Universidad de Madrid - Facultad de Ciencias

SEMINARIO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA
(Adherido a la Unión Nacional de Astronomía
y Ciencias Afines)

Publicación N.º 41

SOBRE LA ECUACION DE LAPLACE

POR

FRANCISCO MÚGICA

PUBLICADO EN «VRANIA» NÚM. 246

MADRID
1958

SOBRE LA ECUACIÓN DE LAPLACE

POR FRANCISCO MÚGICA (*)

Una de las mayores contribuciones que la Astronomía Geodésica presta a la Geodesia es la posibilidad de la reorientación de las redes geodésicas, con la consiguiente mejora en la situación de los vértices, que tiene su fundamento en la Ecuación de Laplace.

En estos últimos tiempos los estudios sobre esta cuestión se han multiplicado notablemente y de resultas de ello reina una cierta disparidad de criterios, que llega en algunos puntos hasta mantener opiniones opuestas, por lo que parece conveniente dar una visión general de este interesante problema que pueda servir de base a aquéllos que se interesen sobre estos aspectos de la Geodesia Superior.

Para una mejor comprensión dividiremos el presente trabajo en las siguientes partes:

1. Introducción.
2. La desviación de la vertical; su cálculo.
3. La ecuación de Laplace.
4. Introducción de la ecuación de Laplace en la compensación de una red.
5. Ecuación de condición derivada de la de Laplace (de acuerdo de acimutes).
6. La repartición de los puntos Laplace.

1. INTRODUCCIÓN.

Fué Laplace hace más de 150 años (Méchanique céleste. III. 1799) quien dió a conocer los fundamentos teóricos de la ecuación que hoy, en su honor, lleva su nombre; sin embargo, antiguamente, esta importantísima relación sirvió exclusivamente como control ya que, aun reconociendo su importancia, no se utilizaba como un decisivo instrumento para mejorar la situación de los puntos de una red geodésica, sino más bien como comprobación de la correcta realización de ésta y para la determinación de las componentes de la desviación de la

(*) Publicación n.º 41 del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad de Madrid

vertical, todo lo cual unido a los valores obtenidos por la compensación de la red debía reportar servicios para la determinación del geoide y del elipsoide que mejor se adaptara a él.

Se caracteriza el siglo XIX por haberse iniciado en él los primeros contactos internacionales encaminados a conseguir una estrecha colaboración de todos los países con vistas a una unificación de los trabajos geodésicos, a la par que se completaban la mayor parte de las redes nacionales y se llevaban a cabo las consiguientes compensaciones, si bien reducidas al ámbito de cada país. Es en el siglo XX cuando se realizan las compensaciones de grandes redes geodésicas (Países bálticos, Europa central, etc.) que requieren detenidos estudios para obtener, no ya un control, sino un mejoramiento de la situación de los puntos o vértices de la red, en especial para los alejados del fundamental o datum y en los cuales, una perniciosa acumulación de errores puede desviarlos sensiblemente de su correcta posición.

La medición de bases auxiliares, profundamente facilitada por la sucesiva aparición de los hilos Invar, el geodímetro, el telurómetro, etc., permite conservar, con señalado éxito, la precisión alcanzada en la medida de la base principal, mientras que las observaciones astronómicas en varios puntos de la red son el instrumento primordial para llevar a cabo las reorientaciones de ellas, las cuales, por causa de la acumulación de errores, han sufrido un a modo de giro alrededor del punto fundamental.

Es en las antiguas triangulaciones donde más patente se hace este defecto de la orientación, ya que, por ser normalmente algo erróneo el acimut en el datum, la sucesiva adición de diferencias de direcciones observadas acaba haciendo notoria, a alguna distancia de aquél, el desplazamiento sufrido por los vértices.

A pesar de que tanto los fundamentos como el empleo de la ecuación de Laplace eran ya de antiguo conocidos, en la práctica de las compensaciones esta ecuación no había sido tenida en cuenta casi nunca y no deja de ser revelador el hecho de que, cuando en 1938 la AIGG trató de iniciar los trabajos de compensación en bloque de una red europea, al preguntar a los países interesados si en las compensaciones de sus redes habían sido tenidas en cuenta las ecuaciones de condición dimanantes de la de Laplace, de las 22 naciones consultadas sólo Finlandia pudo contestar afirmativamente.

Generalmente se considera a V. R. Oländer (21) * como el primero que introdujo la ecuación de Laplace en la compensación geométrica de una red geodésica; desde luego no debe de perderse de vista que las dificultades antes existentes en lo que se refiere a la determinación de longitudes astronómicas pudieron significar, en parte al

* Los números corresponden a la Bibliografía inserta al final.

menos, un freno al empleo sistemático de aquéllas. Diferentes autores han llevado a cabo estudios de interés sobre la forma de incluir estas ecuaciones en la compensación general y como trabajo digno de interés es digno de reseñar el correspondiente a la red de Europa central (Veröff. d. Inst. für Erdmessung. Nr 1-6. Bamberg 1949).

En la Bibliografía inserta al final de estas líneas —lejos de nuestro ánimo el intentar dar una pedantesca demostración de obras conocidas— hemos querido proporcionar una relación, lo más completa posible, de aquellos libros y artículos que se refieran especialmente a este tema, que confiamos permitirá a los ya iniciados el profundizar en tan interesante cuestión.

2. La desviación de la vertical; su cálculo.

Recordemos ligeramente una serie de conceptos de sobra conocidos pero que no estará de más puntualizar: ya es sabido que el geoide puede asimilarse, en una primera aproximación, a un elipsoide de revolución y conviene fijarse en que:

—un elipsoide de revolución, que tomamos como superficie de referencia para los cálculos geodésicos en una región, viene definido por sus parámetros (semieje mayor y achatamiento) y por la condición de que su eje de rotación se mantenga paralelo al eje de la Tierra;

—en el punto fundamental o datum de la triangulación se consideran tangentes el citado elipsoide y el geoide, para lograr lo cual se traslada aquél, manteniendo el paralelismo de ejes antes aludido;

—por tanto dos redes geodésicas con distinto punto fundamenttal, pero calculadas sobre un elipsoide de idénticos parámetros, no lo han sido sobre elipsoides coincidentes;

—se conoce con el nombre de *elipsoide terrestre* a aquel cuyo eje de rotación coincide con el eje terrestre, sus centros de gravedad son asimismo coincidentes y su superficie es la que más se asemeja, en su totalidad, a la del geoide.

Desde luego, por tener el geoide realidad física, el denominado elipsoide terrestre queda perfectamente definido y permite pasar o referirse a aquél por intermedio de una superficie geométrica de revolución, con el no ligero inconveniente de ser sus parámetros totalmente desconocidos. Por ello parece de verdadero interés la proposición de Vening-Meinesz ("Les principes fondamentaux de la Géodésie". Festschrift C. F. Baeschlin. Zurich 1957) que señala la conveniencia de elegir para todas las triangulaciones un mismo elipsoide de referencia, cuyo eje de rotación y centro de gravedad cumplan las mismas condiciones que los del elipsoide terrestre y cuyos parámetros sean conocidos, proponiendo para éstos los actuales del Internacional o Hayford.

Tomado un punto de la superficie terrestre, por él pasará una normal y sólo una al elipsoide de referencia considerado, la cual será una línea recta; mas considerado dicho punto como perteneciente a una superficie de nivel es inmediato deducir que, por no ser éstas paralelas, la vertical, es decir la línea que une el centro de gravedad de la tierra con dicho punto y corta normalmente a todas las superficies de nivel que atraviesa, no será recta sino ligeramente curvada; la tangente en un punto cualquiera de esta línea representará, lógicamente, la dirección de la vertical en dicho punto.

Forman pues un ángulo perfectamente definido la normal al elipsoide que pasa por un punto dado y la dirección de la vertical en él; este ángulo se denomina: *desviación de la vertical en dicho punto con relación al elipsoide de referencia tomado.* Se hace, por tanto, necesario indicar claramente cuál es el elipsoide de referencia y cómo está determinado (o sea: sus parámetros y el lugar o punto fundamental donde se considera tangente al geoide), ya que para un punto dado permanecen, diríamos inmutables: el citado punto —vértice del ángulo— y la dirección de la vertical —un lado—; el otro lado depende de la superficie de referencia elegida.

En el caso de que ésta última sea el elipsoide terrestre queda ya perfectamente definido este último lado y por consiguiente el ángulo formado, que recibe entonces el nombre de: desviación absoluta de la vertical.

La desviación de la vertical (θ) puede descomponerse en dos componentes: una en sentido Norte-Sur (ξ) y otra en Este-Oeste (η), representándose por γ el acimut Norte del plano de desviación; el valor θ suele llamarse *desviación total de la vertical* y no debe de confundirse con la expresión "desviación absoluta" antes definida.

Para el cálculo de la desviación en un punto se han de comparar los valores de las coordenadas astronómicas (que corresponden a la vertical del lugar) con los de las geodésicas (motivados por cálculos sobre el elipsoide, o sea obtenidos mediante el empleo de los métodos normales de Geodesia Matemática para deducir finalmente la latitud, longitud y acimut de una dirección sobre el elipsoide). Surge ahora un inconveniente: si bien los cálculos de la triangulación se efectúan sobre el elipsoide elegido, la observación de las direcciones se ha llevado a cabo sobre la superficie física de la tierra —y por tanto en diferentes superficies de nivel— reduciéndose aquéllas al nivel del mar del modo ya conocido:

—el valor astronómico de la latitud del datum se reduce al nivel del mar, que en ese lugar es tangente al elipsoide de referencia;

—análoga reducción se efectúa con la base medida;

—tiene lugar una corrección al acimut de las visuales por causa de la altitud del punto visado;

—asimismo se lleva a cabo la reducción al acimut de la línea geodésica.

De este modo (fig. 1) la triangulación efectuada sobre la superficie terrestre (A, B, C,..) se la ha trasladado al geoide (Ag, Bg, Cg,..) según la normal al elipsoide en cada punto; ahora bien, ¿es lícito calcularla como si estuviera efectuada sobre el elipsoide?, ¿qué corrección habría que introducir para realizar ese traslado? (Vening-Meinesz propone que las estaciones se proyecten sobre el nivel del mar por mediación de la vertical; sobre tan espinosa cuestión que no deja de presentar serios inconvenientes y positivas ventajas no vamos a tratar ahora); parece demostrado que los errores actuales en medición de ángulos son superiores a las discrepancias posibles entre las longitudes de las líneas geodésicas de los triángulos directamente medibles y los valores que se obtendrían supuesta la triangulación efectuada sobre el elipsoide de referencia, en especial si se ha evitado la existencia de visuales con fuerte inclinación, caso normal en las redes de I orden.

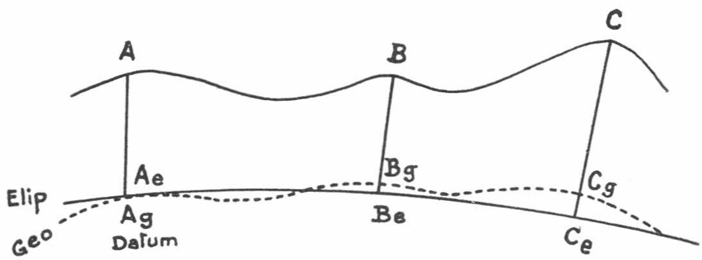


Fig. 1

Por otra parte, elegido un elipsoide de referencia, se tiene la casi completa certeza de que, incluso en las zonas más alejadas del datum, las ondulaciones del geoide no son tan acusadas como para que la separación entre éste y aquél hagan temer la presencia de causas de error que eviten el anterior proceso de cálculo. Según Helmert el cálculo teórico indica que, bajo el macizo de los Alpes, la elevación del geoide sobre el elipsoide debería ser de 200 m., mas en realidad, tanto con ayuda de triangulaciones, como con el auxilio de medidas gravimétricas se ha puesto de manifiesto que dicha elevación es inferior a 10 m.

En resumen: actualmente se puede dar por válido el cálculo sobre el elipsoide de referencia como si la triangulación estuviese realizada en él.

Obtengamos ahora el valor de la desviación total y sus componentes (fig. 2): Sea sobre el elipsoide el punto P_1 de una triangulación y de las rectas que de él parten Z^g representa la normal al elipsoide, Z^a la dirección de la vertical, N es una paralela al eje de rotación y P_2 otro punto del elipsoide al que se visa desde P_1.

Tomando una esfera de radio unidad y centro P_1 las trazas de las citadas líneas pueden verse en la figura inferior y en ella representan:

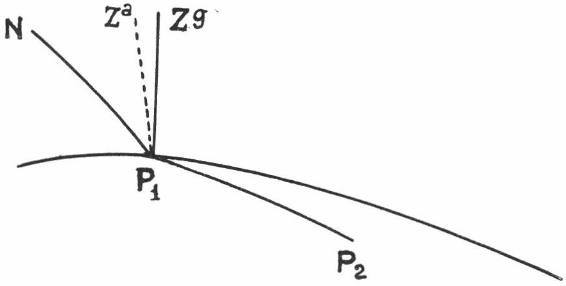
θ, ξ, η: la desviación de la vertical en el punto P_1 y sus componentes

γ^g, γ^a : los acimutes norte, geodésico y astronómico, del plano de desviación

α^g, α^a : los acimutes norte, geodésico y astronómico, de la visual P_1P_2

$\Delta\lambda = \lambda^a - \lambda^g$: la diferencia de longitudes, astronómica menos geodésica, de P_1

ζ^g, ζ^a : las distancias cenitales geodésica y astronómica, es decir, respecto a la normal al elipsoide o respecto a la vertical en P_1, de la visual P_1P_2.



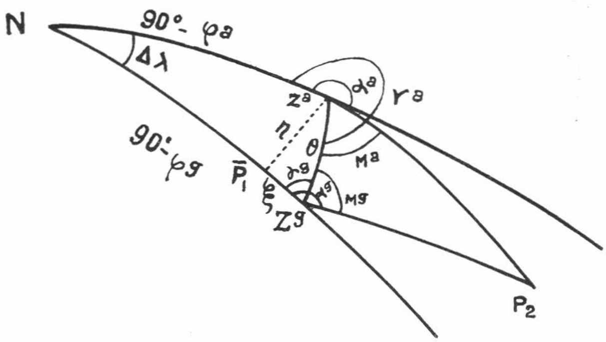


Fig. 2

La desviación total es en función de sus componentes, dada la pequeñez del triángulo esférico $Z^a\,Z^g\,\overline{P}_1$:

$$\theta = \eta \cdot \operatorname{cosec} \gamma^g = \xi \cdot \sec \gamma^g$$

El adjunto cuadro esquemático nos indica el signo de las componentes según la situación del cenit astronómico respecto al geodésico.

Merid.

$Z^a \begin{cases} \xi + \\ \eta - \end{cases}$	$Z^a \begin{cases} \xi + \\ \eta + \end{cases}$
$Z^a \begin{cases} \xi - \\ \eta - \end{cases}$	Z^g $Z^a \begin{cases} \xi - \\ \eta + \end{cases}$

I. Vert

En el triángulo esférico rectángulo $NZ^a\overline{P}_1$ es fácil ver que, dado el reducido valor de $\Delta\lambda$, aún en los casos más desfavorables, $NP \simeq NZ$ y por tanto:

$\xi = \varphi^a - \varphi^g = \Delta\varphi$ y además $\eta = (\lambda^a - \lambda^g) \cdot \cos\varphi^a = \Delta\lambda \cdot \cos\varphi^a$

Una de las analogías de Neper da en el triángulo $P_2 Z^a Z^g$:

$$\operatorname{tg}\frac{\zeta^a + \zeta^g}{2} = \frac{\cos\frac{\pi^a - \pi^g}{2}}{\cos\frac{\pi^a + \pi^g}{2}} \cdot \operatorname{tg}\theta/_2 = \frac{\operatorname{sen}\frac{180^\circ - \pi^a + \pi^g}{2}}{\operatorname{sen}\frac{180^\circ - \pi^a - \pi^g}{2}} \cdot \operatorname{tg}\theta/_2$$

y como $\pi^a + \pi^g \simeq 180^\circ$

sustituyendo el valor de π^a se obtiene con suficiente precisión dada la pequeñez de $\theta/_2$ y por ser asimismo $\zeta^a \simeq \zeta^g$

$$180^\circ - (\pi^a + \pi^g) = \theta \cdot \operatorname{ctg}\zeta^a \cdot \operatorname{sen}\pi^g \tag{1.2}$$

La misma analogía da en el triángulo $NZ^a Z^g$

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi^a + \varphi^g}{2} = \frac{\cos\frac{360^\circ - \gamma^a - \gamma^g}{2}}{\cos\frac{360^\circ - \gamma^a + \gamma^g}{2}} \cdot \operatorname{tg}\theta/_2 = \frac{\operatorname{sen}\frac{180^\circ - \gamma^a - \gamma^g}{2}}{\operatorname{sen}\frac{180^\circ - \gamma^a + \gamma^g}{2}} \cdot \operatorname{tg}\theta/_2$$

y como $\gamma^a - \gamma^g \simeq 180^\circ$

las mismas razones que anteriormente nos llevan, con $\varphi^a \simeq \varphi^g$ a:

$$180^\circ - \gamma^a + \gamma^g = -\theta \cdot \operatorname{tg}\varphi^a \cdot \operatorname{sen}\gamma^g \tag{2.2}$$

De la figura 2 se deduce:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^a &= \gamma^a - \pi^a \\ \alpha^g &= \gamma^g + \pi^g \end{aligned}\right\} \quad \alpha^a - \alpha^g = (\gamma^a - \gamma^g) - (\pi^a + \pi^g)$$

y sustituyendo los valores dados por (1.2) y (2.2) se obtiene finalmente:

$$\alpha^a - \alpha^g = \theta \cdot \operatorname{tg}\varphi^a \cdot \operatorname{sen}\gamma^g + \theta \cdot \operatorname{ctg}\zeta^a \cdot \operatorname{sen}(\alpha^g - \gamma^g) \tag{3.2}$$

Un valor aproximado para η nos lo da esta última igualdad con sólo hacer ctg $\zeta^a = 0$, caso normal en las visuales de I orden:

$$\eta = (\alpha^a - \alpha^g) \cdot \mathrm{ctg}\, \varphi^a$$

Naturalmente el empleo de esta fórmula sólo es permisible si:

— $\zeta^a = 90^\circ$ ó sea la distancia cenital de la visual es 90°

— cuando $\alpha^g - \gamma^g = 0^\circ - 180^\circ$ para lo cual, si se tiene una idea aproximada del acimut del plano de desviación, basta elegir P_2 en esta dirección o en la opuesta.

La fórmula más rigurosa para N se deduce de la (3.2) resultando:

$$\alpha^a - \alpha^g = \eta \cdot \mathrm{tg}\, \varphi^a + \xi \cdot \mathrm{ctg}\, \zeta^a \cdot \mathrm{sen}\, \alpha^g - \eta \cdot \mathrm{ctg}\, \zeta^a \cdot \cos \alpha^g \tag{4.2}$$

y finalmente:

$$\eta = \frac{\alpha^a - \alpha^g - \xi \cdot \mathrm{ctg}\, \zeta^a \cdot \mathrm{sen}\, \alpha^g}{\mathrm{tg}\, \varphi^a - \mathrm{ctg}\, \zeta^a \cdot \cos \alpha^g}$$

Una serie de interesantes consecuencias referentes a las componentes de la desviación pueden deducirse de esta fórmula y de las anteriores, pero ello cae fuera de nuestro propósito.

3. La ecuación de Laplace.

Igualando los dos valores de la componente oriental antes hallada se tiene:

$$(\alpha^a - \alpha^g) - (\lambda^a - \lambda^g) \cdot \mathrm{sen}\, \varphi^a = 0 \tag{1.3}$$

expresión que se conoce con el nombre de Ecuación de Laplace.

Claro que también puede emplearse la fórmula más rigurosa dada por la (4.2) obteniéndose:

$$\begin{aligned}(\alpha^a - \alpha^g) - (\lambda^a - \lambda^g) \cdot \mathrm{sen}\, \varphi^a = \\ = \mathrm{ctg}\, \zeta^a \cdot \left[\xi \cdot \mathrm{sen}\, \alpha^g - (\lambda^a - \lambda^g) \cdot \cos \varphi^a \cdot \cos \alpha^g \right]\end{aligned} \tag{2.3}$$

que se transforma en la (1.3) con sólo hacer ctg $\zeta^a = 0$

Esta cantidad es considerada por algunos como un residuo de la ecuación (1.3) y advierten que, normalmente, puede prescindirse de ella utilizándose por tanto la fórmula simplificada; mas si ctg $\zeta^a \neq 0$ dicho residuo adquiere cierta importancia para lugares de baja latitud ya que, por ejemplo: para $\varphi^a = 0$ la acuación (1.3) da:

$$\alpha^a - \alpha^g = 0$$

mientras que la (2.3) es entonces:

$$\alpha^a - \alpha^g = \mathrm{ctg}\, \zeta^a \cdot \left[\xi \cdot \mathrm{sen}\, \alpha^g - (\lambda^a - \lambda^g) \cdot \cos \alpha^g \right]$$

Generalmente, por ser en las redes de I orden la distancia cenital muy próxima a 90°, el término anterior es despreciable, pero no debe considerársele como un residuo de la ecuación de Laplace, sino como una corrección a las direcciones observadas, de la cual trataremos más adelante.

Hasta ahora hemos considerado que el punto P_1 pertenecía a una triangulación en cuyo punto fundamental la desviación de la vertical era nula, por lo cual la anterior ecuación sólo estaba correctamente establecida cuando ligase al datum con un punto Laplace, pero no puede emplearse entre dos puntos Laplace de la misma triangulación; asimismo si nos referimos al elipsoide terrestre, la existencia de desviaciones absolutas en todos los vértices —sólo casualmente carecerán de ella— impediría su utilización.

Admitida una desviación en el punto fundamental es claro que será señal de que, de ese vértice, se poseen tanto coordenadas astronómicas como geodésicas, por lo cual para el P_1 se tendrán:

— coordenadas astronómicas de directa determinación

— coordenadas geodésicas por cálculo de la triangulación a partir de las astronómicas del datum

— coordenadas geodésicas por cálculo a partir de las geodésicas del datum.

No vamos a detallar aquí los cálculos que son bastante extensos y pueden encontrarse en Baeschlin (1) y (3); sólo pondremos la ecuación final:

$$\begin{gathered}
\alpha_{10}^{a} - \alpha_{10}^{g} - \left(\lambda_1^{a} - \lambda_1^{ag} \right) \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 - \xi_0 \cdot \operatorname{sen} (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \cos \varphi_1 + \\
+ \eta_0 \Big[\sec \varphi_0 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 - \operatorname{sen} (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 \cdot \operatorname{cosec} \alpha_{01} \cdot \cos \varphi_{10} - \\
- \cos (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \operatorname{sen} \varphi_0 \cdot \sec \varphi_1 \Big] = 0
\end{gathered}$$

en la que no necesitan especial aclaración las diferentes letras que intervienen.

De este modo puede ya emplearse la ecuación de Laplace entre dos puntos cualesquiera en los que se hayan efectuado observaciones astronómicas a la par que estén ligados por una triangulación y sea conocida la desviación de la vertical en uno de ellos; el presente problema adquiere especial interés en la compensación de grandes redes geodésicas ya que, tomado entonces un solo punto fundamental para la totalidad del conjunto, los particulares de cada triangulación que las integren pasan a tener una desviación de la vertical.

4. Introducción de la ecuación de Laplace en la compensación de una red.

Conocida ya la ecuación de Laplace conviene examinar los pasos necesarios a dar, para llegar al planteamiento de la ecuación de condición utilizable en la compensación general de la red.

Naturalmente que la reducción del acimut astronómico de P_1P_2 al geodésico de esa misma dirección entraña las mismas correcciones que tienen lugar en las direcciones observadas para pasar a las geodésicas; estas correcciones son:

— por reducción a causa de la altitud del punto visado

$$-\rho'' \frac{H}{2a} \cdot e^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \text{sen}\, 2\,\alpha^g$$

— por reducción a la línea geodésica

$$+\frac{\rho''}{12} \cdot \frac{s^2}{a^2} \cdot e^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \text{sen}\, 2\,\alpha^g$$

En estas fórmulas sólo es necesario aclarar que H es la altitud del punto visado; e la primera excentricidad del elipsoide de referencia $\left(=\sqrt{a^2-b^2}/a\right)$; $\rho''=2{,}06.10^5$ (=1/sen 1''). (Tardi en su "Traité de Géodésie" I-II. 1954, da las fórmulas anteriores sustituyendo en ellas el semieje a por la normal *N*, lo cual puede efectuarse dentro del orden de aproximación de alguna milésima).

Ya entonces la ecuación de Laplace completa toma la siguiente forma:

$$(\alpha^a - \alpha^g)'' - (\lambda^a - \lambda^g)'' \cdot \text{sen}\,\varphi = \theta \cdot \text{ctg}\,\zeta^a \cdot \text{sen}\,(\alpha^g - \gamma^g) -$$
$$-\rho'' \frac{H}{2a} \cdot e^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \text{sen}\, 2\,\alpha^g + \frac{\rho''}{12} \cdot \frac{s^2}{a^2} \cdot e^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \text{sen}\, 2\,\alpha^g$$

en la que por ser $\frac{\rho'' e^2 s^2}{12\,a^2} < 0''01$ puede ser despreciado el 3er término del segundo miembro; Baeschlin da en (4) que para el elipsoide internacional es $\rho'' \cdot \frac{e^2}{2a} \cdot H(=1\,\text{km}) = 0''1087$, resultando en definitiva la ecuación de Laplace:

$$(\alpha^a - \alpha^g)'' - (\lambda^a - \lambda^g)''\,\text{sen}\,\varphi = \theta \cdot \text{ctg}\,\zeta^a \cdot \text{sen}\,(\alpha^g - \alpha^g) -$$
$$-\,0''1087 \cdot H_2^{km} \cdot \cos^2\varphi \cdot \text{sen}\,2\,\alpha^g$$

Nótese que entonces el valor de α^a es el valor del acimut observado.

Veamos a qué corresponde el término $\theta \cdot \text{ctg}\,\zeta^a \cdot \text{sen}\,(\alpha^g - \gamma^g)$; en el triángulo $P_2Z^aZ^g$ podemos obtener con suficiente aproximación:

$$\widehat{Z^a\,P_2\,Z^g} = \theta \cdot \text{ctg}\,\zeta \cdot \text{sen}\,\pi^g = \theta \cdot \text{ctg}\,\zeta^a \cdot \text{sen}\,(\alpha^g - \gamma^a)$$

Vening-Meinesz señala en (32) que ésta es la única corrección que tiene relación con la desviación de la vertical en el punto estación, siendo motivada por la desviación entre el plano vertical del teodolito en la estación P_1, que pasa pues por la normal al geoide en esta estación y en el cual tiene lugar la observación de P_2, y la normal en este punto al elipsoide mediante la cual se le proyecta sobre el nivel del mar. A esta corrección que la mayor parte de las veces no es utilizada se la suele conocer con el nombre de *"reducción a la normal al elipsoide en el punto estación"*.

A fin de no sujetarse a los valores de la desviación con relación a un elipsoide determinado, el valor de la desviación total antes fijado habría que substituirlo por la diferencia entre el del punto visado y el de la estación; como naturalmente para determinar las componentes en aquél son necesarias medidas de latitud y longitud, sólo hace falta llevar a cabo en él una determinación de acimut para convertirlo en punto Laplace. Este otro acimut es preferible sea el inverso al anterior, es decir, de punto visado a punto estación, por lo que resulta ventajoso colocar los puntos Laplace siempre por pares.

Naturalmente la misma corrección antes citada debe introducirse también en las direcciones visadas y el despreciarla puede dar lugar, en circunstancias especiales, a la presencia de un error de cierre o contradicción de Laplace sensiblemente falseado; veamos un ejemplo.

Si en una zona que posea una desviación de la vertical sistemática tomamos para el transporte geodésico dos direcciones que formen el ángulo T' —T y suponemos nulo el acimut del plano de desviación, así como de 90° el del itinerario geodésico utilizado para el transporte de coordenadas, las correcciones a las direcciones serían:

T T'
o

para la dirección T' : $\theta \cdot \operatorname{ctg} \zeta^a$
para la dirección T : $-\theta \cdot \operatorname{ctg} \zeta^a$

es decir en total $2 \cdot \theta \cdot \operatorname{ctg} \zeta^a$, y si tomamos $\operatorname{ctg} \zeta =$ 0'004, contando el itinerario de transporte 10 vértices, tendríamos finalmente un error por esta causa de 0''08. θ que puede ser apreciable según el valor de la desviación en la zona considerada. Claro que no es necesario utilizar un valor exacto de ésta, ya que sólo el empleo de uno algo aproximado hace que el error residual sea despreciable.

Para el planteo de la ecuación de Laplace se hace necesario el conocimiento del acimut geodésico de la dirección a comparar, así como de la latitud y longitud del punto Laplace, por lo que surge la conveniencia de examinar el modo de llegar al cálculo de estos valores y la precisión requerida en el conocimiento de éstos; desde luego dado que la latitud sólo interviene por su seno no ha lugar a consideraciones sobre ella; es pues la combinación $\alpha - \lambda \cdot \operatorname{sen} \varphi$ la que necesita ser examinada. Sea una red geodésica (fig. 3) con punto fundamental O y punto Laplace V_k y de la que aparece representado el encadenamiento que más directamente los une; reducidas todas las direcciones como antes se indicó se puede, a partir de O y por sucesiva resolución del problema geodésico fundamental, obtener las coordenadas finales de V_k bien con el auxilio de los ángulos compensados dentro de cada triángulo, bien sin recurrir a esta previa compensación.

Sea de uno u otro modo, los sucesivos acimutes se hallan merced a la intervención de la convergencia de meridianos entre cada dos vértices consecutivos, por lo que:

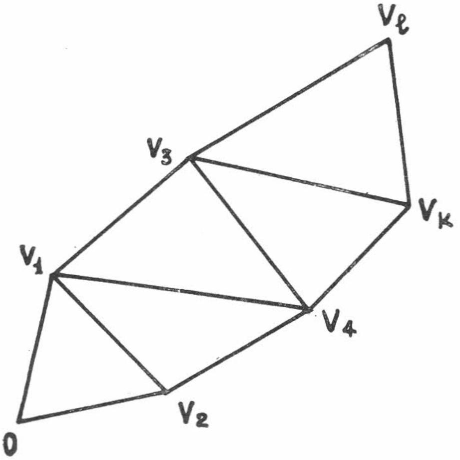


Fig. 3

$$\alpha^{g}_{kl} = \alpha^{g}_{o2} + \sum_{o}^{k} \Delta\alpha_i + 180^\circ \cdot k + \sum_{o}^{k} \text{angs en } V_i \qquad (i = 2.4 \ldots k)$$

y las coordenadas encontradas para V_k, bien que erróneas, nos permitirán calcular los acimutes directo e inverso de la línea OV_k resultando:

$$\Delta\alpha_{ko} = \alpha_{ok} - \alpha_{ko} - 180^\circ = \sum_{o}^{k} \Delta\alpha_i$$

valor que según la fórmula de latitud media de Gauss podemos escribir:

$$\Delta\alpha_{ko} = \rho'' \frac{S_{ko}}{N_m} \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha_{ok} + \alpha_{ko} \pm 180^\circ}{2}\right) \cdot \text{tg}\frac{\varphi_o + \varphi_k}{2}$$

que se transforma en:

$$\Delta\alpha_{ko} = \frac{\rho''}{N_m} \cdot \text{tg}\,\varphi_m \cdot \gamma_k \qquad (1.4)$$

al hacer:

$$\gamma_k \simeq S_{ko}\left(\frac{\alpha_{ok} + \alpha_{ko} \pm 180^\circ}{2}\right)$$

o sea llamando γ_k la distancia del vértice V_k al meridiano de O, y diferenciando se obtiene finalmente:

$$d \sum_{o}^{k} \Delta \alpha = \frac{\rho''}{N_m} \cdot \operatorname{tg} \varphi_m \cdot d \gamma_k$$

De las mismas fórmulas de Gauss se deduce:

$$\Delta \lambda_o = - \frac{\rho''}{N} \cdot S_{ko} \cdot \operatorname{sen} \alpha_m \cdot \sec \varphi_m$$

y de aquí, de un modo análogo a anteriormente:

$$d (\Delta \lambda_o \cdot \operatorname{sen} \varphi_k) = - \frac{\rho''}{N} \cdot \frac{\operatorname{sen} \varphi_k}{\cos \varphi_m} \cdot d \gamma_k \tag{2.4}$$

La suma de ésta con la (1.4) da, después de algunas simplificaciones y poniendo $\lambda_o = o$:

$$d \left(\sum_{o}^{k} \Delta \alpha_i + \lambda_k \cdot \operatorname{sen} \varphi_k \right) = \frac{\rho''}{N_m} \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\varphi_o + \varphi_k}{2} \cdot d\gamma_k$$

que apenas llega a valer alguna centésima de segundo para las distancias normales de empleo de los puntos Laplace. Las líneas generales de la demostración anterior están tomadas de Baeschlin (1) y (3).

Se ve pues que el error que motiva el transporte de coordenadas es despreciable y por tanto resulta indiferente realizar el cálculo sea con los ángulos sin compensar, sea compensados dentro de cada triángulo. Esta aparente incongruencia se explica por la existencia de la diferencia $\alpha - \lambda \cdot \operatorname{sen} \varphi$ que da lugar a que, si el acimut transportado es arróneo, también lo sea y en la misma medida la expresión $\lambda \cdot \operatorname{sen} \varphi$ lo que permite el poder plantear las ecuaciones de Laplace mediante valores aproximados de las coordenadas geodésicas. Al mismo resultado llega Kneissl en (15), si bien por otro camino.

5. Ecuación de condición derivada de la de Laplace (de acuerdo de acimutes).

El empleo práctico de la ecuación de Laplace requiere la obtención de una ecuación de condición que permita utilizarla, conjuntamente con las restantes, en la compensación de una red; se la suele conocer, en virtud de la misión que cumple, por el nombre de *ecuación de acuerdo de acimutes*.

Su forma normal es (para el punto de latitud φ_k):

$$\operatorname{corr} \alpha_k^a - \operatorname{corr} \alpha_o^a - \operatorname{corr} \lambda_k^a \cdot \operatorname{sen} \varphi_k + \sum \operatorname{corr. dir.} l_i + w_k = 0$$

en la que figuran las correcciones correspondientes al acimut y longitud astronómicas del punto Laplace, las de las direcciones que unen a éste con el datum y las del acimut astronómico origen; el término w_k se denomina generalmente error de cierre o contradicción de Laplace. Delicada cuestión es la atribución del correspondiente peso a cada una de las cantidades observadas que en esta ecuación intervienen, sucesivamente nos iremos refiriendo a ello, pero desde luego ya ahora se puede marcar que parece preferible otorgar a las magnitudes observadas en los distintos puntos Laplace un mismo peso —siempre que las observaciones en punto a número etc., sean similares— y no distintos deducidos de los resultados de las observaciones.

Oländer ha dado (21) una fórmula de empleo que concuerda con la de Helmert (9), con la forma siguiente:

$$U_k - U_i - V_{ki} - V_{ik} - \cos L_m \cdot \operatorname{sen} (M_k - M_i) \cdot d L_i +$$
$$+ \cos L_m \cdot \operatorname{sen} (L_k - L_i) \cdot d M_i + w_{ik} = 0$$

la cual puede ser utilizada asimismo, cuando todos los vértices de la red son puntos Laplace, lo que ocurre precisamente en una gran parte de la red finlandesa de I orden.

Las correcciones de los acimutes y longitudes astronómicas se encuentran reunidas en las U de tal forma que: $U = d\alpha - d\lambda \operatorname{sen} \varphi$ y proporcionan, por tanto, las correcciones de los acimutes Laplace; las de las direcciones vienen representadas en las V. En caso de querer emplear rigurosamente la citada ecuación, los dos últimos términos han de permanecer indeterminados a lo largo de la compensación y es claro que convendrá referirlos —si se emplean desviaciones absolutas— a dL_o y dM_o, lo que corresponderá a una traslación del punto fundamental por imperfecto conocimiento del verdadero valor de la desviación absoluta en dicho punto; caso de conocerse valores aproximados de ésta, o bien tomar en el datum desviación nula, es posible despreciarlos y cumplir sin ellos la ecuación de Laplace.

Planteemos ahora esta ecuación entre dos estaciones unidas por mediación de varias intermedias:

$$U_o - U_k + V_{o1} - V_o + \cdot \cdot + V_{kl} - V_{k \cdot k-1} + w = 0$$

que esquemáticamente puede escribirse:

$$[V] + U_o - U_k + w = 0$$

con:

$$U_o = d\,\alpha_o - d\lambda_o \cdot \operatorname{sen} \varphi_o \qquad U_k = d\,\alpha_{kl} - d\lambda_k \cdot \operatorname{sen} \varphi_k$$

El valor de w es entonces, siendo l las direcciones observadas:

$$w = \alpha_o - (\lambda_o - M_o) \operatorname{sen} \varphi_o + (l_{o1} - l_o) + \ldots - \alpha_{kl} + (\lambda_k - M_k) \operatorname{sen} \varphi_k$$

y por ser los acimutes Laplace:

$$A_o = \alpha_o - (\lambda_o - M_o) \operatorname{sen} \varphi_o \qquad A_k = \alpha_{kl} - (\lambda_k - M_k) \cdot \operatorname{sen} \varphi_k$$

queda finalmente:

$$w = A_o - A_n + [\, l_{i+1} - l_i \,]$$

Naturalmente, caso de que en el datum la desviación sea nula, tendríamos $\lambda_0 = M_0$ y por tanto $A_0 = \alpha_0$

Se ve por todo lo dicho que no debe admitirse como totalmente exento de error el acimut obtenido en el punto fundamental, bien que generalmente sea más preciso que el de los Laplace, ya que en otro caso se da a la red la posibilidad de encontrarse girada en uno u otro sentido según la magnitud y sentido del error verdadero en él.

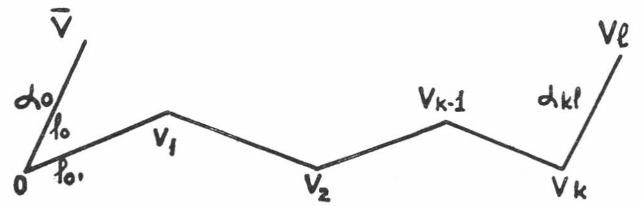


Fig 4

En la práctica de la compensación se acostumbran a tomar los coeficientes de las correcciones a las direcciones como iguales a la unidad, lo que en rigor no es cierto (véase p. ej. Roelofs (23)) pero ello puede admitirse sin pérdida de precisión.

Frente a estas soluciones total o casi rigurosas existen otros métodos aproximados de los que daremos ligera idea siguiendo a Berroth. "Die Übertragung von Richtungen in weite Fernen". AVN 1938:

—exclusiva orientación astronómica, que consiste en observar en todas las estaciones de un itinerario o encadenamiento geodésico acimutes astronómicos con determinado error medio, los cuales son utilizados para la orientación sin recibir ninguna corrección procedente de ecuaciones de condición como las anteriormente indicadas y por tanto sin que tenga ninguna intervención la ligazón geométrica de unas a otras direcciones.

—orientación encadenada aproximada o de Plöss (22) realizada mediante el acimut correspondiente a la media aritmética efectuada entre el procedente del acimut Laplace y del dado por el transporte de coordenadas geodésicas desde el punto fundamental.

En el antes citado trabajo de Berroth se indica que la compensación rigurosa no debe ser usada más que en cadenas de hasta 400 kms, ya que para mayores distancias no proporciona ninguna ventaja sobre los aproximados y sí mayores y más complicados cálculos, por lo que a partir del anterior límite aconseja usar uno cualquiera de los métodos aproximados; ello sin embargo, no parece aconsejable en vista de la no despreciable ventaja —en especial para los trabajos posteriores— de obtener mediante la rigurosa compensación una red uniforme y homogénea.

6. La repartición de los puntos Laplace.

Cuestión harto discutida y aún no definitivamente aclarada es la que se refiere a la situación y distancia más favorable de los citados puntos que trataremos de enfocar desde tres aspectos distintos, lo que permitará obtener una idea bastante completa de este problema; estos aspectos son:

—la fijación de peso a los valores astronómicos;

—el error de transporte de acimutes en una red geodésica;

—la precisión de las coordenadas transversales.

Con respecto a la fijación del peso si admitimos para las direcciones geodésicas observadas el peso unidad $\frac{k}{m_i^2} = 1$ se deduce para el de la corrección astronómica (o sea la magnitud $U = d\alpha - d\lambda \cdot \operatorname{sen}\varphi$) el peso — $\frac{m_i^2}{m_A^2}$ en el cual $m_A^2 = m_\alpha^2 + m_\lambda^2 \cdot \operatorname{sen}\varphi$ dado que actualmente se puede admitir para errores medios de una dirección y de un acimut astronómico Laplace las cantidades $\pm$ 0"3 y $\pm$ 0"5 respectivamente, si bien este último es algo, diríamos, optimista, podemos considerar el peso de la magnitud *u* como: $\frac{1}{30} < P_u < \frac{1}{3}$. Entre estos límites se encuentra el dado por Oländer (21) para la compensación de la red finlandesa de la zona Sur y que es $\frac{1}{25}$ ·

Es claro que si el peso dado es reducido, son las correcciones a los acimutes las que han de servir en mayor grado para compensar el error de cierre o contradicción de Laplace, mientras que, si es elevado, es a costa de las correcciones a las direcciones observadas de las que se efectúa la casi totalidad de la compensación; naturalmente hay también propuestas de que los acimutes astronómicos sean supuestos exentos de error y la contraria o que sean las direcciones las consideradas inmutables, propuesta esta última menos admitida, mientras que aquélla es prácticamente el fundamento del método aproximado denominado "exclusiva orientación astronómica" y del de Bowie (8).

Un interesante trabajo de Wolf (33) permite dar un peso intermedio, pero estando ligada esta cuestión con la distancia a situarlos, se cae en un círculo vicioso ya que, si por una parte se quiere fijar el peso en función de la distancia a que estén situados los puntos Laplace, por otra se desea, a partir de la precisión, fijar la distancia a colocarlos; desde luego colocados a bastante distancia pueden ser considerados como exactos.

Nótese que en todo esto se trata no sólo de correcciones al acimut observado en el punto Laplace sino también el fundamental, que también precisa corrección como ya dijimos.

Un mejor criterio para la fijación de la distancia lo da el error de transporte del acimut en una red geodésica, en la cual el primer lado es orientado astronómicamente y los demás mediante sucesiva adición de diferencias de direcciones observadas; este error ha sido ampliamente estudiado por muchos geodestas, aunque casi siempre ciñéndose a formas particulares de redes, en especial: cadenas de triángulos, de cuadriláteros, dobles cadenas, etc., habiéndose demostrado que, dentro de ciertas limitaciones, depende poco de la configuración de la cadena. Con respecto al error de transporte en mallas, es decir, en redes uniformemente extendidas por toda la superficie, los estudios hasta ahora realizados parecen indicar que las consideraciones obtenidas para las cadenas son también válidas para las mallas.

Dado que el citado error crece rápidamente con la distancia al punto desde el que se inicia el transporte es factible deducir, con su ayuda, un interesante criterio para fijar la distancia de los puntos Laplace; si el error de transporte de coordenadas geodésicas —en rigor del acimut exclusivamente— ha de ser inferior al del acimut Laplace no pueden éste y el punto fundamental estar separados más que por muy pocos triángulos, dos o tres a lo sumo. Un estudio muy completo sobre este particular lo realiza Sigl (30) y por el mismo camino llega Baeschlin (1) a que el número de direcciones entre dos puntos Laplace no debe de ser inferior a 10 ni superior a 30, recomendando el uso de la fórmula siguiente:

$$\sqrt{m^2_{\alpha i} + m^2_{\alpha k} + m^2 (\lambda_k - \lambda_i) \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi} = \frac{1}{2}\, m_i \sqrt{\pi}$$

En ella vemos que el primer miembro no es otra cosa que $\sqrt{m^2 A_i + m^2 A_k}$ y si hacemos $mAi = mAk = mA$ al considerar el error de las direcciones $\pm$ 0''3 se obtiene finalmente para *n* el valor aproximado de 20, es decir el doble de lo indicado anteriormente; con arreglo a lo que antes dijimos con respecto al peso fijado para cada magnitud de observación llegamos a la conclusión de que, mediante este sistema propuesto por Baeschlin, se tiende a considerar a los acimutes astronómicos observados como casi exentos de error, compensándose el error de cierre o contradicción de Laplace a expensas casi exclusivamente de las correcciones a las direcciones geodésicas observadas.

Como tercer camino para fijar la distancia de los puntos Laplace señalamos la precisión de las coordenadas transversales: puede verse fácilmente que un error en la orientación de una cadena es causa principal en la desviación transversal de los vértices de la red, mientras que el error en la longitud de la base medida y sucesivos lados es la determinante de una desviación en el sentido longitudinal. Es por este camino por el que Bonsdorff (6) llega a las siguientes conclusiones:

—se obtiene la orientación más favorable si cada vértice de la triangulación es un punto Laplace;

—observar acimutes, aunque sean de gran precisión, sólo al final de las cadenas es mucho más desfavorable que elegirlos más próximos aunque de precisión media.

Estas conclusiones son válidas para las cadenas sencillas de triángulos pero, por lo dicho anteriormente, parecen también aconsejables para cualesquiera redes o mallas. Sobre la precisión necesaria en los acimutes Laplace también en este mismo trabajo de Bonsdorff se muestra que, a partir de los datos de las observaciones astronómicas finlandesas, la precisión alcanzable en 10 noches de observaciones es apenas el doble de la que puede conseguirse en dos noches, lo que demuestra que el rendimiento obtenido no está en función del aumento de precisión; ello unido a lo anteriormente dicho sobre la conveniencia de varios puntos de precisión media da una concisa idea sobre la repartición más favorable de los puntos Laplace.

Entre las soluciones que se han dado para aumentar la precisión de los acimutes astronómicos merecen señalarse:

—la observación de los dos acimutes opuestos de una misma dirección; de este modo a partir de $(\alpha_{ik} \cdot \lambda_i)$ y $(\alpha_{ki} \cdot \lambda_k)$ se obtiene:

$$A_{ik} - A_{ik}\ (\text{transportado}) = (\alpha_{ik} - \alpha_{ki}) + (\lambda_k - \lambda_i) \cdot \text{sen}\ \varphi_m$$

lo que permite hallar la precisión relativa entre ellos;

—la observación de unos cuantos acimutes que se transportan y reunen sobre un solo; de este modo, si bien se aumenta la precisión final del referido acimut reunión del conjunto, por encontrarse este punto Laplace a bastante distancia del fundamental —y de los otros—, no se cumplen las condiciones requeridas para la mejor orientación de la red.

Como resumen de todo lo dicho parece que las condiciones óptimas con respecto a la situación de los puntos Laplace son:

—situarlos normalmente por pares observando tanto el acimut directo como el inverso de la dirección que los une;

—a no inferior distancia de 100 kms ni superior a 200 kms lo que supone ligazón por intermedio de unos 3 a 5 lados geodésicos de I orden;

—la precisión de las observaciones no es necesario sea muy elevada.

BIBLIOGRAFIA

(1) BAESCHLIN, C. F.: *Rapport sur la repartition et l'utilisation pratique des points de Laplace*. Bull. géod. Nr. 52. 1936.

(2) BAESCHLIN, C. F.: *Lotabweichungen und Laplacesche Gleichung*. Schweiz. Z fV u. Kultur 1937.

(3) BAESCHLIN, C. F.: *Lehrbuch der Geodäsie*. Basilea 1947.

(4) BAESCHLIN, C. F.: *Communication on Laplace Equation*. Bull. géod. Nr. 19. 1951 y Bull. géod. Nr. 24. 1952.

(5) BERROTH, A.: *Direkt Messungé der Laplaceschen Gleichung durch gleichzeitige Beobachtung von Azimutdifferenzen auf zwei Stationen*. Veröff. d. DGK. Reihe A. Nr. 1. Bamberg 1951.

(6) BONSDORFF, I.: *Über die günstigste Dichte der Laplaceschen Punkte in einer einfachen Dreieckskette*. Verh. d. BGK. Helsinki 1937.

(7) BOWEN, W.: *Azimuth lines established at Triangulation Station*. Bull. géod. Nr. 32. 1931.

(8) BOWIE, W.: *The use of Laplace Azimuths in the adjustement of Triangulation*. Nr. 39. 1933.

(9) HELMERT, F. R.: *Lotabweichungen*. Veröff. d. Kgl. Preuss. Inst. Berlin 1886.

(10) HELMERT, F. R.: *Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*. Leipzig 1880.

(11) JELSTRUP, G.: *L'équation de Laplace aux hautes latitudes*. Bull. géod. Nr. 50. 1936.

(12) JELSTRUP, H. S.: *Quelques remarques sur le probleme de hautes Latitudes*. Bull. géod. Nr. 44. 1934.

(13) JENNE, W.: *Einbeziehung Laplacescher Gleichungen in die geodätische Netzausgleichung nach bedingten Beobachtungen unter Anwendung des Entwicklungsverfahrens*. Mitt. d. RfL. 1933-34.

(14) KNEISSL, M.: *Verbesserung der Orientierung eines Dreiecksnetzes durch Laplacesche Punkte*. Sitz. Ber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. Munich 1939.

(15) KNEISSL, M.: *Die Abhängigkeit der Widersprüche in den Laplaceschen Gleichungen von den Beobachtungsfehlern*. Z fV. 1942.

(16) KNEISSL, M.: *Kritische Betrachtung neuer Vorschläge zur Lotabweichungsausgleichung*. Z fV. Nr. 9/11. 1950.

(17) KLINGENBERG, K. S.: *Distribution of Laplace points*. Bull. géod. Nr. 45. 1935.

(18) LEDERSTEGER, K.: *Zur Analyse der Laplaceschen Widersprüche*. Sonderheft 8 d. ÖZ fV.

(19) LEDERSTEGER, K.: *Projektion und Lotabweichung*. ÖZ fV. XL Jahrgang. Nr. 6.

(20) OLÄNDER, V. R.: *Gewichte der Azimute und Koordinaten in einer schematischen Dreieckskette mit Laplaceschen Gleichungen*. Verh. d. BGK. Helsinki 1937.

(21) OLÄNDER, V. R.: *Ausgleichung einer Dreieckskette mit lauter Laplaceschen Punkten.* Veröff. d. Finn. Geod. Inst. Nr. 8. Helsinki 1937.

(22) PLÖSS, H.: *Die Ausgleichung eines geodätischen Dreiecksnetzes mit vielen Laplaceschen Punkten.* Mitt. d. RfL. Sonder. 12. 1936.

(23) ROELOFS, R.: *The Laplace Condition in the Adjustement of a chain of triangles.* Bull. géod. Nr. 6. 1947.

(24) SCHIVE, J.: *The accuracy's dependence on the latitude in astronomically determined stations.* Bull. géod. Nr. 42. 1934.

(25) SCHIVE, J.: *Laplace-Azimuth on high Latitudes.* Bull. géod. Nr. 48. 1935.

(26) SCHIVE, J.: *Sur les points Laplace.* Bull. géod. Nr. 51. 1936.

(27) SCHIVE, J.: *The Laplace-Equation.* Bull. gécd. Nr. 52. 1936.

(28) SCHIVE, J.: *Über die Sternenauswahl auf Laplace-Stationen.* A. N. Tomo 259. 1936.

(29) SCHIVE, J.: *Die Mitnahme der Laplace-Gleichung in der Netzausgleichung.* A. N. Tomo 259. 1936.

(30) SIGL, R.: *Kritische Betrachtung zur Orientierung von geodätischen Hauptnetzen, günstigste Verteilung der Laplaceschen Punkte.* Veröff. d. DGK. Reihe C. Nr. 12. Munich 1956.

(30 bis) SIGL, R.: *Vorschläge zur Neubeobachtung Laplacescher Punkte und zur Beobachtung astronomisch-geodätischer Lotabweichungen für Geoid-profile in der Bundesrepublik.* Veröff. d. DGK. Reihe B. Nr. 29. Munich 1956.

(31) VENING-MEINESZ, F. A.: *New Formulas for Systems of Deflections of the Plumbline and Laplace's theorem.* Bull. géod. Nr. 15. 1950.

(32) VENING-MEINESZ, F. A.: *L'équation de Laplace.* Bull. géod. Nr. 27. 1953.

(33) WOLF, H.: *Beiträge zur Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze unter besonderer Berücksichtigung des Zentraleuropäischen Netzes.* Veröff. d. Inst. f. Erdmessung Nr. 4. Bamberg 1949.

(34) WOLF, H.: *Betranchtungen zur astronomisch-geodätischen Netzausgleichung unter besonderer Berücksichtigung der Laplaceschen Gleichung.* A. N. Tomo 176.

(35) WOLF, H.: *Ein Beitrag zur Geschichte der Laplace-Gleichung.* Z fV. 1953.

PUBLICACIONES DEL SEMINARIO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID

1.—Efemérides de 63 Asteroides para la oposición de 1950. (1949).

2.—E. PAJARES: Sobre el cálculo gráfico de valores medios. (1949).

3.—J. PENSADO: Orbita del sistema visual σ^2 U Maj. (1950).

4.—Efemérides de 79 Asteroides para la oposición de 1951. (1950).

5.—J. M. TORROJA: Corrección de la órbita del Asteroide 1395 "Aribeda". (1950).

6.—R. CARRASCO y J. M. TORROJA: Rectificación de la órbita del Asteroide 1371 "Resi". (1951).

7.—J. M. TORROJA y R. CARRASCO: Rectificación de la órbita del Asteroide 1560 (1942 XB) y efemérides para la oposición de 1951. (1951).

8.—M. L. SIEGRIST: Orbita provisional del sistema visual Σ 728-32 Orionis. (1951).

9.—Efemérides de 79 Asteroides para la oposición de 1952. (1951).

10.—J. PENSADO: Orbita provisional de Σ 1883. (1951).

11.—M. L. SIEGRIST: Orbita provisional del sistema visual Σ 2052. (1952).

12.—Efemérides de 88 Asteroides para la oposición de 1953. (1952).

13.—J. PENSADO: Orbita de ADS 9380 = Σ 1879. (1952).

14.—F. ALCAZAR: Aplicaciones del Radar a la Geodesia. (1952).

15.—J. PENSADO: Orbita de ADS 11897 = Σ 2438. (1952).

16.—B. RODRÍGUEZ SALINAS: Sobre varias formas de proceder en la determinación de períodos de las mareas y predicción de las mismas en un cierto lugar. (1952).

17.—R. CARRASCO y M. PASCUAL: Rectificación de la órbita del Asteroide 1528 "Conrada". (1953).

18.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Orbita de ADS 1709 = Σ 228. (1953).

19.—J. BALTÁ: Recientes progresos en Radioastronomía. Radiación solar hiperfrecuente. (1953).

20.—J. M. TORROJA y A. VÉLEZ: Corrección de la órbita del Asteroide 1452 (1938 DZ_1). (1953).

21.—J. M. TORROJA: Cálculo con Cracovianos. (1953).

22.—S. AREND: Los polinomios ortogonales y su aplicación en la representación matemática de fenómenos experimentales. (1953).

23.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Determinación de los instantes de los contactos en el eclipse total de sol de 25 febrero de 1952 en Cogo (Guinea española). (1954).

24.—J. PENSADO: Orbita de la estrella doble Σ 2 (1954).

25.—J. M. TORROJA: Nueva órbita del Asteroide 1420 "Radcliffe" (1954).

26.—J. M. TORROJA: Nueva órbita del Asteroide 1557 (1942 AD) (1954).

27.—R. CARRASCO y M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1290 "Albertine". (1954).

28.—J. PENSADO: Distribución de los períodos y excentricidades y relación período excentricidad en las binarias visuales (1955).

29.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Nueva órbita del Asteroide 1372 "Haremari" (1955).

30.—M. DE PASCUAL: Rectificación de la órbita del Asteroide 1547 (1929 CZ) (1955).

31.—J. M. TORROJA: Orbita del Asteroide 1554 "Yugoslavia" (1955).

32.—J. PENSADO: Nueva órbita del Asteroide 1401 "Lavonne" (1956).

33.—J. M. TORROJA: Nuevos métodos astronómicos en el estudio de la figura de la Tierra. (1956).

34.—D. CALVO: Rectificación de la órbita del Asteroide 1466 "Mündleria". (1956).

35.—M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1238 "Predappia". (1956).

36.—J. PENSADO: Distribución de las inclinaciones y de los polos de las órbitas de las estrellas dobles visuales. (1956).

37.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Resultados de la observación del eclipse total de sol de 30 de junio de 1954 en Sydkoster (Suecia) (1957).

38.—ST. WIERZBINSKI: Solution des équations normales par l'algorithme des cracoviens. (1958).

39.—J. M. GONZÁLEZ-ABOÍN: Rectificación de la órbita del Asteroide 1.192 Prisma. (1958).

40.—M. LÓPEZ ARROYO: Sobre la distribución en longitud heliográfica de las manchas solares. (1958).

SUGRAÑES HNOS.
Editores - Tarragona