 - Z_1) \sin 2\theta_1 + F_5^2 G_5 \right] - \\
& F_6 \left[\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{2} \sin \theta_2 + F_6 (Z_2 - Z_1) \sin 2\theta_2 + F_6^2 G_6 \right] \left. \right\}, \tag{4.64}
\end{aligned}$$

con

$$F_1 = x - D + T, \quad F_2 = x - D - T, \tag{4.65}$$

$$F_3 = (Z_2 - Z_1) \cot \theta_1, \quad F_4 = (Z_2 - Z_1) \cot \theta_2, \tag{4.66}$$

$$F_5 = F_1 \sin \theta_1 + Z_2 \cos \theta_1, \quad F_6 = F_2 \sin \theta_2 + Z_2 \cos \theta_2, \tag{4.67}$$

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\arctan(F_1 + F_3)}{Z_1}, \quad \phi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\arctan(F_2 - F_4)}{Z_1}, \tag{4.68}$$

$$\phi_3 = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{F_2}{Z_2}, \quad \phi_4 = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{F_1}{Z_2}, \tag{4.69}$$

$$r_1 = \sqrt{Z_1^2 + (F_1 + F_3)^2}, \quad r_2 = \sqrt{Z_1^2 + (F_2 - F_4)^2}, \tag{4.70}$$

$$r_3 = \sqrt{Z_2^2 + F_2^2}, \quad r_4 = \sqrt{Z_2^2 + F_1^2}, \tag{4.71}$$

$$G_1 = \sin \theta_1 \ln \frac{r_4}{r_1} + \cos \theta_1 (\theta_1 - \theta_4), \quad G_2 = \sin \theta_2 \ln \frac{r_3}{r_2} - \cos \theta_2 (\theta_2 - \theta_3), \tag{4.72}$$

$$G_3 = \sin 2\theta_1 \ln \frac{r_4}{r_1} + \cos 2\theta_1 (\theta_1 - \theta_4), \quad G_4 = \sin 2\theta_2 \ln \frac{r_3}{r_2} - \cos 2\theta_2 (\theta_2 - \theta_3), \tag{4.73}$$

$$G_5 = \sin 3\theta_1 \ln \frac{r_4}{r_1} + \cos 3\theta_1 (\theta_1 - \theta_4), \quad G_6 = \sin 3\theta_2 \ln \frac{r_3}{r_2} - \cos 3\theta_2 (\theta_2 - \theta_3). \tag{4.74}$$

En la ecuación (4.64), el primer miembro corresponde al caso en que el contraste de densidad es constante, mientras que los restantes añaden el efecto producido por a variación de ésta.

4.4. Ejemplos

En esta sección se va a aplicar el método de inversión en dos dimensiones que considera la discretización del área de trabajo en prismas (sección 4.2.2) y trabaja con constreñimientos relativos (del tipo de los descritos en la ecuación (4.5)) y absolutos. Se va a considerar un perfil de 10000 m de largo que se ha dividido en 120 prismas de igual anchura y con un contraste de densidad original uniforme $\Delta\rho^o = -200 \text{ kg}/m^3$. En todos los casos se utilizan 60 puntos de observación equiespaciados, situados a cota 0 m (sobre la parte superior de los prismas).

Como criterio de parada para el proceso iterativo se utiliza un valor $\varepsilon = 0,001$ en la ecuación (4.18). Los factores μ^r son los más pequeños para obtener una solución estable (Silva y otros, 2006, 2008), mientras que los valores para μ^a (cuando sea necesario) son los más pequeños tal que no producen efectos locales en las profundidades estimadas a su alrededor (Barbosa y otros, 1997).

Los valores de μ^r y μ^a se seleccionan mediante la técnica de ensayo y error.

4.4.1. Primera prueba

En la Figura 4.13 vemos el resultado de la inversión del modelo descrito utilizando solamente constreñimientos relativos y considerando un contraste de densidad para el cálculo $\Delta\rho^e = -200 \text{ kg}/m^3$. Al ser la cuenca de ejemplo muy profunda (5000 m) con respecto a su longitud, la forma de la superficie de contacto entre los sedimentos y el basamento apenas se refleja en el perfil de atracción, por lo que el modelo inicial para la inversión (calculado a partir de la ecuación (4.19)) se alejará del perfil real (ver Figura 4.11). Se utiliza un factor para los constreñimientos relativos $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-7}$. Vemos en la Figura 4.13 que los mayores errores absolutos coinciden con los puntos de mayor profundidad en

el modelo original (Barbosa y otros, 1997), mientras que los errores relativos (con respecto a la profundidad original) no superan el 13%, lo que está de acuerdo con los resultados de Barbosa y otros (1997).

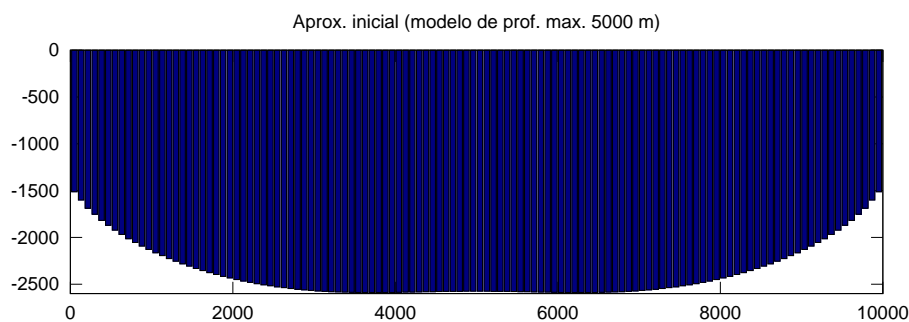


Figura 4.11: Modelo inicial para cuenca de profundidad máxima igual a 5000 *m*.

4.4.2. Segunda prueba

En la Figura 4.14 se muestra el resultado de la inversión de un modelo igual al del ejemplo anterior, pero con un valor del factor para los constreñimientos relativos demasiado alto: $\mu^r = 5,0 \cdot 10^{-5}$. El resultado es un modelo demasiado suavizado, debido a que los constreñimientos relativos introducidos tienen demasiada influencia en la inversión (Barbosa y otros, 1997).

4.4.3. Tercera prueba

En la Figura 4.15 tenemos el mismo modelo que en los ejemplos anteriores, con la diferencia de que, en este caso, además de los constreñimientos relativos, se ha utilizado como constreñimiento absoluto la profundidad del punto central del perfil. Los factores para los constreñimientos relativos y absolutos valen $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-7}$ y $\mu^a = 1,0 \cdot 10^{-6}$, respectivamente. La estimación apenas ha mejorado, debido a que el punto utilizado como profundidad conocida es de los menos profundos del perfil (Barbosa y otros, 1997). Debido a la introducción de un punto de profundidad conocida, el error (tanto absoluto como relativo) alrededor de éste en la solución ha bajado con respecto al ejemplo de la Figura 4.13.

4.4.4. Cuarta prueba

La Figura 4.16 representa el mismo modelo que en los ejemplos anteriores, pero con tres puntos como constreñimientos absolutos, dos de los cuales son los más profundos del perfil. Los factores para los constreñimientos relativos y absolutos valen $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-7}$ y $\mu^a = 1,0 \cdot 10^{-6}$, respectivamente. En este caso, los errores se reducen notablemente, teniendo una cota máxima en torno al 6 %. La razón de esta mejoría es que ahora existe información a priori sobre las zonas más profundas, que son las peor determinadas por la gravimetría (Barbosa y otros, 1997).

4.4.5. Quinta prueba

En la Figura 4.17 vemos el resultado de la inversión de un modelo como el del ejemplo anterior (constreñimientos relativos y 3 puntos de profundidad conocida), pero con una profundidad máxima igual 2500 m (la mitad). Los factores para los constreñimientos relativos y absolutos son $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-10}$ y $\mu^a = 1,0 \cdot 10^{-9}$, respectivamente. En este caso, al contrario que en los anteriores, al ser mayor la relación entre la longitud del perfil y su profundidad máxima, la estructura del subsuelo queda mucho mejor reflejada en los datos de observación, con lo cual el cálculo del modelo inicial para comenzar la inversión será más exacto (Figura 4.12). Todo esto redundará en un modelo estimado con errores que no llegan a superar el 1 %.

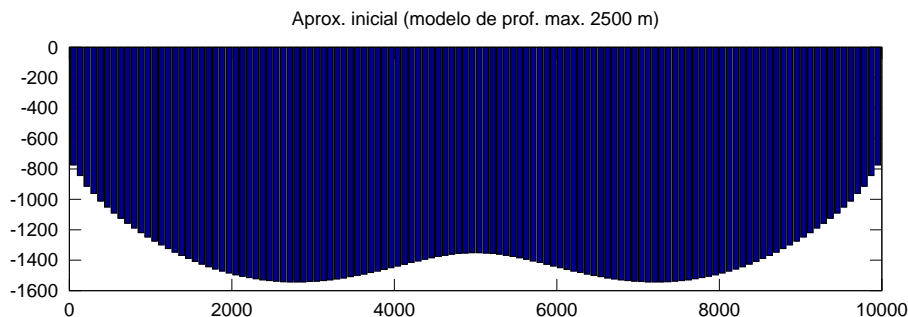


Figura 4.12: Modelo inicial para cuenca de profundidad máxima igual a 2500 m.

4.4.6. Sexta prueba

En el ejemplo de la Figura 4.18 se ha invertido el modelo de profundidad máxima igual a 2500 m , sólo se utilizan constreñimientos relativos y un contraste de densidad de cálculo igual a $\Delta\rho^c = -220\text{ kg/m}^3$. El factor para los constreñimientos relativos vale $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-8}$. Vemos en este caso que, al ser el contraste de densidad utilizado para el cálculo mayor (en valor absoluto) que el original, el modelo invertido subestima las profundidades y el error relativo aumenta hasta casi un 20% en algunos puntos. También se observa la aparición de efectos de borde en los extremos del perfil.

4.4.7. Séptima prueba

Por último, en la inversión de la Figura 4.19 se utiliza un modelo igual al del ejemplo anterior, con sólo constreñimientos relativos y donde se ha añadido ruido pseudoaleatorio a las observaciones con una desviación típica igual al 2% del valor original en cada punto. El factor para los constreñimientos relativos vale $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-5}$. Vemos que los errores no superan, en su mayoría, el 10%, aunque hay algunos puntos que llegan al 18% en el borde izquierdo.

4.5. Conclusiones

Se han estudiado varios métodos de inversión gravimétrica en cuencas sedimentarias.

Todos los métodos trabajan en dos dimensiones, excepto uno (Chakravarthi y Sundararajan, 2007), que lo hace en un entorno tridimensional.

Mientras unos métodos se basan en la discretización del espacio modelo en prismas (Barbosa y otros, 1997; Chakravarthi y Sundararajan, 2007; Silva y otros, 2006, 2008), otros emplean polígonos con un número arbitrario de lados (Chakravarthi y otros, 2001) o figuras trapezoidales (Rao, 1990).

En algunos métodos se considera un contraste de densidad constante (Barbosa y otros, 1997), mientras que en el resto se permite una variación de éste con la profundidad

(Chakravarthi y otros, 2001; Chakravarthi y Sundararajan, 2007; Rao, 1990; Silva y otros, 2006, 2008).

La principal ventaja de los métodos que utilizan polígonos para la modelización del medio es el reducido tamaño del sistema de ecuaciones que se genera. En el caso de los métodos que aproximan la cuenca por un conjunto de prismas, si bien el sistema de ecuaciones generado es más grande, es posible una fácil introducción de constreñimientos e información a priori acerca de profundidades conocidas en determinados puntos.

Como principal desventaja, cabe señalar que, como todo método no lineal, la solución obtenida depende en gran medida de la validez de los contrastes de densidad tomados a priori, así como del modelo inicial escogido para realizar la inversión (Rothman, 1985).

Por último, se propone (sección 4.3.3) un método de cálculo de la atracción de un prisma en dos dimensiones cuya densidad varíe con la profundidad. Este método tiene la ventaja de poder trabajar directamente con densidades obtenidas de sondeos, en lugar de ajustarse a una función definida a priori.

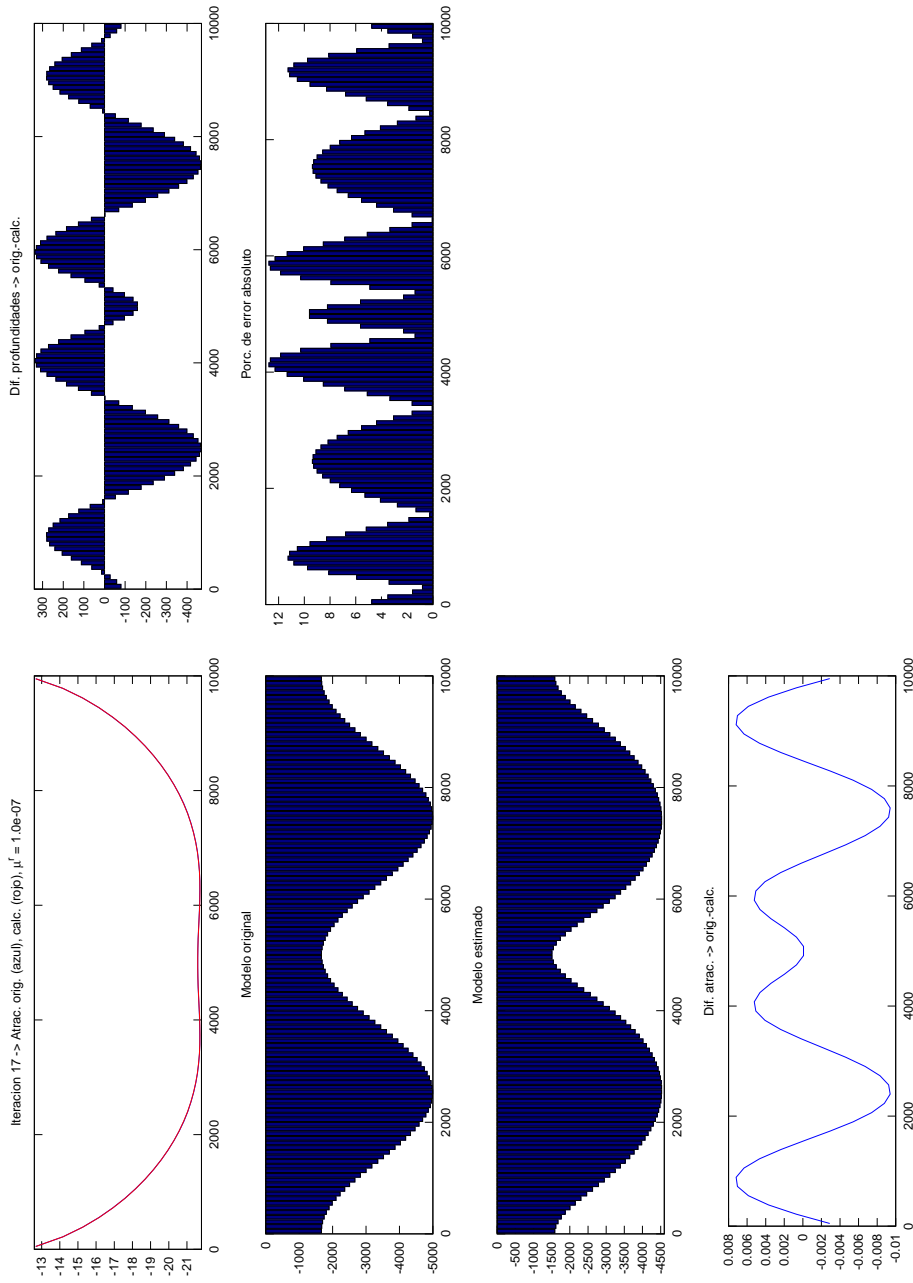


Figura 4.13: Primera prueba. Inversión de modelo con restricciones relativas. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho^c = -200 \text{ kg/m}^3$. Factor de balance: $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-7}$. Valores de gravedad en $mGal$.

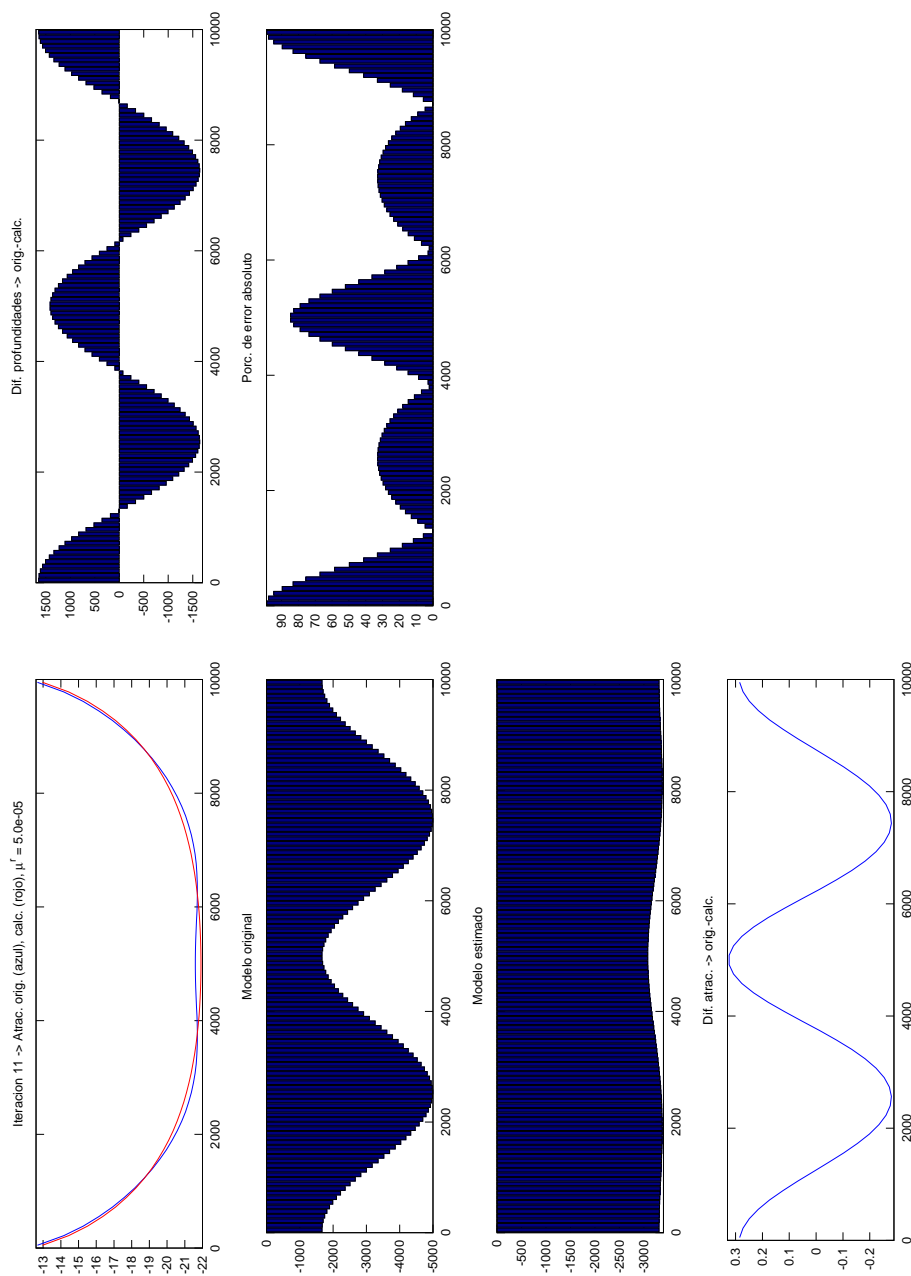


Figura 4.14: Segunda prueba. Inversión de modelo con constreñimientos relativos. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho^c = -200 \text{ kg/m}^3$. Factor de balance: $\mu^r = 5,0 \cdot 10^{-5}$. Valores de gravedad en *mGal*.

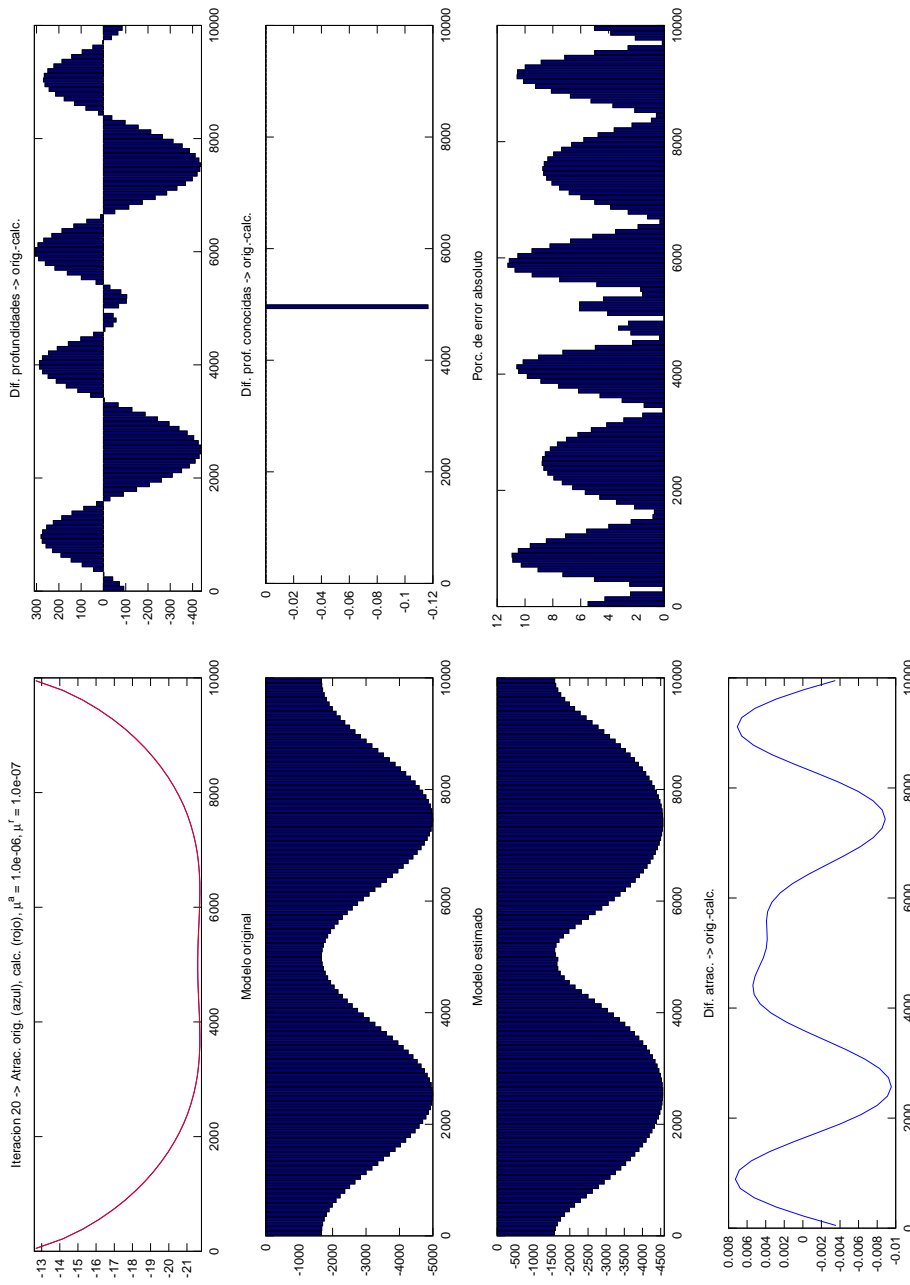


Figura 4.15: Tercera prueba. Inversión de modelo con constreñimientos absolutos (1 punto) y relativos. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho^c = \Delta\rho^c = -200 \text{ kg/m}^3$. Factores de balance: $\mu^\gamma = 1,0 \cdot 10^{-7}$ y $\mu^\beta = 1,0 \cdot 10^{-6}$. Valores de gravedad en *mGal*.

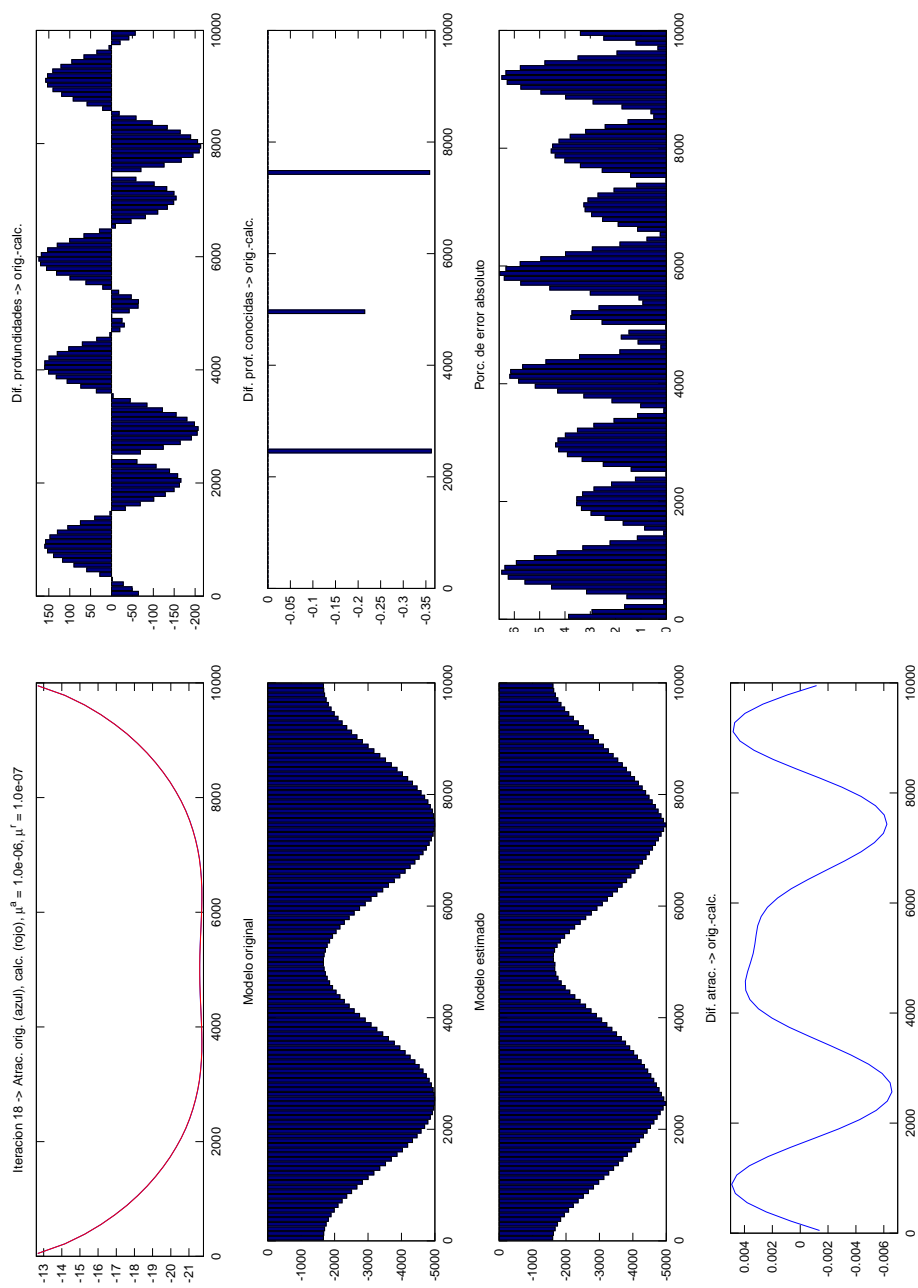


Figura 4.16: Cuarta prueba. Inversión de modelo con restricciones absolutas (3 puntos) y relativos. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho^c = \Delta\rho^e = -200 \text{ kg/m}^3$. Factores de balance: $\mu^t = 1,0 \cdot 10^{-7}$ y $\mu^a = 1,0 \cdot 10^{-6}$. Valores de gravedad en *mGal*.

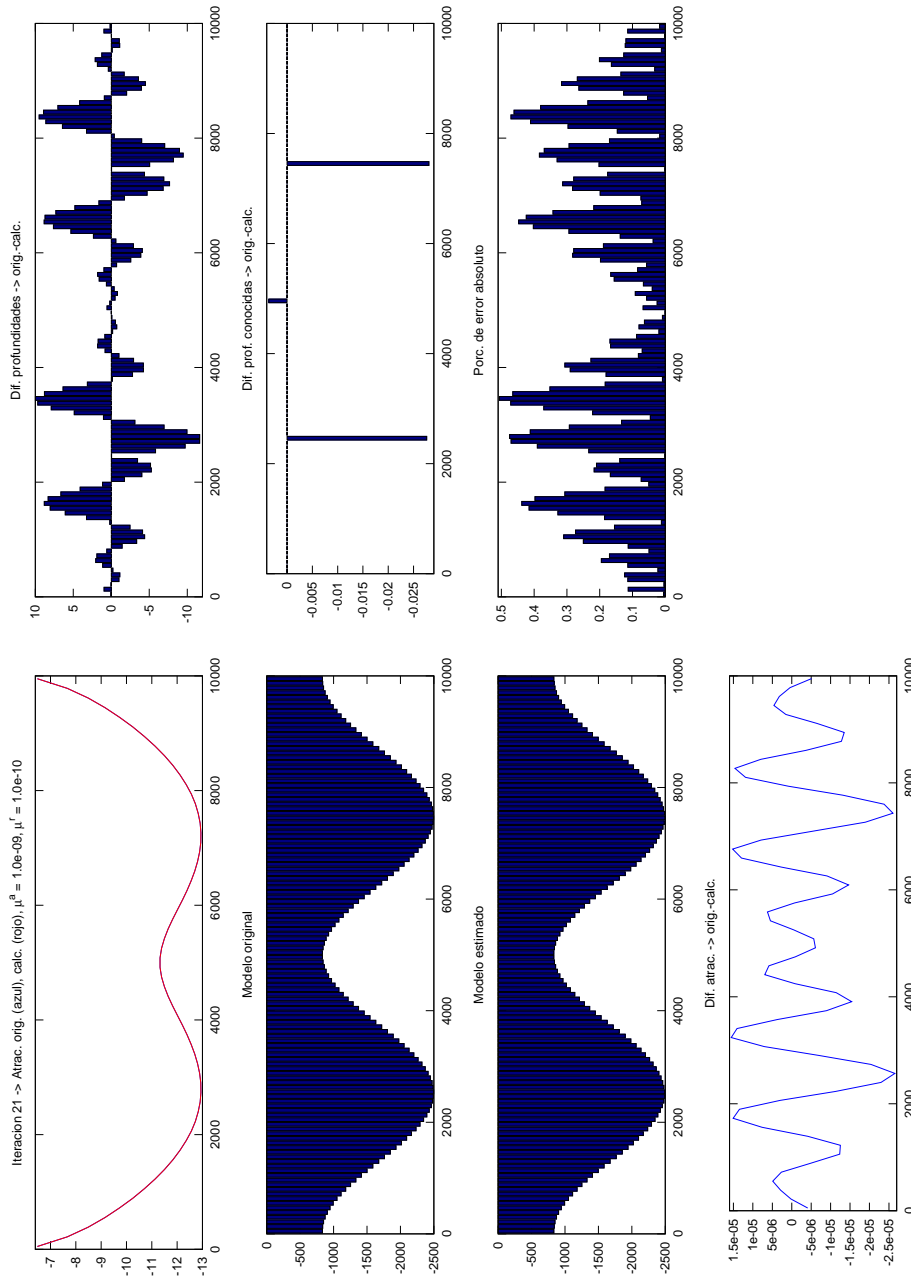


Figura 4.17: Quinta prueba. Inversión de modelo con constreñimientos absolutos (3 puntos) y relativos. Modelo poco profundo con respecto a la longitud del perfil. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho^c = \Delta\rho^e = -200 \text{ kg/m}^3$. Factores de balance: $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-10}$ y $\mu^a = 1,0 \cdot 10^{-9}$. Valores de gravedad en $mGal$.

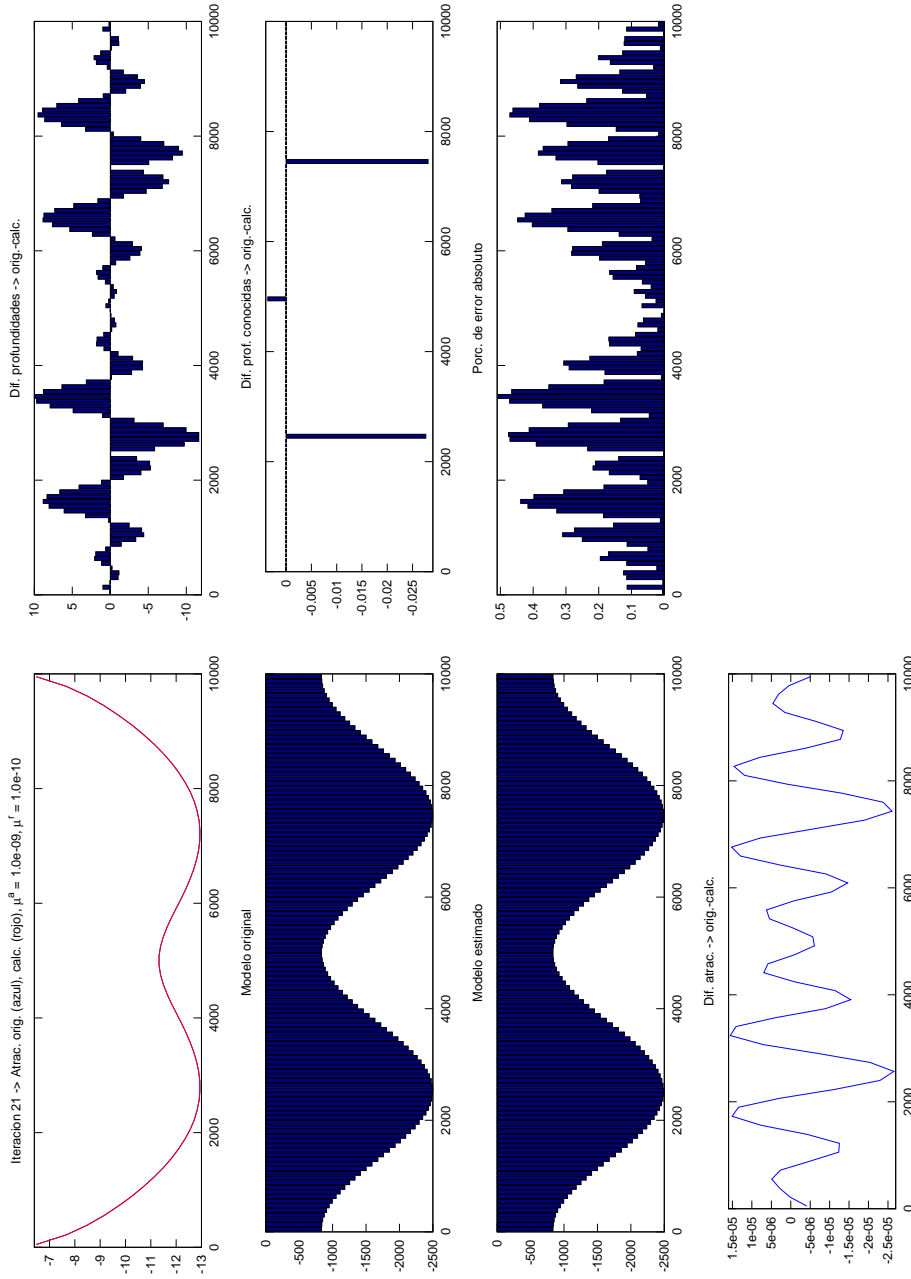


Figura 4.18: Sexta prueba. Inversión de modelo con constreñimientos relativos. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho^o = -200 \text{ kg/m}^3$, $\Delta\rho^c = -220 \text{ kg/m}^3$. Factor de balance: $\mu^1 = 1,0 \cdot 10^{-8}$. Valores de gravedad en *mGal*.

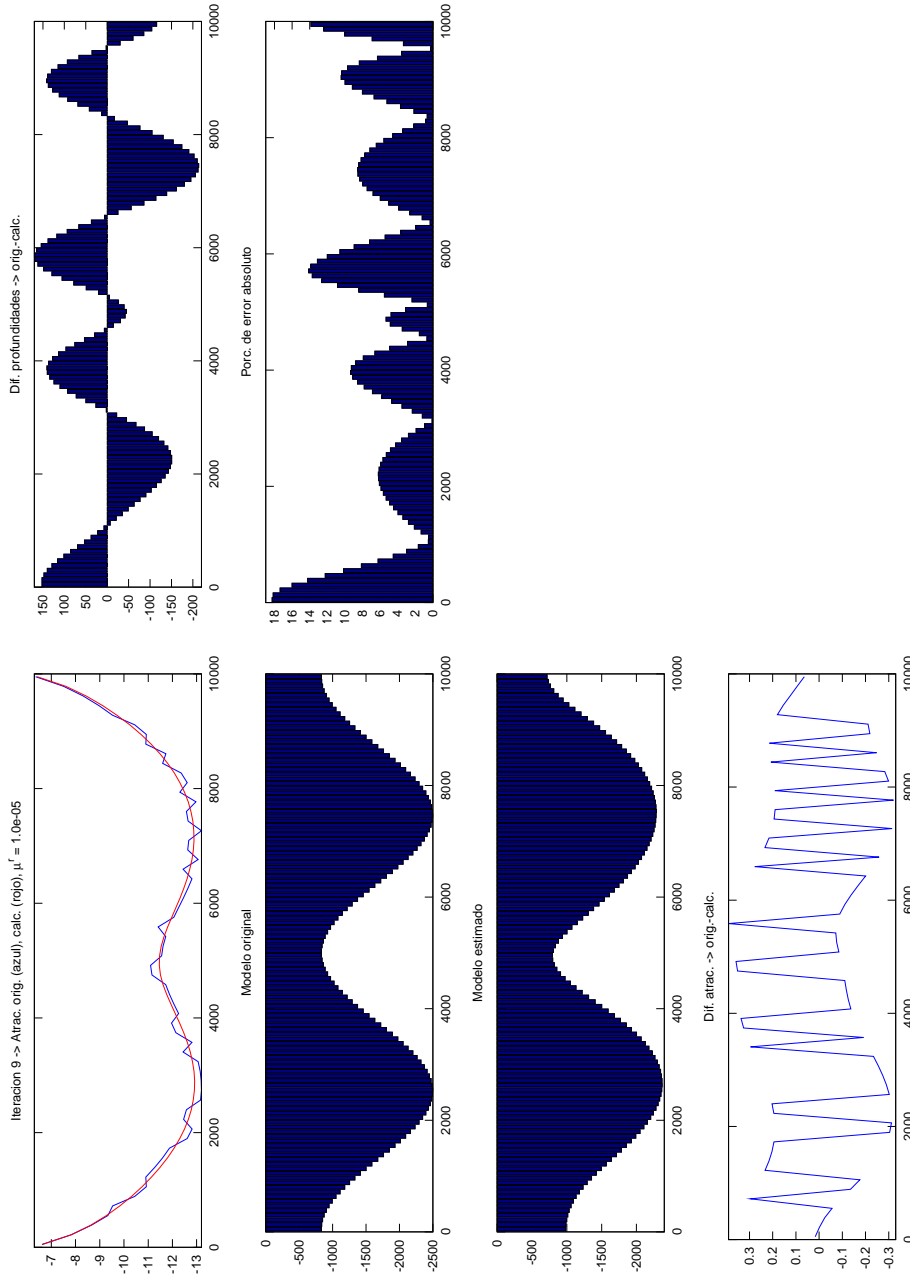


Figura 4.19: Séptima prueba. Inversión de modelo con restricciones relativos y ruido. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho^c = \Delta\rho^e = -200 \text{ kg/m}^3$. Factor de balance: $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-5}$. Valores de gravedad en *mGal*.

Capítulo 5

Inversión de datos del polje de Zafarraya

5.1. Introducción

Un polje es una depresión en un macizo de roca kárstica de grandes dimensiones a modo de valle alargado y cerrado, de fondo plano, de gran tamaño y contornos irregulares. Los bordes son empinados y en ellos aflora la roca caliza. Suele estar recorrido por un riachuelo, que desaparece súbitamente por un sumidero o «ponor». El polje puede inundarse temporalmente (o permanentemente, transformándose en un lago) si el agua superficial rebasa la capacidad de desagüe del ponor y otras grietas y sumideros o si se eleva el nivel de las aguas subterráneas. El fondo llano del polje suele estar tapizado de «terra rossa», una arcilla procedente de la descalcificación de la caliza (<http://es.wikipedia.org/wiki/Poljé>).

El polje de Zafarraya está situado en el extremo occidental de la provincia de Granada, formando parte del acuífero del extenso macizo carbonatado de Sierra Gorda. El sistema Sierra Gorda se enmarca en el área de contacto entre las Zonas Externas e Internas de la Béticas (ver Figura 5.1, superior), presentando características de transición entre el Subbético medio y el Subbético interno (Gavilán Moreno y otros, 1996).

La estructura geológica de esta región es compleja, debido a las importantes deformaciones tectónicas acontecidas en varias fases compresivas y distensivas y a la cercanía del contacto Zonas Externas-Zonas Internas. La unidad de Sierra Gorda representa un gran domo alargado según la dirección N-S (ver Figura 5.1, inferior), resultado de la superpo-

sición de dos sistemas de plegamiento con ejes de dirección $N30^{\circ} - 50^{\circ}E$ y $N150^{\circ}E$ (López Chicano y Pulido-Bosch, 2002).

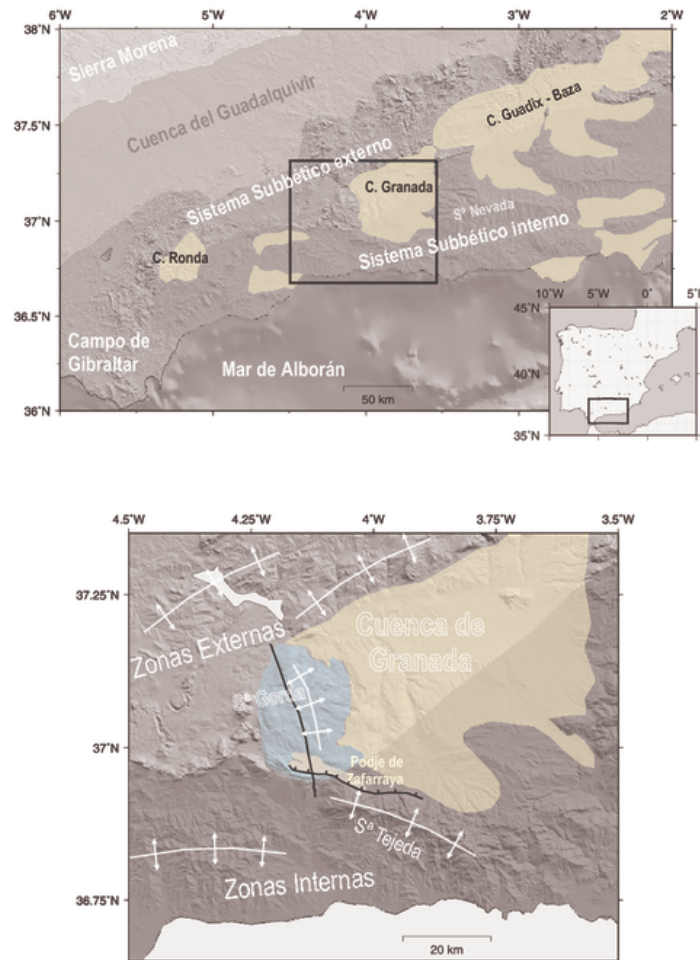


Figura 5.1: Superior: localización del polje de Zafarraya en la Península Ibérica y marco geológico. Inferior: unidad de Sierra Gorda y polje de Zafarraya. En su borde S puede verse la falla normal de Ventas de Zafarraya y, en la dirección N-S, el accidente estructural que cruza Sierra Gorda (Gavilán Moreno y otros, 1996).

El polje de Zafarraya, de unas dimensiones de 10 km de longitud por $3,5\text{ km}$ de anchura máxima, está situado en una de las regiones de más alta peligrosidad sísmica de la Península Ibérica (García-Jerez y otros, 2006). Está limitado en su parte S por la falla normal de Ventas de Zafarraya, a lo largo de la cual, en 1884, tuvo lugar uno de los

terremotos más destructivos de España en época histórica (Reicherter y otros, 2003). En su parte central es atravesado por un accidente estructural de la unidad de Sierra Gorda, asociado a materiales cretácicos, puesto de manifiesto en Gavilán Moreno y otros (1996).

5.2. Estudios previos

En la Figura 5.2 (López-Chicano, 1992) se puede ver un perfil de la estructura del subsuelo del polje de Zafarraya (el perfil se corresponde con la línea quebrada a-a' de la Figura 5.3). El estudio llevado a cabo en López-Chicano (1992) muestra una primera capa superficial formada por arena y conglomerados aluviales con un espesor máximo de 10 m. A continuación encontramos una segunda capa de arcilla y limos aluviales, la cual alcanza una profundidad máxima de unos 50 m en la parte oriental del polje y que reposa directamente sobre el basamento en la parte occidental. En la parte central aparece una capa de margas, mientras que en la zona oriental y parte de la central hay una capa de calcarenitas. La profundidad de estas dos últimas capas no está bien determinada, aunque es conocido que en algunas zonas sobrepasa los 200 m (López-Chicano, 1992).

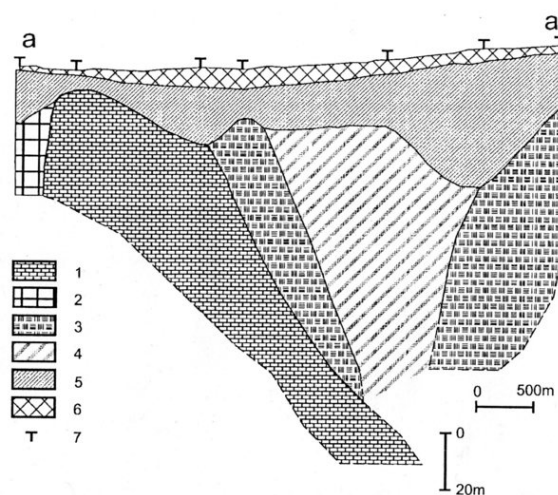


Figura 5.2: Estructura general del polje de Zafarraya. Perfil a-a' de la Figura 5.3. 1: materiales carbonatados mesozoicos. 2: margas y materiales calcáreos del período cretácico. 3: calcarenitas. 4: margas del mioceno superior. 5: arcillas y limos aluviales. 6: arena, limos y conglomerados aluviales. 7: puntos de prospección geoelectrónica.

En García-Jerez y otros (2006) se realiza un estudio de la estructura de los sedimentos a partir de ruido ambiental (microterremotos), cuyo origen es debido a actividades humanas y efectos atmosféricos. En julio de 2004 se obtuvieron 86 registros de microterremotos, aproximadamente en los vértices de una malla regular de unos 500 m de lado que cubría el polje (ver Figura 5.3).



Figura 5.3: Puntos de registro de ruido ambiental (García-Jerez y otros, 2006) y perfil a-a' de la Figura 5.2.

Los resultados de este trabajo pueden verse en la Figura 5.4. En la zona SO los sedimentos tienen un espesor menor de 25 m, hecho que concuerda con lo expuesto en López Chicano y Pulido-Bosch (2002). En el extremo NO, con una dirección aproximada

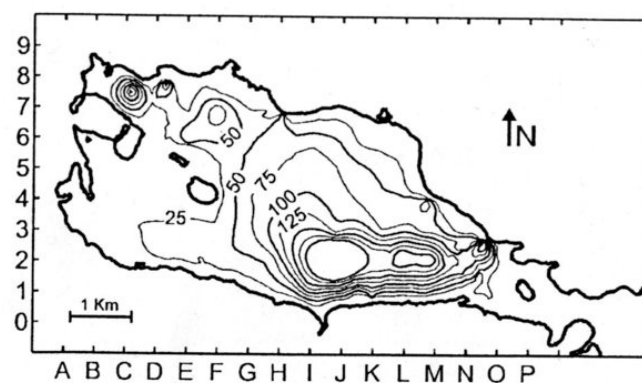


Figura 5.4: Profundidad de los sedimentos del polje de Zafarraya (García-Jerez y otros, 2006).

O20°E, se aprecian dos zonas profundas (la más occidental de unos 125 m y la más oriental

de unos 75 m), separadas por una zona poco profunda (unos 25 m). En la parte central de la cuenca se localizan las mayores profundidades. En la parte norte, el espesor de la capa de sedimentos va aumentando de forma suave hasta alcanzar una profundidad de unos 200 m en el extremo S, para luego disminuir de forma brusca hasta el límite meridional del polje. La zona de máxima profundidad presenta una elongación O-E, con dos máximos de profundidad aislados.

Por último, en Luzón y otros (2009) se obtiene una profundidad máxima para los sedimentos de unos 330 m en la parte central del polje a partir de datos de prospección geoelectrica.

5.3. Datos gravimétricos

Durante los días 17 a 21 de junio de 2007 se realizó una campaña de observación gravimétrica por parte del Instituto de Astronomía y Geodesia en el polje de Zafarraya. Se llevaron a cabo un total de 148 observaciones en 122 puntos con el gravímetro LaCoste and Romberg G665, obteniéndose un error medio cuadrático después de la compensación de los itinerarios realizados de unos 18 μGal .

Para obtener las coordenadas de las estaciones se realizó, simultáneamente con las medidas de gravedad, un levantamiento GPS estático rápido con dos equipos Astech ZXtreme. El tiempo medio de observación en cada punto fue de 10 minutos, obteniéndose una precisión en las altitudes de unos 5 cm.

Para aplicar la corrección topográfica a las medidas gravimétricas se empleó un modelo digital de elevaciones constituido por 228981 puntos, con un paso de malla de 25 m, proporcionado por el IGN.

En la Figura 5.5 (superior) se muestra un mapa de distribución de los puntos observados en la campaña gravimétrica que, como se puede observar, se encuentran homogéneamente distribuidos en toda la cuenca, con una separación media de unos 300 m. En la parte inferior de la misma figura se muestra el mapa de anomalías de Bouguer, donde se puede ver una clara tendencia regional en la dirección N-S. El siguiente paso, antes de pasar al proceso de inversión, será eliminar esta tendencia regional.

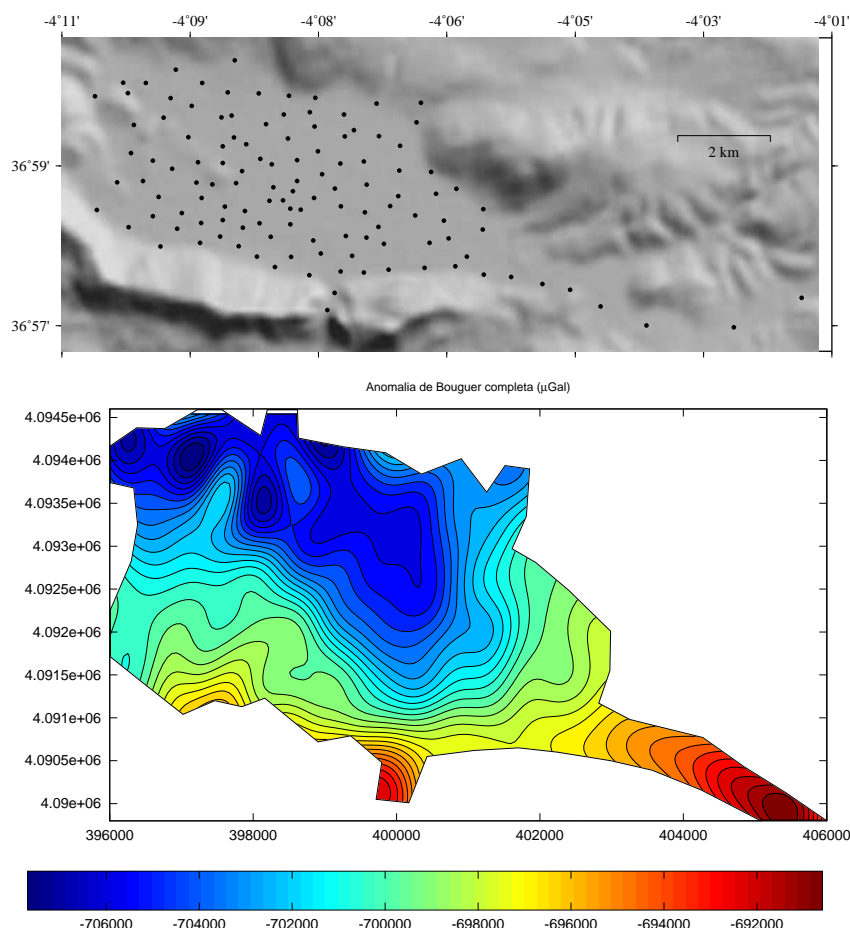


Figura 5.5: Superior: puntos observados en la campaña gravimétrica de junio de 2007. Inferior: mapa de la anomalía de Bouguer completa para el polje de Zafarraya. Valores de gravedad en μGal .

Para obtener la componente regional del campo de anomalías de Bouguer se ha calculado un ajuste polinómico por mínimos cuadrados (Telford y otros, 1976). Se ha empleado un polinomio bidimensional de grado 1: $reg = a_{00} + a_{10}x + a_{11}xy + a_{01}y$, donde las coordenadas X e Y de los puntos se expresan en kilómetros y se refieren a las coordenadas medias del levantamiento, a fin de estabilizar el proceso de ajuste. Se han realizado dos ajustes: uno con el polinomio completo y otro, que será el finalmente utilizado, sólo con los coeficientes a_{00} , a_{11} y a_{01} , debido a que el resultado del primer cálculo arroja una desviación típica para a_{10} 1,6 veces mayor que el valor ajustado del propio coeficiente, por lo que se toma como no significativo y se asume igual a 0. Los resultados de los cálculos se

muestran en la Tabla 5.1.

a_{00}	a_{10}	a_{11}	a_{01}
-701399,89 (167,41)	-58,02 (92,15)	-258,78 (55,14)	-2772,84 (164,52)
-701380,47 (164,13)		-243,15 (49,11)	-2723,55 (144,35)

Tabla 5.1: Coeficientes del polinomio que ajusta la tendencia regional y sus desviaciones típicas (entre paréntesis). Las unidades son μGal para a_{00} , $\mu Gal \cdot km^{-1}$ para a_{10} y a_{01} y $\mu Gal \cdot km^{-2}$ para a_{11} .

En la Figura 5.6 se muestra la tendencia regional calculada, donde, como se ha indicado anteriormente, se observa un predominio de la dirección N-S. Mediante la sustracción de esta tendencia a los valores de anomalía de Bouguer calculados se obtiene el mapa de anomalías locales, que será el utilizado para realizar la inversión.

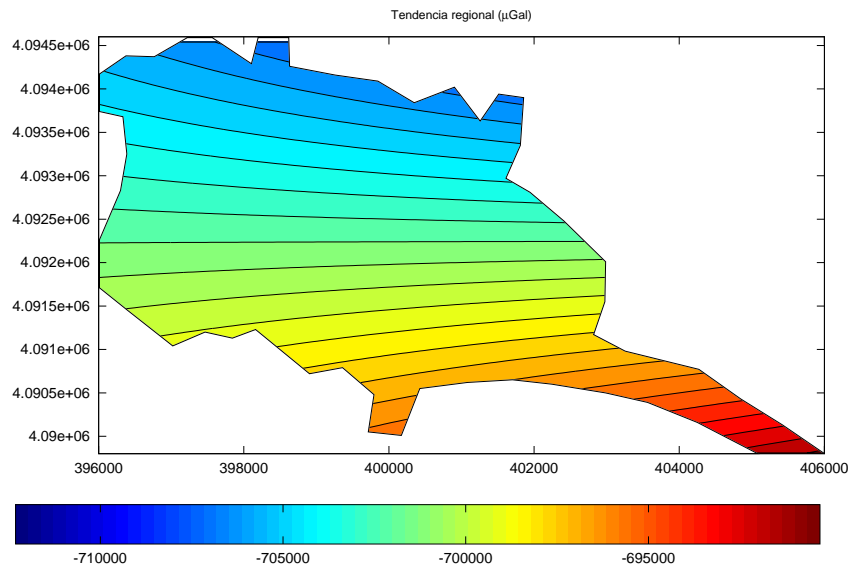


Figura 5.6: Tendencia regional de la anomalía de Bouguer, en la forma $reg = a_{00} + a_{11}xy + a_{01}y$. Los coeficientes del polinomio pueden verse en la Tabla 5.1, segunda fila. Valores de gravedad en μGal .

La Figura 5.7 corresponde a las anomalías locales del polje. Debido al ajuste mínimo cuadrático de la tendencia regional, aparecen anomalías locales positivas y negativas, cuando éstas deberían ser sólo de signo negativo al estar trabajando en una cuenca que

contiene una capa de sedimentos de menor densidad que la roca donde está encajada. Para trabajar sólo con valores negativos se resta un valor constante a todas las anomalías (Beltrão y otros, 1991), en este caso $-3100,0 \mu Gal$.

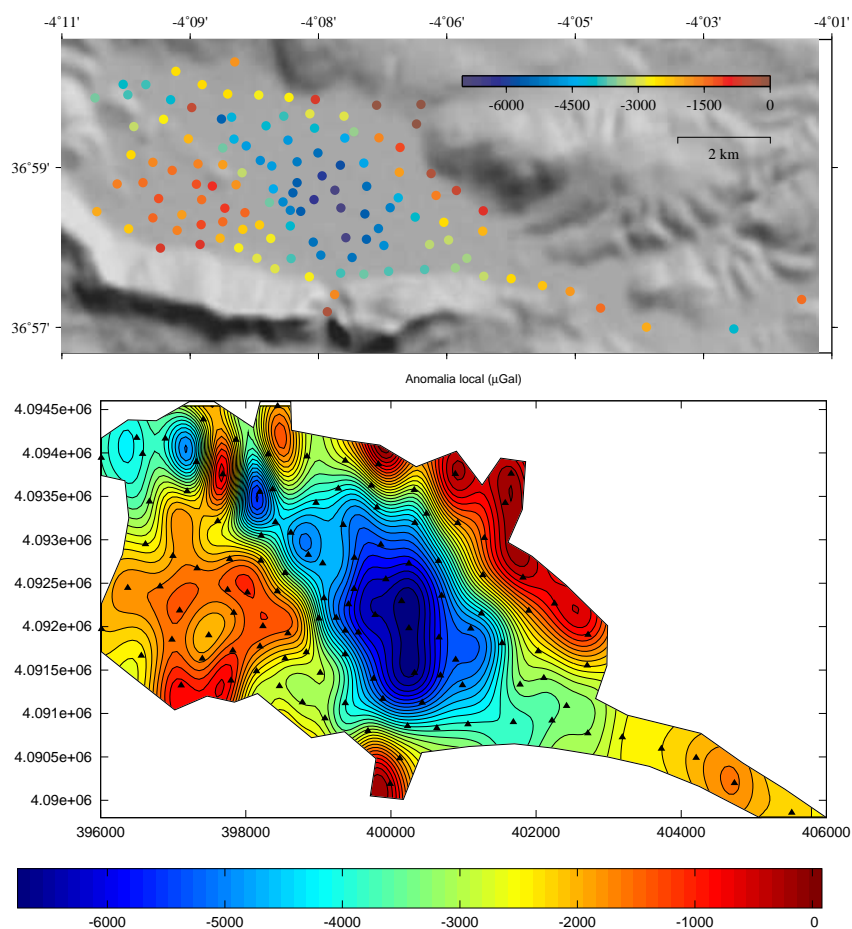


Figura 5.7: Mapas de anomalías locales para el polje de Zafarraya y puntos de observación. Superior: anomalía local en cada punto observado. Inferior: modelado de las anomalías locales mediante «kriging». Valores de gravedad en μGal .

Como la cuenca de trabajo es poco profunda con respecto a su extensión, el mapa de anomalías locales reflejará de forma aproximada el relieve de la superficie de separación sedimentos-basamento. De esta forma, en la parte SO del polje, en la misma zona donde en García-Jerez y otros (2006) se obtienen valores bajos de espesor para los sedimentos (ver Figura 5.4), se aprecian valores bajos (en valor absoluto) de anomalía, mientras que en el extremo NO se observa una sucesión de mínimos y máximos de anomalía, en

una alineación similar (O20°E) a donde se suceden una serie de zonas de alto y bajo espesor de los sedimentos. En la zona central del polje se observan los máximos valores (en valor absoluto) de anomalía local, en una alineación aproximada N-S, que coincide con la dirección del accidente estructural que cruza Sierra Gorda apuntado en Gavilán Moreno y otros (1996) (ver Figura 5.1, inferior).

5.4. Inversión gravimétrica

En esta sección se va a realizar la inversión de varios perfiles en el polje siguiendo la técnica expuesta en la sección 4.2.2. Como densidad del basamento se toma $2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, que es un valor típico para las calizas y es la densidad que se ha utilizado para realizar la corrección del terreno de las observaciones. En cuanto a las densidades de los sedimentos, de http://www.simetric.co.uk/si_materials.htm se han tomado los siguientes valores para los materiales descritos en la Figura 5.2:

- Arena mojada (*Sand, wet*): $1922 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Arcilla mojada (*Clay, wet, excavated*): $1826 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Marga mojada (*Marl, wet, excavated*): $2243 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Se han considerado las densidades de los materiales mojados por la condición de acuífero detrítico del polje.

De acuerdo con García-Jerez y otros (2006), en la parte O del polje no existe capa de margas, por lo que la densidad utilizada en esta zona será una media de los valores listados para la capa de arena y la de arcilla y limos aluviales, cantidad aproximadamente igual a $1875 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. En el resto del polje se utilizará el valor $2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, resultado de la media de las densidades de todos los materiales indicados como sedimentos.

Por lo tanto, los contrastes de densidad entre sedimentos y basamento para la inversión son $\Delta\rho_O = -725 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ y $\Delta\rho_E = 600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, para las zonas O y E, respectivamente.

En la Figura 5.8 se muestran los perfiles a invertir. Hay 3 perfiles en la dirección O-E, que cruzan el máximo (en valor absoluto) de anomalía local, dos perfiles NO-SE (uno

atraviesa la sucesión de máximos y mínimos de anomalía en la zona NO del polje y el otro se extiende a lo largo de la máxima dimensión del área de trabajo) y uno en la dirección NNO-SSE, a lo largo de la zona de máxima extensión de la anomalía central.

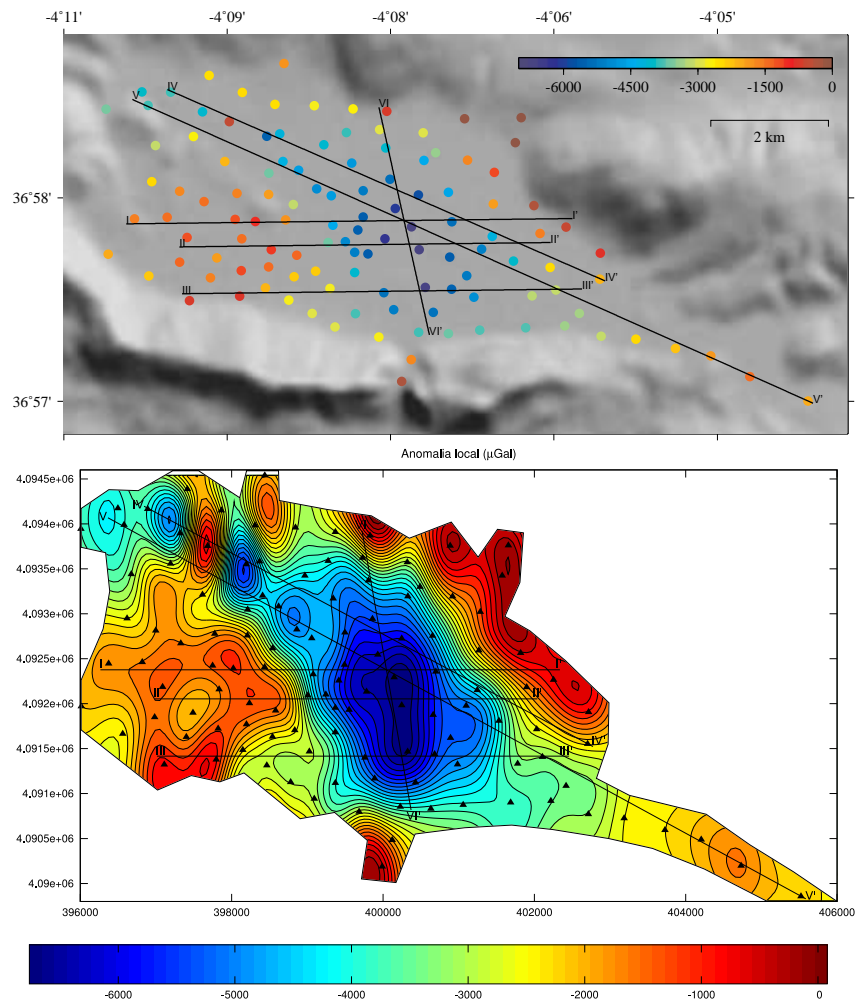


Figura 5.8: Perfiles para la inversión. Superior: superpuestos sobre el mapa de puntos de anomalía local. Inferior: superpuestos al mapa de anomalías locales modelizado mediante «kriging». Valores de gravedad en μGal .

En la Tabla 5.2 se detallan las coordenadas UTM (huso 30) de los puntos de inicio y fin de cada perfil, así como la longitud de cada uno de ellos.

Se realizan dos inversiones de cada perfil, que se diferencian en las dimensiones de los prismas utilizados y en la obtención de los valores de anomalía local.

Perfil	x_i	y_i	$x_{i'}$	$y_{i'}$	longitud
I-I'	396264,0	4092379,0	402340,0	4092379,0	6076,0
II-II'	396984,0	4092056,0	402041,0	4092056,0	5057,0
III-III'	397012,0	4091418,0	402461,0	4091418,0	5449,0
IV-IV'	396845,0	4094201,0	402777,0	4091524,0	6508,1
V-V'	396367,0	4094072,0	405592,0	4089826,0	10155,3
VI-VI'	399723,0	4093926,0	400374,0	4090817,0	3176,4

Tabla 5.2: Coordenadas UTM (huso 30) de los puntos de inicio y final de los perfiles para la inversión.

En la primera inversión se divide cada perfil en el número adecuado de prismas, cuya anchura estará en relación directa a la separación media entre los puntos donde se han realizado observaciones (Barbosa y otros, 1997). Como se comentó en la sección 5.3, la separación media entre estaciones es de unos 300 *m*, por lo que éste es el valor seleccionado. En cuanto a los valores de anomalía local de la gravedad, sobre la vertical del centro de cada prisma se interpola un valor a partir del mapa de anomalías estimado mediante «kriging», visto en la Figura 5.7 (inferior), por lo que, en cada caso, se tiene un número de incógnitas igual al de observaciones.

En la segunda inversión no se realiza interpolación alguna de las anomalías locales. En este caso se utilizan como datos de anomalía aquéllos que correspondan a los puntos que se encuentran a una distancia perpendicular inferior o igual a 150 *m* de la traza de cada perfil. De esta forma no se corre el riesgo de cometer errores en la interpolación, pero se está asumiendo que la anomalía local no varía en un radio de 150 *m* alrededor de cada punto. La anchura de cada prisma se fija como la separación media entre los puntos proyectados en cada perfil. En esta ocasión, las observaciones no están situadas sobre la vertical de cada prisma y puede haber más incógnitas que ecuaciones en la resolución de cada inversión.

Para estabilizar las inversiones se utilizan sólo constreñimientos relativos, ya que no se dispone de ningún dato de sondeo para imponer constreñimientos absolutos.

5.4.1. Perfil I-I'

En la Figura 5.9 (izquierda) se muestra el resultado de la inversión del perfil I-I' con los datos de anomalía extraídos del mapa ajustado mediante «kriging». Se ha discretizado el subsuelo en 21 prismas y se ha utilizado un factor de balance para los constreñimientos relativos $\mu^r = 2,5 \cdot 10^{-6}$. El problema converge tras 9 iteraciones. El modelo muestra una profundidad de los sedimentos entre 25 y 60 m en la parte O del polje, lo que implica una sobreestimación de los resultados expuestos en García-Jerez y otros (2006), Figura 5.4. En la zona de máxima profundidad, punto de cruce con los perfiles V-V' y VI-VI', se obtiene un valor de 328 m. En el punto de cruce con el perfil IV-IV' se obtiene una profundidad igual a 184 m.

La parte derecha de la figura corresponde al perfil generado por la proyección de los puntos más cercanos a la traza. El perfil se compone de 11 puntos, distribuidos regularmente en su parte inicial y central, pero con una separación grande en la parte final. El subsuelo se divide en 12 prismas de 552 m de anchura y el factor de balance para los constreñimientos relativos es $\mu^r = 2,5 \cdot 10^{-6}$. El problema converge tras 10 iteraciones. El resultado de la inversión es similar al obtenido mediante la interpolación de los datos, aunque con ligeras diferencias. En la parte O del perfil se obtiene una profundidad máxima de 78 m, lo que supera los valores obtenidos en la inversión anterior y se aleja de los resultados presentados en García-Jerez y otros (2006), Figura 5.4. En la zona de máxima profundidad se estima un valor de 326 m, acorde con la inversión previa. En el punto de corte con el perfil IV-IV' se llega a un valor de 219 m, frente a los 184 m de la inversión anterior. La diferencia, de 35 m, si bien está por encima del 12 – 14 % de error esperado en la inversión de datos con ruido (ver sección 4.4.7), puede deberse a la anchura de los prismas en el perfil y la distribución de las observaciones.

5.4.2. Perfil II-II'

La Figura 5.10 (izquierda) corresponde al resultado de la inversión del perfil II-II' con los datos de anomalía extraídos del mapa ajustado mediante «kriging». Se ha discretizado

el subsuelo en 18 prismas y se ha utilizado un factor de balance para los constreñimientos relativos $\mu^r = 2,0 \cdot 10^{-6}$. El problema converge tras 9 iteraciones. El modelo, al igual que en la inversión del perfil I-I', muestra una profundidad de los sedimentos entre 25 y 60 *m* en la parte O. En la zona de máxima profundidad, punto de cruce con el perfil VI-VI', se obtiene un valor de 336 *m*. El punto de cruce con el perfil V-V' no está bien definido, coincidiendo con el punto de contacto entre dos prismas. Su profundidad se estima entre 263 y 191 *m*, valores correspondientes a los de los prismas 13 y 14. Por último, en el punto de cruce con el perfil IV-IV' se obtiene una profundidad igual a 160 *m*.

En la parte derecha de la figura se muestra al perfil generado por la proyección de los puntos más cercanos a la traza. El perfil se compone de 13 puntos, distribuidos regularmente en su parte inicial y central. El subsuelo se divide en 15 prismas de 361 *m* de anchura, por lo que es una partición similar a la del perfil interpolado. El factor de balance para los constreñimientos relativos es $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-6}$ y el problema converge tras 10 iteraciones. En la parte O del perfil se obtienen profundidades entre 26 y 50 *m*. En este caso, la zona de máxima profundidad coincide con un límite entre dos prismas, aunque de profundidades parecidas. Se estima un valor medio de 305 *m*, 30 *m* menos que en la inversión del perfil interpolado, aunque esta diferencia entra dentro del 12 – 14 % de error esperado. En el punto de corte con el perfil V-V' se calcula un valor de 285 *m*, mayor al obtenido en la inversión anterior. El punto de cruce con el perfil IV-IV' también coincide con un límite de prismas, por lo que la profundidad calculada está entre 77 y 139 *m*, cantidad menor que la obtenida con el perfil interpolado. Esta variación puede ser debida a que en la zona de corte con el perfil IV-IV' no hay ningún dato observado cercano.

5.4.3. Perfil III-III'

La Figura 5.11 (izquierda) corresponde al resultado de la inversión del perfil III-III' con los datos de anomalía extraídos del mapa ajustado mediante «kriging». Se ha discretizado el subsuelo en 19 prismas y se ha utilizado un factor de balance para los constreñimientos relativos $\mu^r = 2,5 \cdot 10^{-6}$. El problema converge tras 9 iteraciones. La parte O del modelo se divide, aproximadamente por la mitad, en dos partes. En la primera, la más occidental, se

obtienen profundidades entre 17 y 36 *m*, mientras que en la segunda se llega hasta los 100. Esta segunda parte entra en contradicción con los resultados mostrados en García-Jerez y otros (2006), Figura 5.4. En la zona de máxima profundidad, punto de cruce con el perfil VI-VI', se obtiene un valor de 329 *m* y en el punto de cruce con el perfil V-V' se llega hasta los 125 *m*.

En cuanto al perfil generado por la proyección de los puntos más cercanos a la traza (derecha), el perfil se compone de 11 puntos, con una distribución regular. El subsuelo se divide en 13 prismas de 454 *m* de anchura. El factor de balance para los constreñimientos relativos es $\mu^r = 5,0 \cdot 10^{-6}$ y el problema converge tras 8 iteraciones. En la parte O del perfil, al igual que en el caso anterior, se distinguen dos partes: la más occidental, con profundidades entre 13 y 26 *m*, y la oriental, donde se alcanzan los 100 *m*. En el punto de corte con el perfil VI-VI', que es la zona más profunda, se obtiene un espesor de 336 *m*, el cual sólo se diferencia en 7 *m* con el obtenido mediante el perfil interpolado. En el punto de cruce con el perfil V-V' se estima una profundidad de 122 *m*, que también coincide con el resultado del perfil interpolado.

5.4.4. Perfil IV-IV'

En la Figura 5.12 (izquierda) se muestran los resultados de la inversión del perfil IV-IV' con los datos de anomalía extraídos del mapa ajustado mediante «kriging». Se ha discretizado el subsuelo en 23 prismas y se ha utilizado un factor de balance para los constreñimientos relativos $\mu^r = 3,0 \cdot 10^{-5}$. El problema converge tras 6 iteraciones. En la parte O del modelo (zona NO del polje) aparecen una serie de máximos y mínimos de profundidad de la capa de sedimentos, lo que coincide con los máximos y mínimos de anomalía local que se indicaron en la sección 5.3. El primer máximo de profundidad alcanza los 201 *m*, lo que no es consistente con las profundidades obtenidas en García-Jerez y otros (2006), donde se estiman valores de unos 100 *m*. A continuación existe una zona donde la capa de sedimentos tiene un espesor prácticamente nulo 1 *m*, lo que tampoco concuerda con los resultados de García-Jerez y otros (2006), donde los valores están en torno a los 25 *m*. El siguiente máximo alcanza una profundidad de 234 *m*, que tampoco

reproduce los valores de García-Jerez y otros (2006). En el resto del perfil, que coincide con las zonas central y SE del polje, se observa una profundidad máxima de 266 *m*. En el punto de corte con el perfil I-I' se obtiene un espesor de 179 *m*, valor acorde con los 184 *m* obtenidos en la inversión del perfil I-I'. En cuanto al punto de corte con el perfil II-II', el valor estimado es de 147 *m*, frente a los 160 *m* calculados en la inversión del perfil II-II'. En el punto de corte con el perfil VI-VI' se obtiene un espesor de 234 *m*.

El perfil generado por la proyección de los puntos más cercanos a la traza (derecha), se compone de 12 puntos con una distribución regular. El subsuelo se divide en 13 prismas de 542 *m* de anchura. El factor de balance para los constreñimientos relativos es $\mu^r = 2,5 \cdot 10^{-5}$ y el problema converge tras 7 iteraciones. En la parte O del perfil se suceden los máximos y mínimos de profundidad descritos para el perfil anterior. En este caso, el máximo de profundidad de la zona occidental alcanza un valor de 136 *m*, mientras que el mínimo tiene 5 *m* de espesor. En el resto de la parte O del perfil se alcanza una profundidad máxima de 238 *m*. En esta parte del perfil se observan ciertas anomalías en los valores de gravedad, con dos puntos muy cercanos con una diferencia de anomalía local de unos 1500 μGal , que hacen sospechar un error grosero en las observaciones. Estos dos puntos se encuentran en la vertical del mismo prisma en el perfil de inversión, por lo que el residuo entre la atracción observada y la generada por el perfil invertido es muy alto (hasta 1,2 *mGal* en uno de ellos). En el punto de corte con el perfil I-I' se obtiene un espesor de 222 *m*, que prácticamente coincide con los 219 *m* obtenidos en la inversión del perfil I-I'. La profundidad calculada para el punto de corte con el perfil II-II' es de 118 *m*, mientras que en la inversión del perfil II-II' se estimada entre dos prismas de profundidades 77 y 139 *m*. Haciendo la media de estos valores se llega al valor de 108 *m*, valor que concuerda con los 118 *m* calculados para este perfil. Por último, para el corte con el perfil VI-VI' se obtiene una profundidad de 219 *m*.

5.4.5. Perfil V-V'

En la Figura 5.13 (izquierda) se muestran los resultados de la inversión del perfil V-V' con los datos de anomalía extraídos del mapa ajustado mediante «kriging». Se ha

discretizado el subsuelo en 35 prismas y se ha utilizado un factor de balance para los constreñimientos relativos $\mu^r = 2,5 \cdot 10^{-6}$. El problema converge tras 8 iteraciones. En la parte O del modelo (zona NO del polje) aparece la serie de máximos y mínimos de profundidad ya vistos en la inversión del perfil IV-IV'. El primer máximo alcanza los 176 m, el mínimo los 25 m y el segundo máximo llega a los 176 m. Al igual que en el caso anterior, las profundidades máximas se sobreestiman (excepto en la zona de mínima profundidad) si tomamos como referencia los resultados de García-Jerez y otros (2006). En el punto de corte con los perfiles I-I' y VI-VI' se obtiene un espesor de 318 m, cercano a los 328 m estimados en la inversión del perfil I-I'. La profundidad para el punto de corte con el perfil II-II' está entre dos prismas, de grosores 204 m y 191 m. Con el perfil III-III', el punto de corte se localiza a una profundidad de 110 m, 15 m menos que en la inversión del perfil III-III'.

En la parte derecha de la figura se muestra el perfil generado por la proyección de los puntos más cercanos a la traza. Se compone de 17 puntos con una irregularidad. El subsuelo se divide en 18 prismas de 597 m de anchura. El factor de balance para los constreñimientos relativos es $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-7}$ y el problema converge tras 10 iteraciones. En la parte O del perfil se repite la serie de máximos y mínimos de espesor de la capa de sedimentos vista en la inversión anterior, aunque en este caso las diferencias no son tan pronunciadas, debido a que los puntos de dato que se proyectan en el perfil están alejados de los máximos y mínimos de anomalía local generados por el «kriging». En el punto de corte con los perfiles I-I' y VI-VI' el espesor obtenido es de 316 m, acorde con los 326 m calculados en la inversión del perfil I-I'. Para el punto de corte con el perfil II-II', el valor está entre dos prismas, de grosores 262 m y 178 m. Por último, en el punto de corte con el perfil III-III' el resultado es de entre 115 y 121 m, valor muy próximo a los 122 m obtenidos en la inversión del perfil III-III'.

5.4.6. Perfil VI-VI'

En la Figura 5.14 (izquierda) se muestran los resultados de la inversión del perfil VI-VI' con los datos de anomalía extraídos del mapa ajustado mediante «kriging». Se ha

discretizado el subsuelo en 12 prismas y se ha utilizado un factor de balance para los constreñimientos relativos $\mu^r = 2,0 \cdot 10^{-6}$. El problema converge tras 8 iteraciones. En el punto de corte con los perfiles I-I' y V-V' se obtiene un espesor de entre 275 y 302 m, mientras que en las inversiones de los perfiles I-I' y V-V' se estimaron valores de 328 y 318, respectivamente. En el corte con el perfil II-II' se obtiene una profundidad entre 302 y 274 m, frente a los 336 m calculados en la inversión del perfil II-II'. Con respecto al corte con el perfil III-III', la profundidad estimada es de 323 m, acorde con los 329 m obtenidos en la inversión del perfil III-III'. Por último, en el corte con el perfil IV-IV' la profundidad calculada es de 228 m.

En la parte derecha de la figura se muestra el perfil generado por la proyección de los puntos más cercanos a la traza. Se compone de 10 puntos con una distribución regular. El subsuelo se divide en 11 prismas de 318 m de anchura. El factor de balance para los constreñimientos relativos es $\mu^r = 2,5 \cdot 10^{-6}$ y el problema converge tras 7 iteraciones. La profundidad del punto de corte con los perfiles I-I' y V-V' es de 298 m, ligeramente inferior a los 326 y 316 m obtenidos tras la inversión de los perfiles I-I' y V-V', respectivamente. En el corte con el perfil II-II' da una profundidad de 293 m, acorde con los 305 m obtenidos en la inversión del perfil II-II'. En el corte con el perfil III-III' se obtiene un espesor para la capa de sedimentos de 319 m, ligeramente inferior al valor calculado en la inversión del perfil III-III', igual a 336 m. Con el perfil IV-IV', la profundidad calculada es de 222 m.

5.5. Conclusiones

Se ha aplicado un método de inversión gravimétrica en cuencas sedimentarias a un conjunto de datos reales procedentes del polje de Zafarraya (Granada). Se han hecho dos inversiones de 4 perfiles, cuyos datos de anomalía local se han obtenido por interpolación mediante «kriging» y por proyección de la anomalía del punto más cercano. Las profundidades obtenidas en los puntos de cruce de los perfiles pueden verse en la Tabla 5.3. Han sido calculadas como la media de todos los valores obtenidos los puntos comunes de cada perfil implicado.

Las diferencias entre las profundidades obtenidas entre los perfiles obtenidos por in-

Perfiles	kriging	proyección
I-IV	182	221
I-V-VI	313	313
II-IV	154	111
II-V	212	242
II-VI	304	299
III-V	118	119
III-VI	326	328
IV-VI	231	220

Tabla 5.3: Profundidades de los puntos de corte entre perfiles (en metros).

terpolación y por proyección de puntos cercanos están dentro del margen de error del 12 – 14 % de la profundidad estimada, excepto en tres puntos de corte entre perfiles.

Comparando los resultados de la inversión gravimétrica con los obtenidos en García-Jerez y otros (2006), se pueden hacer las siguientes apreciaciones:

1. Existe una sobreestimación de la profundidad máxima de la cuenca con respecto a los resultados de García-Jerez y otros (2006).
2. En la Figura 5.4 se ve que, en la parte central de la cuenta, la profundidad de la frontera sedimentos-basamento va aumentando de forma suave en la parte norte, hasta llegar a la zona de máxima magnitud, mientras que en la parte sur tiene una fuerte pendiente. Este comportamiento no queda reflejado claramente en la inversión del perfil VI-VI' (Figura 5.14), donde las variaciones de profundidad son similares en las zonas N y S.

Con respecto a los resultados de Luzón y otros (2009), las profundidades máximas obtenidas son equivalentes (330 m).

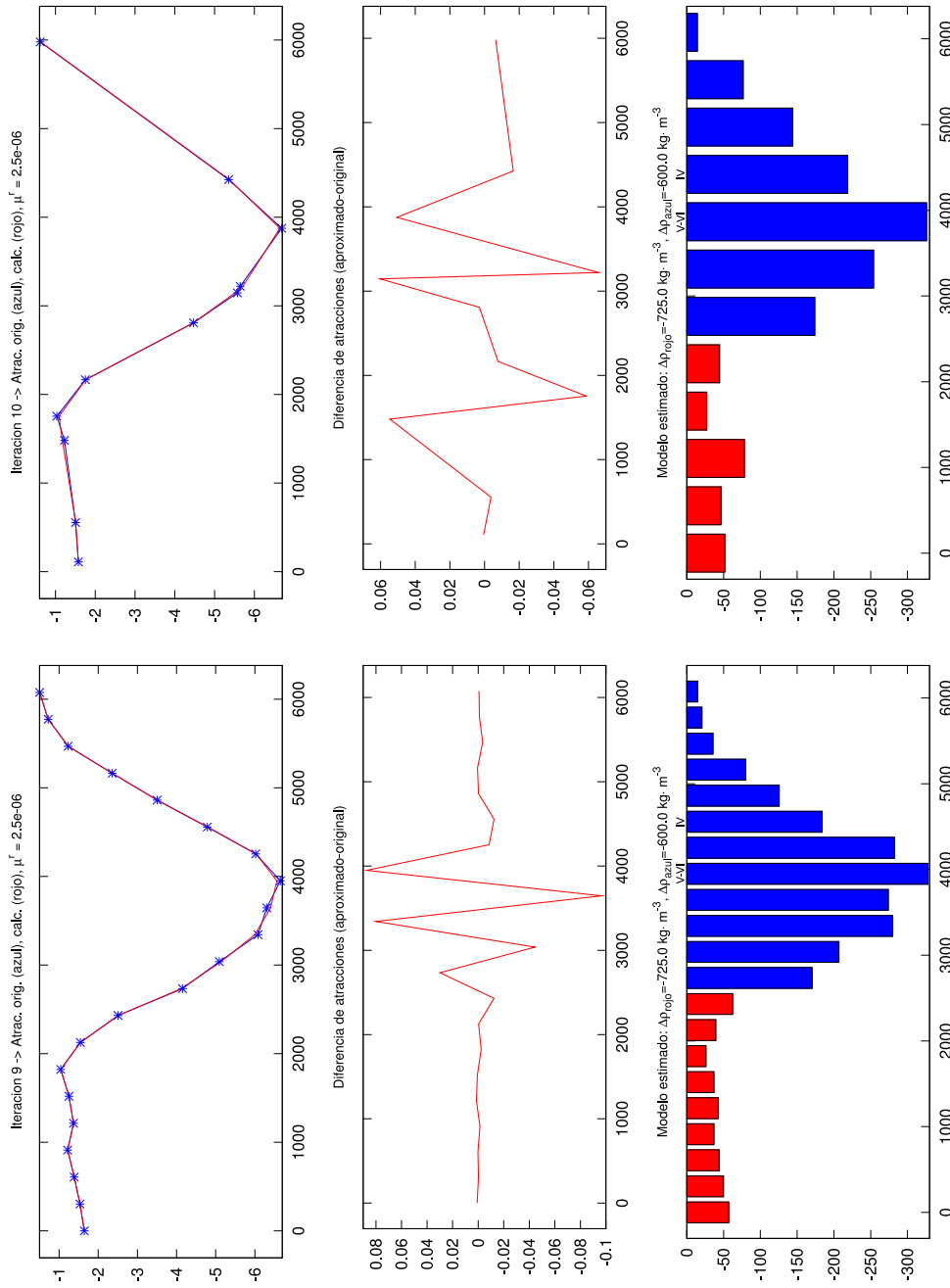


Figura 5.9: Inversión del perfil I-I', con observaciones interpoladas (izquierda) y proyectadas (derecha). Constreñimientos relativos. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_{rojo}^c = -725 kg/m^3$ y $\Delta\rho_{azul}^c = -600 kg/m^3$. Factores de balance: izquierda $\mu^r = 2,5 \cdot 10^{-6}$ y derecha $\mu^r = 2,5 \cdot 10^{-6}$. Valores de gravedad en $mGal$.

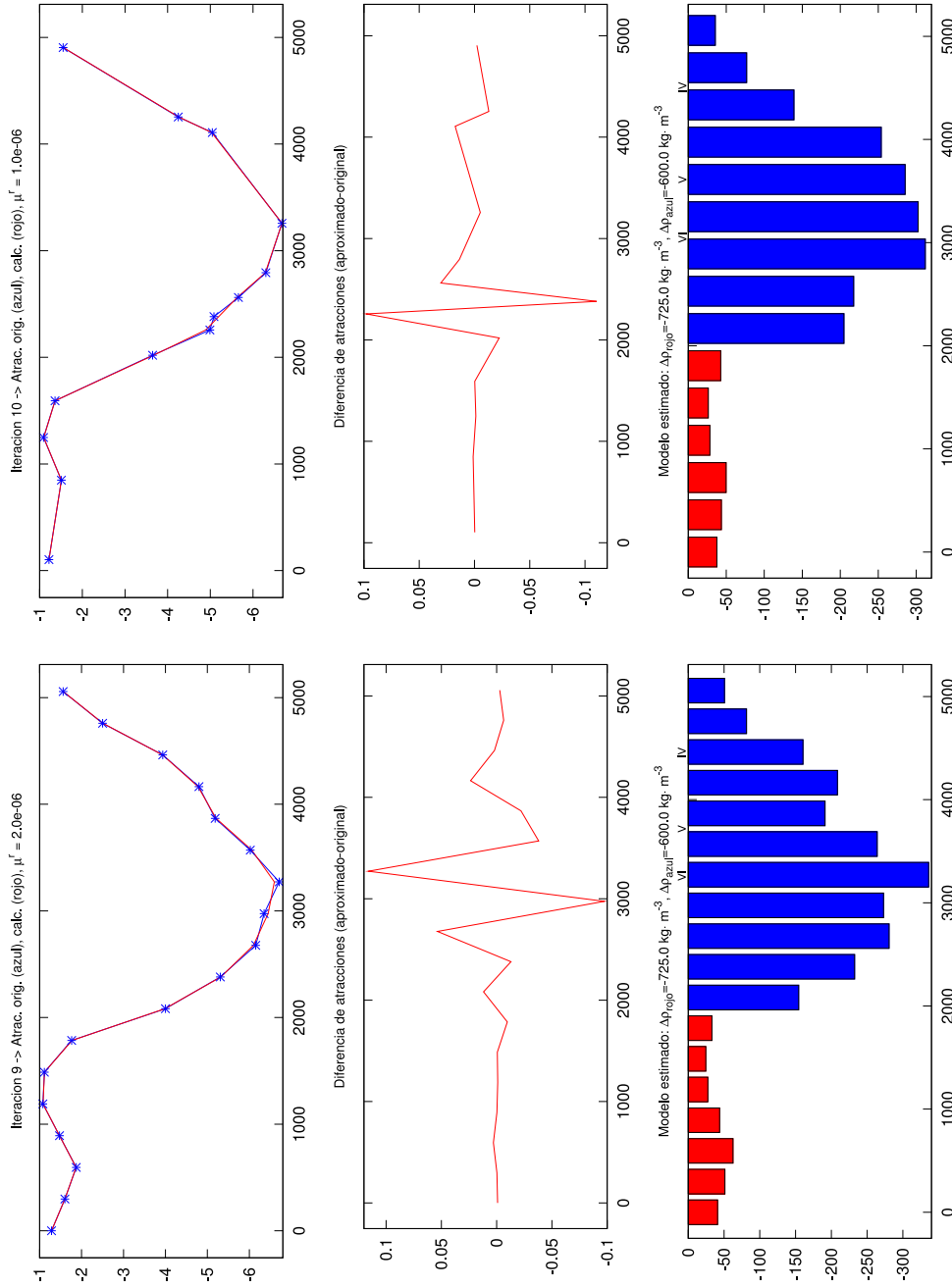


Figura 5.10: Inversión del perfil II-II', con observaciones interpoladas (izquierda) y proyectadas (derecha). Constreñimientos relativos. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_{rojo}^c = -725 \text{ kg/m}^3$ y $\Delta\rho_{azul}^c = -600 \text{ kg/m}^3$. Factores de balance: izquierda $\mu^I = 2,0 \cdot 10^{-6}$ y derecha $\mu^I = 1,0 \cdot 10^{-6}$. Valores de gravedad en $mGal$.

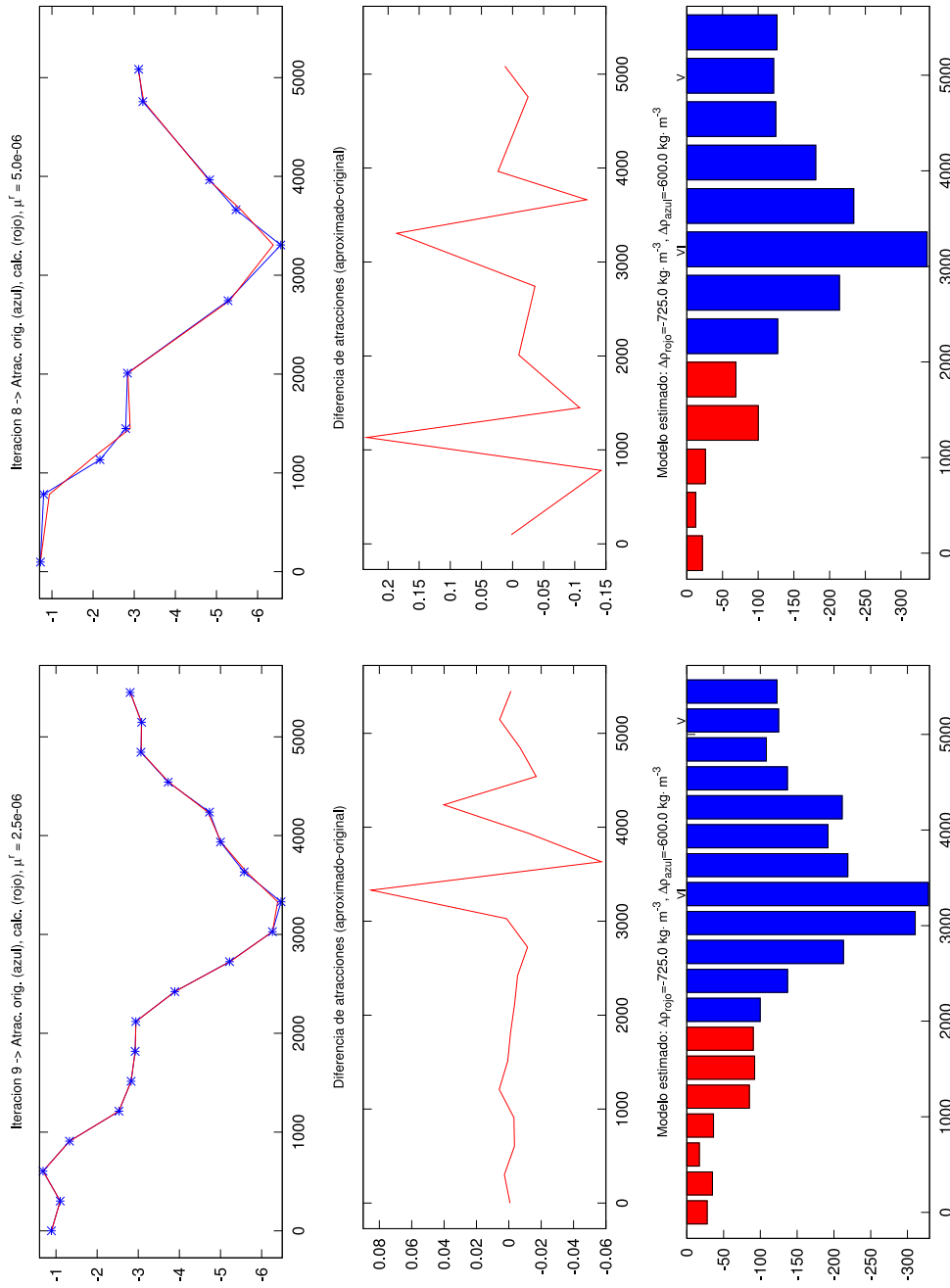


Figura 5.11: Inversión del perfil III-III, con observaciones interpoladas (izquierda) y proyectadas (derecha). Constreñimientos relativos. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_{rojo}^c = -725 \text{ kg/m}^3$ y $\Delta\rho_{azul}^c = -600 \text{ kg/m}^3$. Factores de balance: izquierda $\mu^I = 2,5 \cdot 10^{-6}$ y derecha $\mu^I = 5,0 \cdot 10^{-6}$. Valores de gravedad en $mGal$.

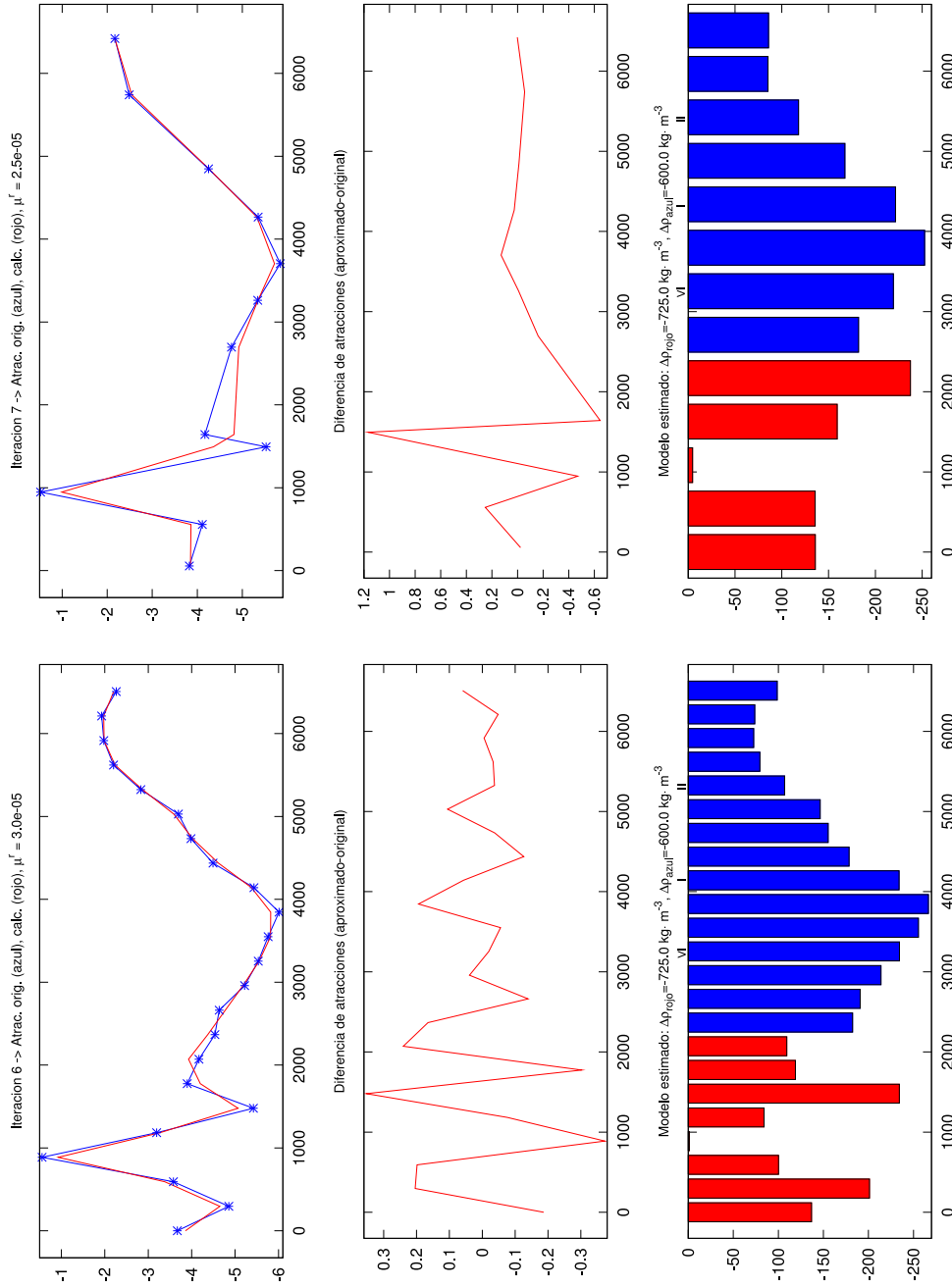


Figura 5.12: Inversión del perfil IV-IV, con observaciones interpoladas (izquierda) y proyectadas (derecha). Constreñimientos relativos. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_{rojo}^c = -725 \text{ kg}/\text{m}^3$ y $\Delta\rho_{azul}^c = -600 \text{ kg}/\text{m}^3$. Factores de balance: izquierda $\mu^I = 3,0 \cdot 10^{-6}$ y derecha $\mu^I = 2,5 \cdot 10^{-6}$. Valores de gravedad en $mGal$.

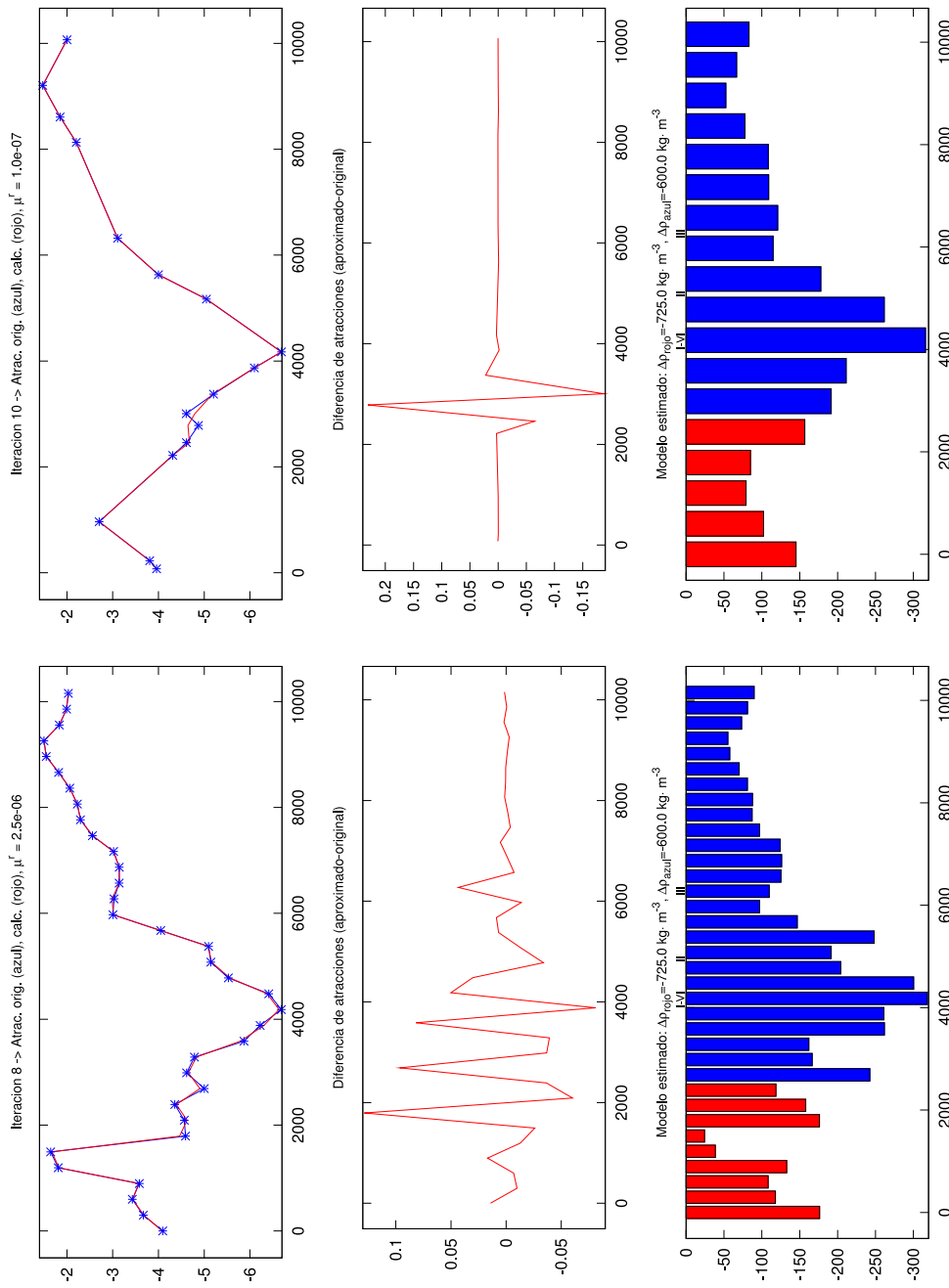


Figura 5.13: Inversión del perfil V-V, con observaciones interpoladas (izquierda) y proyectadas (derecha). Constreñimientos relativos. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_{rojo}^c = -725 \text{ kg}/\text{m}^3$ y $\Delta\rho_{azul}^c = -600 \text{ kg}/\text{m}^3$. Factores de balance: izquierda $\mu^r = 2,5 \cdot 10^{-6}$ y derecha $\mu^r = 1,0 \cdot 10^{-6}$. Valores de gravedad en $mGal$.

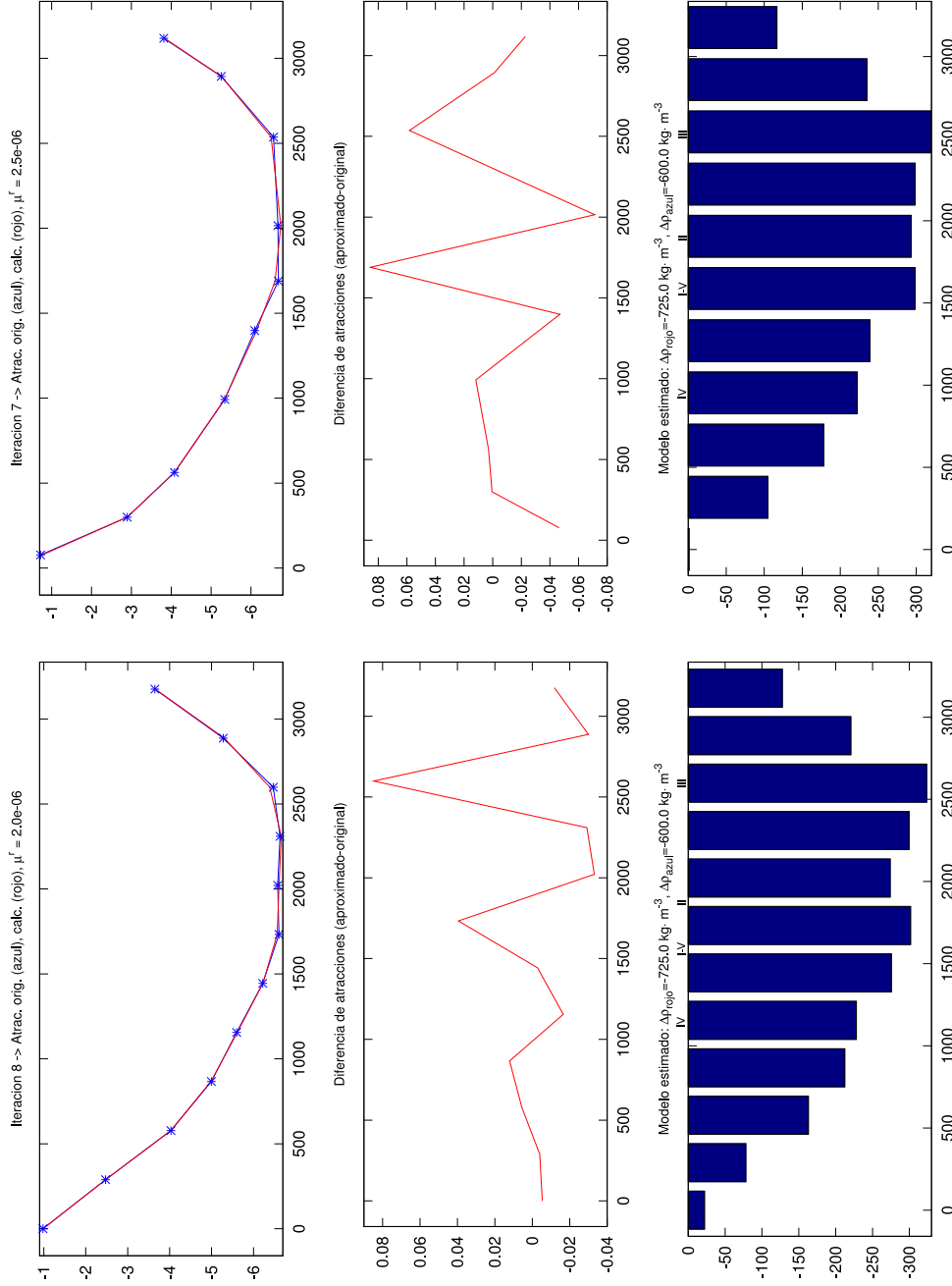


Figura 5.14: Inversión del perfil VI-VI, con observaciones interpoladas (izquierda) y proyectadas (derecha). Constreñimientos relativos. Contrastes de densidad considerados: $\Delta\rho_{rojo}^c = -725 \text{ kg}/\text{m}^3$ y $\Delta\rho_{azul}^c = -600 \text{ kg}/\text{m}^3$. Factores de balance: izquierda $\mu^T = 2,0 \cdot 10^{-6}$ y derecha $\mu^T = 2,5 \cdot 10^{-6}$. Valores de gravedad en $mGal$.

Apéndice A

GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright© 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

<http://fsf.org/>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document “free” in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it

is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The “**Document**”, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “**you**”. You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A “**Modified Version**” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “**Secondary Section**” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “**Invariant Sections**” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The “**Cover Texts**” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may

be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

The “**publisher**” means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below,

such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”). To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying

with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

- B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- D. Preserve all the copyright notices of the Document.
- E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- H. Include an unaltered copy of this License.
- I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published

at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

- K. For any section Entitled “Acknowledgements” or “Dedications”, Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- M. Delete any section Entitled “Endorsements”. Such a section may not be included in the Modified Version.
- N. Do not retitle any existing section to be Entitled “Endorsements” or to conflict in title with any Invariant Section.
- O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version’s license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the

same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled “History” in the various original documents, forming one section Entitled “History”; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete all sections Entitled “Endorsements”.

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy’s public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. RELICENSING

“Massive Multiauthor Collaboration Site” (or “MMC Site”) means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A “Massive Multiauthor Collaboration” (or “MMC”) contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

“CC-BY-SA” means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

“Incorporate” means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is “eligible for relicensing” if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the “with ... Texts.” line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

Bibliografía

- ACAR, R. y VOGEL, C. R. (1994). «Analysis of total variation penalty methods». *Inverse Problems*, **10**, pp. 1217–1229.
- AL-CHALABI, MAHBOUD (1971). «Some studies relating to non uniqueness in gravity and magnetic inverse problems». *Geophysics*, **36(5)**, pp. 835–855.
- ARAÑA, V.; CAMACHO, A. G.; GARCÍA, A.; MONTESINOS, F. G.; BLANCO, I.; VIEIRA, R. y FELPETO, A. (2000). «Internal structure of Tenerife (Canary Islands) based on gravity, aeromagnetic and volcanological data». *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **103(1–4)**, pp. 43–64.
- BARBOSA, VALÉRIA C. F. y SILVA, JOÃO B. C. (1994). «Generalized compact gravity inversion». *Geophysics*, **59(1)**, pp. 57–68.
- BARBOSA, VALÉRIA C. F.; SILVA, JOÃO B. C. y MEDEIROS, WALTER E. (1997). «Gravity inversion of basement relief using approximate equality constraints on depths». *Geophysics*, **62(6)**, pp. 1745–1757.
- (1999). «Stable inversion of gravity anomalies of sedimentary basins with nonsmooth basement reliefs and arbitrary density contrast variations». *Geophysics*, **64(3)**, pp. 754–764.
- BARD, Y. (1974). *Nonlinear Parameter Estimation*. Academic Press Inc., New York.
- BARZAGHI, R. y SANSÓ, F. (1983). «Sulla stima empirica della funzione di covarianza». *Bollettino di geodesia e scienze affini*, **42(7)**, pp. 389–415.

- BELTRÃO, J. F.; SILVA, J. B. C. y COSTA, J. C. (1991). «Robust polynomial fitting method for regional gravity estimation». *Geophysics*, **56(1)**, pp. 80–89.
- BERTETE-AGUIRRE, H.; CHERKAEV, E. y ORISTAGLIO, M. (2002). «Non-smooth gravity problem with total variation penalization functional». *Geophysical Journal International*, **149(2)**, pp. 499–507.
- BOTT, M. H. P. (1960). «The use of rapid digital computing methods for direct gravity interpretation of sedimentary basins». *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **3**, pp. 63–67.
- CAMACHO, A. G.; MONTESINOS, F. G.; VIEIRA, R. y ARNOSO, J. (2001). «Modelling of crustal anomalies of Lanzarote (Canary Islands) in light of gravity data». *Geophysical Journal International*, **147(2)**, pp. 403–414.
- CAMACHO, ANTONIO G.; MONTESINOS, FUENSANTA G. y VIEIRA, RICARDO (2000). «Gravity inversion by means of growing bodies». *Geophysics*, **65(1)**, pp. 95–101.
- (2002). «A 3-D gravity inversion tool based on exploration of model possibilities». *Computers and Geosciences*, **28(2)**, pp. 191–204.
- CAMACHO, ANTONIO G.; NUNES, J. CARLOS; ORTIZ, ESTHER; FRANÇA, ZILDA y VIEIRA, R. (2007). «Gravimetric determination of an intrusive complex under the Island of Faial (Azores): some methodological improvements». *Geophysical Journal International*, **171(1)**, pp. 478–494.
- CHAI, Y. y HINZE, W. J. (1988). «Gravity inversion of an interface above which the density contrast varies exponentially with depth». *Geophysics*, **53**, pp. 837–845.
- CHAKRAVARTHI, V. (1995). «Gravity Interpretation of Nonoutcropping Sedimentary Basins in which the Density Contrast Decreases Parabolically with Depth». *Pure and Applied Geophysics*, **145(2)**, pp. 327–335.

- CHAKRAVARTHI, V.; RAGHURAM, H. M. y SINGH, S. B. (2002). «3-D forward gravity modeling of basement interfaces above which the density contrast varies continuously with depth». *Computers and Geosciences*, **28(1)**, pp. 53–57.
- CHAKRAVARTHI, V.; SINGH, S. B. y BABU, G. A. (2001). «INVER2DBASE—A program to compute basement depths of density interfaces above which the density contrast varies with depth». *Computers and Geosciences*, **27(10)**, pp. 1127–1133.
- CHAKRAVARTHI, V. y SUNDARARAJAN, N. (2004). «Automatic 3-D gravity modeling of sedimentary basins with density contrast varying parabolically with depth». *Computers and Geosciences*, **30(6)**, pp. 601–607.
- (2005). «Gravity modeling of 2^{1/2}-D sedimentary basins—a case of variable density contrast». *Computers and Geosciences*, **31(7)**, pp. 820–827.
- (2006). «Gravity Anomalies of 2.5-D Multiple Prismatic Structures with Variable Density: A Marquardt Inversion». *Pure and Applied Geophysics*, **163(1)**, pp. 229–242.
- (2007). «3D gravity inversion of basement relief—A depth-dependent density approach». *Geophysics*, **72(2)**, pp. 123–132.
- CONSTABLE, STEVEN C.; PARKER, ROBERT L. y CONSTABLE, CATHERINE G. (1987). «Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data». *Geophysics*, **52(3)**, pp. 289–300.
- CORDELL, L. (1973). «Gravity analysis using an exponential density-depth function—San Jacinto Graben, California». *Geophysics*, **38**, pp. 684–690.
- CORDELL, L. y HENDERSON, R. G. (1968). «Iterative three-dimensional solution of gravity anomaly using a digital computer». *Geophysics*, **33**, pp. 596–601.
- GARCÍA-JEREZ, ANTONIO; LUZÓN, FRANCISCO; NAVARRO, MANUEL y PÉREZ-RUIZ, J. ALFONSO (2006). «Characterization of the Sedimentary Cover of the Zafarraya Basin, Southern Spain, by Means of Ambient Noise». *Bulletin of the Seismological Society of America*, **96(3)**, pp. 957–967.

- GAVILÁN MORENO, CARLOS JULIÁN; ORTEGA VARGAS, RAFAEL FRANCISCO y NAVARRO IÁÑEZ, JUAN ANTONIO (1996). «Nueva interpretación de los datos sobre las direcciones principales de drenaje del macizo kárstico de Sierra Gorda. (Granada)». En: *IV simposio sobre el agua en Andalucía*, volumen I, pp. 259–269.
- GOTTSMANN, J.; CAMACHO, A. G.; MARTÍ, J.; WOOLLER, L.; FERNÁNDEZ, J.; GARCÍA, A. y RYMER, H. (2008). «Shallow structure beneath the Central Volcanic Complex of Tenerife from new gravity data: Implications for its evolution and recent reactivation». *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **168(3–4)**, pp. 212–230.
- HANSEN, C. (1998). «Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical aspects of linear inversion». *Informe técnico*, Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU, Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby.
<http://www2.imm.dtu.dk/pubdb>
- LITINSKY, V. A. (1989). «Concept of effective density: Key to gravity determination for sedimentary basins». *Geophysics*, **54**, pp. 1474–1482.
- LÓPEZ-CHICANO, M. (1992). *Contribución al conocimiento del sistema hidrogeológico kárstico de Sierra Gorda y su entorno (Granada y Málaga)*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.
- LÓPEZ CHICANO, M. y PULIDO-BOSCH, A. (2002). «Síntesis hidrogeológica de los acuíferos de Sierra Gorda, polje de Zafarraya y Hacho de Loja». En: *Aportaciones al conocimiento de los acuíferos andaluces. Libro homenaje a Manuel del Valle Cardenete*, pp. 311–340. Instituto Geológico y Minero de España.
- LOWRIE, WILLIAM (1997). *Fundamentals of Geophysics*. Cambridge University Press.
- LUZÓN, F.; GARCÍA-JEREZ, A.; PEÑA, J. A.; TEIXIDÓ, T.; CAMACHO, A. G.; FERNÁNDEZ, J.; CARMONA, E.; NAVARRO, M. y SANTOYO, M. A. (2009). «A comprehensive study to estimate the hard basement of Zafarraya basin (southern Spain)». 8th In-

- ternational Workshop on Seismic Microzoning Risk Reduction, 15–18 March, Almería, Spain.
- MADSEN, K.; NIELSEN, H. B. y TINGLEFF, O. (2004). «Methods for non-linear least squares problems». *Informe técnico*, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU, Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby.
<http://www2.imm.dtu.dk/pubdb>
- MARQUARDT, DONALD W. (1963). «An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters». *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **11(2)**, pp. 431–441.
- MEDEIROS, W. E. y SILVA, JOÃO B. C. (1995). «Geophysical inversion using approximate equality constraints». En: *65th Ann. Internat. Mtg., Expanded Abstracts*, pp. 799–802. Soc. Expl. Geophys..
- MICKUS, K. L.; AIKEN, C. L. V. y KENNEDY, W. D. (1991). «Regional-residual gravity anomaly separation using the minimum-curvature technique». *Geophysics*, **56(2)**, pp. 279–283.
- MONTESINOS, F. G. (1999). *Inversión gravimétrica 3D por técnicas de evolución. Aplicación a la isla de Fuerteventura*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Ciencias Matemáticas. Sección departamental de Astronomía y Geodesia.
- MONTESINOS, F. G.; CAMACHO, A. G.; NUNES, J. C.; OLIVEIRA, C. S. y VIEIRA, R. (2003). «A 3-D gravity model for a volcanic crater in Terceira Island (Azores)». *Geophysical Journal International*, **154(2)**, pp. 393–406.
- MORITZ, HELMUT (1980). *Advanced physical geodesy*. Herbert Wichmann, Karlsruhe, Germany.
- MURTHY, I. V. R. y RAO, D. B. (1979). «Gravity anomalies of two dimensional bodies

- of irregular cross section with density contrast varying with depth». *Geophysics*, **44**, pp. 1525–1530.
- NETTLETON, L. L. (1939). «Determination of density for the reduction of gravimeter observations». *Geophysics*, **4(3)**, pp. 176–183.
- NIELSEN, H. B. (1999). «Damping Parameter in Marquardt's Method». *Informe técnico*, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU, Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby.
<http://www2.imm.dtu.dk/pubdb>
- NUNES, JOÃO C.; CAMACHO, ANTONIO; FRANÇA, ZILDA; MONTESINOS, FUENSANTA G.; ALVES, MADALENA; VIEIRA, RICARDO; VÉLEZ, EMILIO y ORTIZ, ESTHER (2006). «Gravity anomalies and crustal signature of volcano-tectonic structures of Pico Island (Azores)». *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, **156(1–2)**, pp. 55–70.
- PORTNIAGUINE, OLEG y ZHDANOV, MICHAEL S. (1999). «Focusing geophysical inversion images». *Geophysics*, **64(3)**, pp. 874–887.
- RAO, C. V.; CHAKRAVARTHI, V. y RAJU, M. L. (1994). «Forward modeling: gravity anomalies of two-dimensional bodies of arbitrary shape with hyperbolic and parabolic density functions». *Computers and Geosciences*, **20(5)**, pp. 873–880.
- RAO, D. B. (1986). «Modelling of sedimentary basins from gravity anomalies with variable density contrast». *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **84**, pp. 207–212.
- (1990). «Analysis of gravity anomalies of sedimentary basins by an asymmetrical trapezoidal model with quadratic density function». *Geophysics*, **55(2)**, pp. 226–231.
- REICHERTER, K. R.; JABALOY, A.; GALINDO-ZALDÍVAR, J.; RUANO, P.; BECKERHEIDMANN, P.; MORALES, J.; REISS, S. y GONZÁLEZ-LODEIRO, F. (2003). «Repeated paleoseismic activity of the Ventas de Zafarraya fault (S Spain) and its relation with

- the 1884 Andalusian earthquake». *International Journal of Earth Sciences*, **92(6)**, pp. 912–922.
- RENÉ, R. M. (1986). «Gravity inversion using open, reject, and “shape-of-anomaly” fill criteria». *Geophysics*, **51(4)**, pp. 988–994.
- ROTHMAN, DANIEL H. (1985). «Nonlinear inversion, statistical mechanics, and residual statics estimation». *Geophysics*, **50(12)**, pp. 2784–2796.
- RUDIN, L. I.; OSHER, S. y FATEMI, E. (1992). «Nonlinear total variation based noise removal algorithms». *Physica D*, **60**, pp. 259–268.
- SILVA, JOÃO B. C.; COSTA, DENIS C. L. y BARBOSA, VALÉRIA C. F. (2006). «Gravity inversion of basement relief and estimation of density contrast variation with depth». *Geophysics*, **71(5)**, pp. J51–J58.
- SILVA, JOÃO B. C.; MEDEIROS, WALTER E. y BARBOSA, VALÉRIA C. F. (2001a). «Pitfalls in Nonlinear Inversion». *Pure and Applied Geophysics*, **158(5–6)**, pp. 945–964.
- (2001b). «Potential-field inversion: Choosing the appropriate technique to solve a geologic problem». *Geophysics*, **66(2)**, pp. 511–520.
- SILVA, JOÃO B. C.; TEIXEIRA, WLAMIR A. y BARBOSA, VALÉRIA C. F. (2008). «Gravity data as a tool for landfill study». *Environmental Geology*.
- SMITH, J. T. y BOOKER, J. R. (1991). «Rapid inversion of two- and three-dimensional magnetotelluric data». *Journal of Geophysical Research*, **96**, pp. 3905–3922.
- TANNER, J. G. (1967). «An automated method of gravity interpretation». *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **13**, pp. 339–347.
- TARANTOLA, ALBERT (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.

-
- TELFORD, W. M.; GELDART, L. P.; SHERIFF, R. E. y KEYS, D. A. (1976). *Applied Geophysics*. Cambridge University Press.
- TIEDE, C.; CAMACHO, A. G.; GERSTENECKER, C.; FERNÁNDEZ, J. y SUYANTO, I. (2005). «Modeling the density at Merapi volcano area, Indonesia, via the inverse gravimetric problem». *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, **6(9)**.
- TIKHONOV, A. N. y ARSENIN, V. Y. (1977). *Solutions of ill-posed problems*. V. H. Winston and Sons, Washington, D. C..
- TORGE, WOLFGANG (1989). *Gravimetry*. Walter de Gruyter, Berlin.
- ZHDANOV, MICHAEL S. (2002). *Geophysical inverse theory and regularization problems*. Número 36 en *Methods in Geochemistry and Geophysics*. Elsevier.