

Universidad de Madrid - Facultad de Ciencias

SEMINARIO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA

(Adherido a la Unión Nacional de Astronomía
y Ciencias Afines)

Publicación núm. 64

Reducción automática de posiciones
de estrellas

POR

M. J. SEVILLA



PUBLICADO EN «VRANIA» NÚM. 271-272

MADRID

1970

REDUCCION AUTOMATICA DE POSICIONES DE ESTRELLAS

por M. J. SEVILLA

INTRODUCCIÓN

El cálculo de las posiciones aparentes de estrellas en un momento dado, a partir de sus coordenadas medias para una época, dadas por un catálogo, es un problema que se presenta con gran frecuencia en los cálculos astronómicos.

El disponer de computadores electrónicos nos proporciona un elemento de trabajo seguro y rápido.

Vamos pues a establecer un programa de cálculo automático para la reducción de posiciones de estrellas. Para ello utilizaremos un método basado en el uso de coordenadas eclípticas (3) por parecernos el más apropiado.

Antes de entrar en detalles del método y del programa, daremos unas breves noticias sobre Matrices de Rotación y sobre el cálculo de años trópicos, ambas partes fundamentales en este proceso.

1. NOTA SOBRE MATRICES DE ROTACIÓN

1.1. *El cambio de sistema de referencia en el espacio euclídeo tridimensional.*

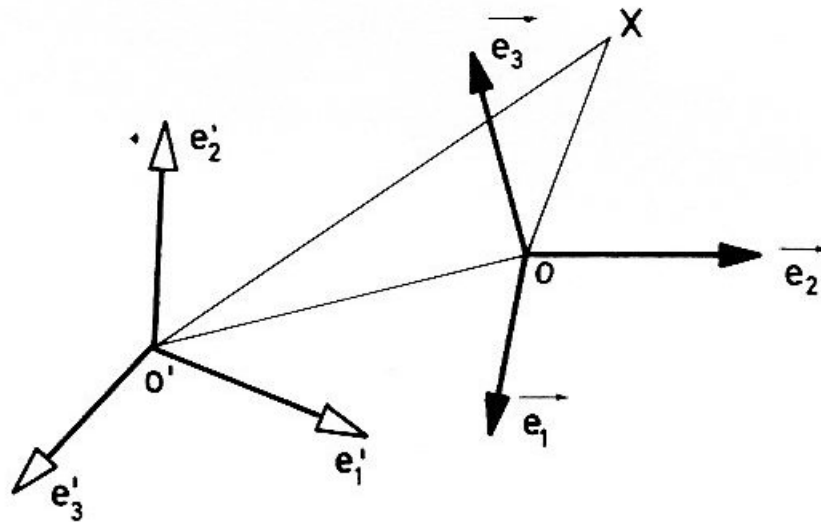
Sean $\mathbf{R} = \{ 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ y $\mathbf{R}' = \{ 0', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \}$ dos sistemas de referencia métricos en E_3 , tales que

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij} = \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Sea X un punto arbitrario de E_3 que tenga de coordenadas (x_1, x_2, x_3) respecto de \mathbf{R} y (x'_1, x'_2, x'_3) respecto de \mathbf{R}' . Vamos a establecer las ecuaciones del cambio de coordenadas respecto del sistema de referencia \mathbf{R} al \mathbf{R}' .

Para ello supongamos que:

$$\begin{aligned}
 \vec{0'0} &= a_1 \vec{e}_1' + a_2 \vec{e}_2' + a_3 \vec{e}_3' \\
 \vec{e}_1 &= a_{11} \vec{e}_1' + a_{12} \vec{e}_2' + a_{13} \vec{e}_3' \\
 \vec{e}_2 &= a_{21} \vec{e}_1' + a_{22} \vec{e}_2' + a_{23} \vec{e}_3' \\
 \vec{e}_3 &= a_{31} \vec{e}_1' + a_{32} \vec{e}_2' + a_{33} \vec{e}_3'
 \end{aligned} \tag{1}$$



La composición vectorial nos indica que

$$\vec{0'X} = \vec{0'0} + \vec{0X}$$

y tomando coordenadas

$$x_1' \vec{e}_1' + x_2' \vec{e}_2' + x_3' \vec{e}_3' = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2' + a_3 \vec{e}_3' + x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

y tomando las expresiones (1)

$$\begin{aligned}
 x_1' \vec{e}_1' + x_2' \vec{e}_2' + x_3' \vec{e}_3' &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2' + a_3 \vec{e}_3' + x_1 (a_{11} \vec{e}_1' + a_{12} \vec{e}_2' + \\
 &+ a_{13} \vec{e}_3') + x_2 (a_{21} \vec{e}_1' + a_{22} \vec{e}_2' + a_{23} \vec{e}_3') + x_3 (a_{31} \vec{e}_1' + a_{32} \vec{e}_2' + a_{33} \vec{e}_3')
 \end{aligned}$$

reagrupando respecto de \vec{e}_1' , \vec{e}_2' , \vec{e}_3' y adoptando notación matricial resulta que el cambio de coordenadas viene dado por:

$$[1, x_1', x_2', x_3'] = [1, x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2}$$

y estas son las ecuaciones del cambio buscadas que desarrolladas quedan

$$x'_i = a_i + a_{ji} x_j$$

Tomando matrices traspuestas resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dado que los vectores \vec{e}_i y \vec{e}'_j ($i, j = 1, 2, 3$) son ortonormales, si multiplicamos cada \vec{e}_i por cada \vec{e}'_j , teniendo en cuenta las expresiones (1) resulta:

$$\vec{e}_i \vec{e}'_j = a_{i1} \vec{e}'_1 \vec{e}_j + a_{i2} \vec{e}'_2 \vec{e}_j + a_{i3} \vec{e}'_3 \vec{e}_j = a_{ij}$$

y por otra parte:

$$\vec{e}_i \vec{e}'_j = |\vec{e}_i| |\vec{e}'_j| \cos(\vec{e}_i, \vec{e}'_j) = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}'_j)$$

Luego

$$a_{ij} = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}'_j)$$

Con esto las ecuaciones (3) del cambio quedan:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_1) & \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_1) & \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_1) \\ 0 & \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_2) & \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_2) & \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_2) \\ 0 & \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_3) & \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_3) & \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

En lo que sigue supondremos que \mathbf{R} y \mathbf{R}' tienen el mismo origen y entonces resulta

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_1) & \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_1) & \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_1) \\ \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_2) & \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_2) & \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_2) \\ \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_3) & \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_3) & \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_3) \end{bmatrix} \quad (4)$$

1.2. Giro de ejes.

Vamos a estudiar ahora algunos cambios de coordenadas, particulares, precisamente aquéllos en que \mathbf{R}' procede de giros efectuados sobre alguno de los ejes de \mathbf{R} .

a) Paso del sistema $\mathbf{R} = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ al $\mathbf{R}' = \{0, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ obtenido mediante un giro de ángulo α alrededor de \vec{e}_1 (en sentido positivo, contrario al giro de las agujas del reloj).

En este caso será $\vec{e}_1 = \vec{e}'_1$ y entonces

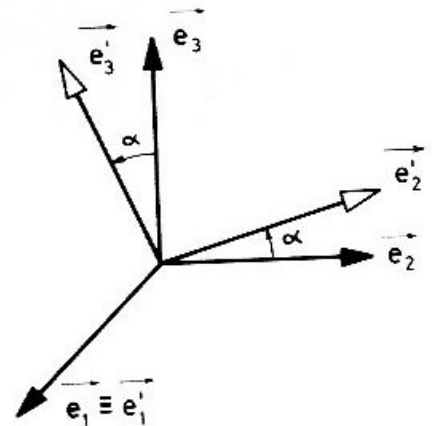
$$(\vec{e}_1, \vec{e}'_1) = 0^\circ$$

$$(\vec{e}_2, \vec{e}'_1) = (\vec{e}_3, \vec{e}'_1) = (\vec{e}_1, \vec{e}'_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}'_3) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\vec{e}_2, \vec{e}'_2) = (\vec{e}_3, \vec{e}'_3) = \alpha$$

$$(\vec{e}_3, \vec{e}'_2) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$(\vec{e}_2, \vec{e}'_3) = \frac{\pi}{2} + \alpha$$



Por consiguiente la matriz A que representaremos en este caso por R_1 es:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ 0 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

b) Paso del sistema \mathbf{R} al \mathbf{R}' mediante un giro de ángulo β alrededor de \vec{e}_2 . Procediendo análogamente al caso anterior resulta:

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

c) Paso del sistema \mathbf{R} al \mathbf{R}' mediante un giro de ángulo γ alrededor de \vec{e}_3 . En este caso se obtiene:

$$R_3 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \text{sen } \gamma & 0 \\ -\text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3. *Inversión de ejes.*

Ahora el sistema \mathbf{R}' se obtiene del \mathbf{R} mediante la inversión del sentido de algún eje.

a) Paso de \mathbf{R} a \mathbf{R}' donde $\vec{e}'_1 = -\vec{e}_1$, $\vec{e}_2 = \vec{e}'_2$, $\vec{e}_3 = \vec{e}'_3$

Los ángulos de la matriz (4) son:

$$(\vec{e}_1, \vec{e}'_1) = \pi$$

$$(\vec{e}_2, \vec{e}'_1) = (\vec{e}_3, \vec{e}'_1) = (\vec{e}_1, \vec{e}'_2) = (\vec{e}_3, \vec{e}'_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}'_3) = (\vec{e}_2, \vec{e}'_3) = \pi/2$$

$$(\vec{e}_2, \vec{e}'_2) = (\vec{e}_3, \vec{e}'_3) = 0$$

Por consiguiente la matriz A que representaremos por I_1 es

$$I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Paso de \mathbf{R} a \mathbf{R}' donde $\vec{e}_1 = \vec{e}'_1$, $\vec{e}_2 = -\vec{e}'_2$, $\vec{e}_3 = \vec{e}'_3$

En este caso resulta:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Paso de \mathbf{R} a \mathbf{R}' donde $\vec{e}_1 = \vec{e}'_1$, $\vec{e}_2 = \vec{e}'_2$, $\vec{e}_3 = -\vec{e}'_3$

En este caso resulta:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.4. *Expresión de un cambio cualquiera de sistema de referencia como producto de las matrices definidas en 1.2 y 1.3.*

Dado un cambio de sistema de referencia, con un mismo origen, éste siempre podremos expresarlo analíticamente como producto de matrices definidas para giros e inversiones: $R_i, I_i, i = 1, 2, 3$.

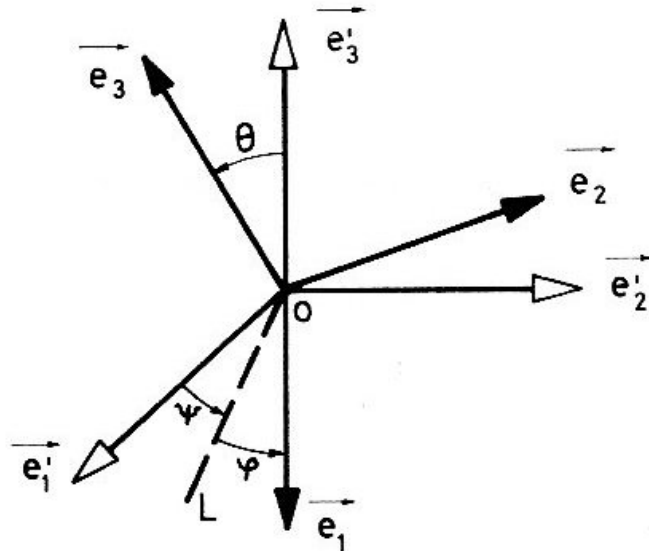
Sean los sistemas $\mathbf{R} = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $\mathbf{R}' = \{0, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$

a) Mediante las inversiones oportunas podremos conseguir en primer lugar que tanto \mathbf{R} como \mathbf{R}' tengan la misma orientación.

b) En estas condiciones como entre los nueve cosenos directores de la matriz A del cambio existen seis relaciones debidas a la ortogonalidad de los ejes, quedan tres independientes, por consiguiente

podremos reducir el cambio de sistema de referencia a tres giros alrededor de los ejes.

Es clásica la descomposición en tres giros según los conocidos ángulos de Euler que son los siguientes (ver figura):



el ángulo ψ que forma el eje \vec{e}'_1 con la recta OL , intersección de los planos $\vec{Oe}'_1\vec{e}'_2$ y $\vec{Oe}_1\vec{e}_2$, este ángulo fija el plano determinado por \vec{e}'_3 y la línea de los nodos OL ; el ángulo φ que forma \vec{e}_1 con OL y que define la posición del plano $\vec{e}_1\vec{O}\vec{e}_3$; y finalmente el ángulo θ que forman \vec{e}_3 y \vec{e}'_3 que fija la posición de \vec{e}_3 . De esta forma queda definitivamente fijada la posición del triedro $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ respecto al $\{O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$.

Suponiendo igual orientación de \mathbf{R} y \mathbf{R}' el cambio de sistema de referencia para los ángulos de Euler viene dado por

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta & \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\theta & \sin\psi \sin\theta \\ -\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \cos\theta & -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\theta & \cos\psi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & -\cos\varphi \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

1.5. La transformación inversa.

Dado un cambio del sistema de referencia \mathbf{R} al \mathbf{R}' con el mismo origen

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

hemos visto cómo podemos descomponer la matriz A en producto de matrices de rotación en inversión; en el caso más general será:

$$A = R_1 R_2 R_3 I_1 I_2 I_3$$

La transformación inversa de \mathbf{R}' a \mathbf{R} vendrá dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

siendo A^{-1} la matriz inversa de A .

Ahora bien:

$$A^{-1} = [R_1 R_2 R_3 I_1 I_2 I_3]^{-1} = I_3^{-1} I_2^{-1} I_1^{-1} R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1}$$

Siendo I_i inversiones $I_i^{-1} = I_i^T = I_i$ pues $\det(I_i) = -1$ y siendo R_i rotaciones $R_i^{-1} = R_i^T$ $\det(R_i) = 1$. Por consiguiente:

$$A^{-1} = I_3 I_2 I_1 R_3^T R_2^T R_1^T = A^T$$

luego la transformación inversa viene dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de la matriz A .

1.6. Coordenadas esféricas.

Si OX , OY , OZ , α y β tienen la configuración representada en la figura, las coordenadas cartesianas de un punto P vendrán dadas por

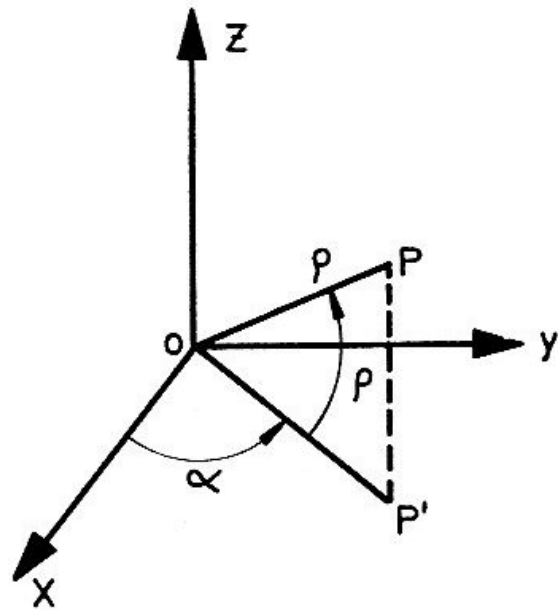
$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \alpha \cos \beta \\y &= \rho \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \\z &= \rho \operatorname{sen} \beta\end{aligned}$$

y las coordenadas esféricas.

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\alpha = \operatorname{arc. tag} \frac{y}{x}$$

$$\beta = \operatorname{arc tag} (z / \sqrt{x^2 + y^2})$$



Para estrellas tomaremos $\rho = 1$, por consiguiente será necesario normalizar (x, y, z) en algunos casos para obtener α y β .

2. CÁLCULO DE AÑOS TRÓPICOS.

2.1. Definiciones.

Se define el *año trópico* como el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el equinoccio medio de primavera. Dicho de otra forma más rigurosa, *año trópico* es el intervalo de tiempo en el cual la longitud media del Sol referida al equinoccio medio de la fecha incrementa 360° .

Se define el origen del *tiempo de efemérides* tomando la siguiente referencia: Al momento, cerca del comienzo del año del calendario 1900, en el cual la longitud media geométrica del Sol era de $279^\circ 41' 48''.04$ se le asigna exactamente el año 1900 enero 0 días y 12 horas de tiempo de efemérides.

Se define la duración del *año de efemérides* como la duración del año trópico correspondiente a 1900 enero 0,5 tiempo de efemérides, manteniéndose esta duración constantemente.

Se define el *segundo de efemérides* como la fracción del año de efemérides $1/31556925,9747$.

Se define el *día de efemérides*, como el intervalo de tiempo constituido por 86400 segundos de efemérides. A este intervalo de tiempo se llama también *día juliano*.

Se define el *siglo juliano* como el intervalo de tiempo constituido por 36525 días julianos.

Se define la *fecha juliana* como el número de días julianos transcurridos a partir del 1 de enero del año 4713 antes de Cristo a mediodía medio.

El día juliano correspondiente a 1900 enero 0.5 T.E. se determina como sigue:

$$(4712 + 1900) \times 365.25 - 13 = 2415020.0$$

donde 4712 es el año juliano correspondiente al año 0 de nuestra Era; 13 es el número de días a deducir en virtud de las reformas introducidas en el calendario; y 2415020.0 es la fecha juliana correspondiente al tiempo dado. No hay que confundir la fecha juliana que se acaba de definir con una fecha del calendario juliano.

Para determinar la fecha juliana correspondiente a enero 0.5 de un año A basta aplicar la siguiente fórmula:

$$FJ = (4712 + A) \times 365.25 - C + E + 2$$

donde C son las centenas de A y E es la parte entera del cociente C/4.

Desde 1900 hasta el año 2099 esta fórmula queda reducida a:

$$JF = (4712 + A) \times 365.25 - 13$$

Si resultase parte decimal, se despreciará dicha parte tomando como fecha juliana solamente la parte entera. Si a esta parte entera se le suma 0,5 obtenemos la fecha juliana para el Año A enero 1, tiempo de efemérides. Resulta esto de considerar que el día de efemérides comienza a contar en la medianoche media, mientras que este mismo día juliano comienza a contar en el mediodía medio que sigue inmediatamente a la medianoche media anterior, ambos referidos al meridiano de las efemérides. Si el año A fuese bisiesto hay que restar un día más debido a que el día incrementado no ha sucedido aún el 0.5 de enero.

Resumiendo tenemos las siguientes equivalencias:

1900 enero 0,5 T.E. = 1899 diciembre 31.5 T.E. = 2415020.0 día juliano = 1900 enero 0 m.d.m. meridiano de efemérides = 1900 enero 0.0 tiempo astronómico según el cómputo de antes de 1925.

2.2. Duración del Año Trópico

Dado que el movimiento relativo del Sol en la Eclíptica no es uniforme, tampoco permanece constante la duración del año trópico, sino que disminuye con el paso del tiempo.

Según S. Newcomb [4] la duración del año trópico viene dada por la expresión:

$AT = 365.24219879 - 0.00000614 FS$ días de efemérides siendo FS la fracción de siglo juliano contado a partir de 1900 enero 0.5 T.E.

Esta fracción de siglo juliano se determina por

$$FS = \frac{\text{fecha juliana} - 2415020.0}{36525}$$

2.3. Comienzo del Año Trópico

El comienzo del año trópico está fijado por convenio en el momento en que la longitud media aparente del Sol es de 280° . Este momento se representa por A.0 siendo A el número del año, así se tiene 1900.0 p.e.

La longitud media del Sol relativa al equinoccio medio de primavera de la fecha viene dada, según S. Newcomb, por la expresión [4].

$$L_0 = 279^\circ 41' 48''.04 + 129602768''.13 FS + 1''.089 FS^2$$

o bien:

$$L_0 = 279.696677778 + 36000.768925 FS + 0.0003025 FS^2$$

donde FS es la fracción de siglo juliano contada a partir de 1900 enero 0.5.

La longitud media del Sol, L_0 , se convierte en longitud media aparente incluyendo la constante de aberración:

$$L = L_0 - 20''.4358$$

$$L = L_0 - 0^\circ.005693333$$

según que se exprese en grados, minutos y segundos o en grados y decimales de grado respectivamente.

Obtenida la longitud media aparente, L, observamos que para alcanzar la longitud media aparente de 280° el Sol tiene que girar un ángulo $280^\circ - L$. En dicho giro el Sol invertirá un cierto tiempo que es el que interesa.

El movimiento medio del Sol viene dado por la expresión

$$n = 360/AT$$

que desarrollada es

$$n = 0.9856076686 + 0.00000001657 FS$$

donde FS es, como antes, la fracción de siglo juliano contado a partir de 1900 enero 0.5 T.E.

Conocido el movimiento propio resulta que el Sol tardará en recorrer el ángulo $280^\circ - L$ un tiempo:

$$t = \frac{280 - L}{n}$$

Sustituyendo n por $\frac{360}{AT}$ resulta:

$$t = (280 - L) \frac{AT}{360}$$

o bien

$$t = (280 - L) (1.0141616633 - 0.00000001705 \text{ FS})$$

donde FS es la fracción de siglo ya mencionada.

Este t es la diferencia entre el origen del año A enero 0.5 T.E. y el origen del año trópico A.0. esto es

$$0AT = A \text{ enero } 0,5 + t$$

2.4. Ejemplos numéricos.

a) Determinación del origen del año trópico 1969.0.

Fecha juliana el 0.5 enero 1969 =	
= (4712 + 1969).365,25 — 13	2440222.0
Fecha juliana el 0.5 enero 1900 =	2415020.0
Días julianos transcurridos =	25202.0

$$\text{Fracción de siglo juliano} = \frac{25202.0}{36525} = 0.68993155 = \text{FS}$$

$$\text{FS}^2 = 0.476091$$

Duración del año trópico 1969.0

$$AT = 365.24219455 \text{ días de efemérides}$$

Longitud media del Sol en 1969 enero 0.5 T.E.: $L_0 = 279.98095158$

Longitud media aparente del Sol en 1969 enero 0.5 T.E.

$$L = 279^{\circ}97626547$$

Angulo a recorrer por el Sol

$$280^{\circ} - L = 0^{\circ}.02473453$$

$$\Delta t = 0.02509466 \text{ días}$$

$$0AT \text{ 1969.0} = 1969 \text{ enero } 0.52509466$$

b) Determinación del número de años trópicos transcurridos desde el año 1900.0 hasta un instante t que será 1969 agosto 22 a las 18^h T.E.

Duración del año trópico 1969.0:

$$AT = 365.24219455 \text{ días de efemérides}$$

Número de días transcurridos desde enero.0 hasta agosto 22 a 18^h T.E.

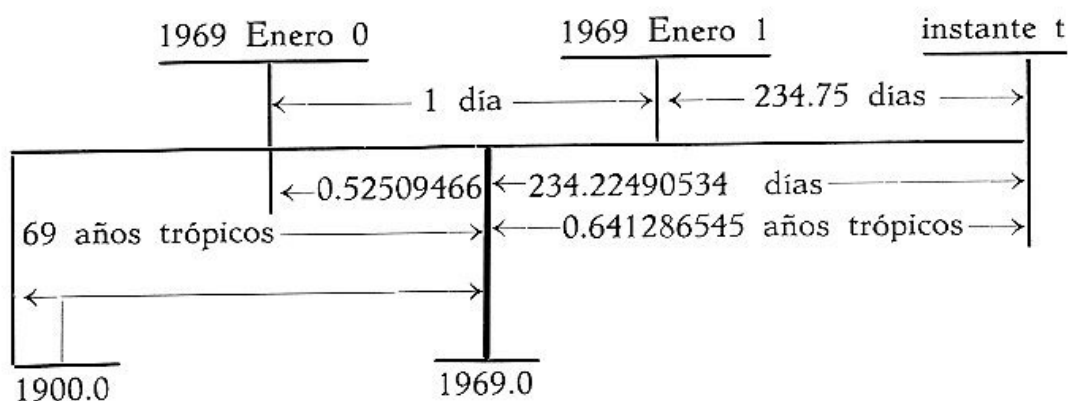
$$\begin{aligned} \text{Días: } & 1 + 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + \\ & + 31 + 21 + 0.75 = 234.75 \end{aligned}$$

El número de años trópicos transcurridos desde 1900.0 hasta 1969.0 es exactamente 69. Desde 1969 enero 0 hasta el momento t han transcurrido 234.75 días. Desde 1969 enero 0 hasta 1969.0 han transcurrido 0.52509466 días.

Por consiguiente, desde 1969.0 hasta el instante t habrán transcurrido:

$$234.75 - 0.52509466 = 234.22490534$$

El siguiente gráfico ilustra lo dicho



Los días 234.22490534 se transforman en fracción de año trópico dividiendo por la duración del año trópico 1969.0. Así resulta

$$FA = 0.641286545$$

Luego el número de años trópicos transcurridos desde 1900.0 hasta 1969 agosto 22 a 18ⁿ de T.E. es

$$AT = 69.641286545$$

3. TEORÍA DEL MÉTODO

La reducción de posiciones medias a aparentes, desde el punto de vista astronómico geométrico, consiste en un cambio de sistema de referencia. La relación entre dichos sistemas de referencia se obtiene en función de los desplazamientos de los planos fundamentales, fenómenos de precesión y nutación; y en función de los fenómenos de aberración y paralaje. Obtendremos dicho cambio de sistemas de referencia por medio de rotaciones y traslaciones.

3.1. Coordenadas eclípticas medias 1950.0.

Para dar la máxima generalidad al método, vamos a partir de unas coordenadas α , δ , ecuatoriales medias 1950.0, obtenidas de un catálogo de estrellas de donde también tomaremos las componentes μ_α , μ_δ

del movimiento propio, la paralaje π y el número y magnitud para identificar la estrella.

Las coordenadas cartesianas se obtiene a partir de las esféricas por:

$$u = \cos \alpha \cos \delta$$

$$v = \sin \alpha \cos \delta$$

$$w = \sin \delta$$

y para el movimiento propio:

$$\mu_u = -\mu_\alpha \sin \alpha \cos \delta - \mu_\delta \cos \alpha \sin \delta$$

$$\mu_v = \mu_\alpha \cos \alpha \cos \delta - \mu_\delta \sin \alpha \sin \delta$$

$$\mu_w = \mu_\alpha \cos \delta$$

Nota: En lo que sigue iremos alternando la notación (u, v, w) con la (x, y, z) según pasemos de un sistema a otro.

Obtenidas las coordenadas cartesianas ecuatoriales 1950.0 se pasa a coordenadas cartesianas eclípticas 1950.0 sin más que considerar la oblicuidad de la eclíptica para 1950.0.

La oblicuidad media de la eclíptica viene dada por [1]

$$\omega = 23^\circ 27' 08'' .26 - 0'' .46844 t - 0'' 000 000 6 t^2 + \\ + 0'' .000 000 001 83 t^3$$

$$\omega = 23^\circ 45' 22.94444 - 0^\circ .000 130 122222 t - \\ - 0^\circ .000 000 000 16666 t^2$$

$$\omega = 23^\circ 44' 57.879167 - 0^\circ .000 130122222 TR - \\ - 0^\circ .000 000 000 16666 TR^2$$

donde tanto aquí como en lo sucesivo t es el número de años trópicos y fracción transcurridos desde 1950.0 a un instante τ y TR es el número de años trópicos y fracción transcurridos desde 1950.0 a un instante τ' . La primera expresión da ω en grados, minutos y segundos y las otras dos en grados y decimales que serán las utilizadas en el programa de cálculo.

Así pues para $\tau = 1950.0$, esto es, $t = 50$ o $TR = 0$, resulta:

$$\varepsilon = 23^\circ .4457879167$$

En estas condiciones el cambio de coordenadas vendrá dado mediante un giro de ángulo ε alrededor del eje OU, dirección del punto Aries. La matriz de dicho giro es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$

y así resultan las fórmulas de transformación:

$$\begin{aligned}x &= u \\y &= v \cos \varepsilon + w \operatorname{sen} \varepsilon \\z &= -v \operatorname{sen} \varepsilon + w \cos \varepsilon\end{aligned}$$

y para los movimientos propios

$$\begin{aligned}\mu_x &= \mu_u \\ \mu_y &= \mu_v \cos \varepsilon + \mu_w \operatorname{sen} \varepsilon \\ \mu_z &= -\mu_v \operatorname{sen} \varepsilon + \mu_w \cos \varepsilon\end{aligned}$$

Nota: Los catálogos de estrellas nos dan sus coordenadas en un sistema ecuatorial; ahora bien para un trabajo continuado siguiendo este método es muy conveniente el obtener previamente un catálogo, verificando los cambios que se acaban de exponer, en el cual se disponga directamente de coordenadas cartesianas eclípticas con lo cual se ahorrará el tener que estar pasando a este sistema cada estrella en cada caso.

3.2. Corrección por movimiento propio.

Las coordenadas cartesianas eclípticas medias 1950.0, x , y , z se corrigen por movimiento propio, conociendo sus componentes en el mismo sistema de referencia, mediante las relaciones:

$$\begin{aligned}u &= x + \mu_x \operatorname{TR} - \frac{1}{2} \mu_x \operatorname{TR}^2 \\ v &= y + \mu_y \operatorname{TR} - \frac{1}{2} \mu_y \operatorname{TR}^2 \\ w &= z + \mu_z \operatorname{TR} - \frac{1}{2} \mu_z \operatorname{TR}^2\end{aligned}$$

siendo $\mu = \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2$ y TR el número de años trópicos transcurridos desde 1950.0 época del catálogo hasta el instante considerado. (La unidad para medir TR depende del catálogo de estrellas que se utilice, lo anterior es válido para el catálogo S.A.O.)

3.3. Corrección por precesión y nutación.

Realizaremos esta corrección en sucesivas fases:

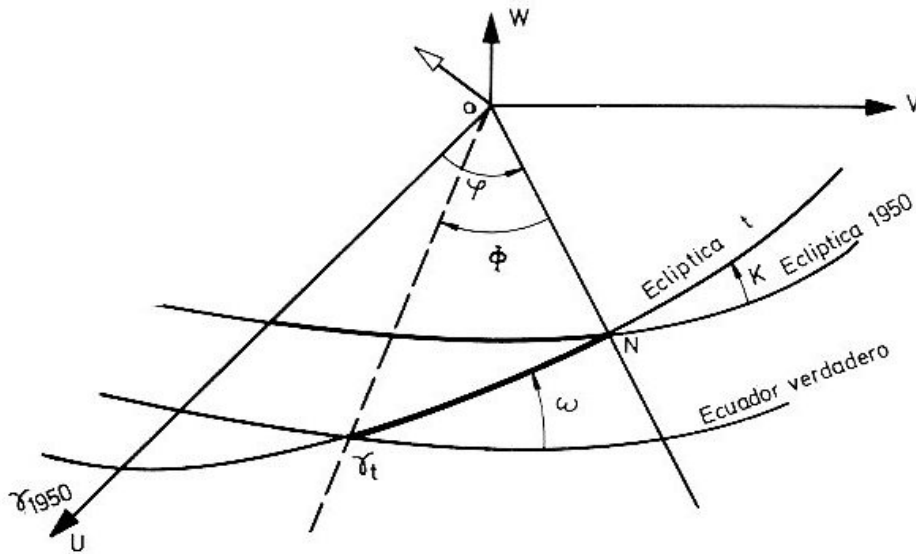
a) Longitud de la intersección de las eclípticas.

Se realiza un giro de ángulo φ alrededor de OW, llevando el eje OU a la dirección del punto N, intersección de las eclípticas.

Viene dado en [1] por:

$$\begin{aligned}\varphi &= 173^\circ 57' 03'' + 32''.869t + 0''.56.10^{-4}t^2 + \\ &\quad + (-8''.694 - 0''.55.10^{-4}t)\theta + 3''.10^{-6}\theta^2 \\ \varphi &= 174.4073861111 - 0.0024157638 \operatorname{TR} + 0.000\ 000\ 000\ 8 \operatorname{TR}^2\end{aligned}$$

donde t y TR tienen los mismos significados que en 3.1 y θ es el número de años trópicos transcurridos desde una época τ a otra τ' , $\theta = \tau' - \tau$.



La matriz de este giro es:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) *Inclinación de las eclípticas.*

Se realiza una rotación de ángulo k alrededor de OU' siendo k la inclinación de la eclíptica en τ con la eclíptica en τ' y viene dada [1] por

$$k = (0''47107 - 0''675 \cdot 10^{-5}t + 0''57 \cdot 10^{-9}t^2)\theta + (-3''37 \cdot 10^{-6} + 0''57 \cdot 10^{-9}t)\theta^2 + 0''05 \cdot 10^{-9}\theta^3$$

$$k = 0.000\ 130\ 759\ TR - 0.000\ 000\ 000\ 9\ TR^2$$

siendo t , θ y TR los ya definidos.

La matriz de este giro es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos k & \text{sen } k \\ 0 & -\text{sen } k & \cos k \end{bmatrix}$$

c) *Paso al equinoccio verdadero.*

Este paso también lo realizaremos mediante una rotación alrededor de OW'' de ángulo $-\Phi$ siendo

$$\Phi = \varphi + \lambda + (N + dN)$$

donde φ es el $\overline{\gamma_N}$ anterior, y λ es la precesión general dada por [1]

$$\begin{aligned} \lambda &= (50''25641 + 222''29.10^{-6}t + 0''26.10^{-9}t^2)\theta + \\ &+ (111''15.10^{-6} + 0''26.10^{-9}t)\theta^2 + 0''1.10^{-9}\theta^3 \\ \lambda &= 0^\circ.0139632014 \text{ TR} + 0^\circ.000\ 000\ 031 \text{ TR}^2 + \\ &+ 0.000\ 000\ 000\ 0028 \text{ TR}^3 \end{aligned}$$

($N + dN$) es la nutación en longitud y su valor viene dado en las tablas (p. e. [1] pág. 34-42).

La matriz de este giro es:

$$\begin{bmatrix} \cos \Phi & -\text{sen } \Phi & 0 \\ \text{sen } \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El resultado de estas tres rotaciones vendrá dado por el producto de las matrices respectivas y queda establecido por las siguientes expresiones globales que permiten el paso de U, V, W a x, y, z .

$$\begin{aligned} x &= (\cos \Phi \cos \varphi + \text{sen } \Phi \text{sen } \varphi \cos k)u + (\cos \Phi \text{sen } \varphi - \\ &\quad - \text{sen } \Phi \cos \varphi \cos k)v - \text{sen } \Phi \text{sen } k w \\ y &= (\text{sen } \Phi \cos \varphi - \cos \Phi \text{sen } \varphi \cos k)u + (\text{sen } \Phi \text{sen } \varphi + \\ &\quad + \cos \Phi \cos \varphi \cos k)v + \cos \Phi \text{sen } k w \\ z &= \text{sen } \varphi \text{sen } k u - \cos \varphi \text{sen } k v + \cos k w \end{aligned}$$

3.4. *Coordenadas cartesianas eclípticas aparentes tiempo T.*

Al considerar el movimiento de la Tierra en la eclíptica aparece el efecto de la aberración anual por el cual las estrellas parecerán describir a lo largo del año unas elipses, de semieje mayor v/c , siendo v y c las velocidades de la Tierra y de la luz respectivamente en un plano paralelo al de la eclíptica, siendo la posición real de las estrellas el centro de dichas elipses y este punto es el que nos proporciona el catálogo (sistema heliocéntrico). Además hemos de considerar el efecto de la paralaje anual semejante al anterior y que depende de la posición relativa del Sol en la eclíptica. A nosotros nos va a interesar la posición de la estrella como vista desde la Tierra, así pues, es preciso introducir unas correcciones.

Ya que disponemos de coordenadas eclípticas, y puesto que los efectos de la aberración y paralaje anuales se producen en un plano paralelo al de la eclíptica, solamente hemos de corregir por estos efectos las coordenadas x e y , resultando además en este sistema fórmulas sencillas. (Ventaja de haber elegido coordenadas eclípticas.)

Siendo \odot la longitud aparente del Sol que puede tomarse de las tablas habituales, corregida de su propia aberración, se obtienen las nuevas coordenadas mediante las relaciones de traslación

$$\begin{aligned} u &= x + k \operatorname{sen} \odot + \pi \cos \odot \\ v &= y - k \cos \odot + \pi \operatorname{sen} \odot \\ w &= z \end{aligned}$$

siendo $k = -v/c$ la constante de aberración $k = 20''4958$ y π la paralaje de la estrella (no conocida para todas).

3.5. *Coordenadas ecuatoriales aparentes tiempo T.*

Las coordenadas en el sistema de referencia ecuatorial se obtienen mediante un giro de ángulo $-\bar{\omega}$ alrededor del eje OU siendo

$$\bar{\omega} = \omega + \Omega + d\Omega$$

donde ω es la oblicuidad de la eclíptica dada en 3.1 y para el tiempo T y $\Omega + d\Omega$ es la nutación en oblicuidad que puede tomarse de las tablas [1].

La matriz de este giro es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \bar{\omega} & -\operatorname{sen} \bar{\omega} \\ 0 & \operatorname{sen} \bar{\omega} & \cos \bar{\omega} \end{bmatrix}$$

y las ecuaciones del cambio

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \cos \bar{\omega} - w \operatorname{sen} \bar{\omega} \\ z &= -v \operatorname{sen} \bar{\omega} + w \cos \bar{\omega} \end{aligned}$$

3.6. *Corrección por aberración diurna.*

Esta corrección se introduce a fin de eliminar la influencia de la rotación de la Tierra en las coordenadas de las estrellas. Esta corrección se aplica más fácilmente a las coordenadas esféricas (α , δ) que a las cartesianas; así lo haremos. α y δ se obtienen por las conocidas relaciones

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \\ \delta &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

La corrección en cuestión se realiza por las expresiones

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + D_\alpha \\ \delta' &= \delta + D_\delta \end{aligned}$$

donde los términos correctivos vienen dados por

$$D_{\alpha} = \frac{0.320 \cos \varphi \cos H}{\cos \delta}$$

$$D_{\delta} = 0.320 \cos \varphi \operatorname{sen} H \operatorname{sen} \delta$$

en segundos de arco y donde φ es la latitud astronómica del lugar y $H = \theta - \alpha$ el ángulo horario de la estrella (θ es la hora sidérea local).

Una vez corregidas, se pasa a coordenadas cartesianas por las conocidas relaciones:

$$\begin{aligned} u &= \cos \alpha' \cos \delta' \\ v &= \operatorname{sen} \alpha' \cos \delta' \\ w &= \operatorname{sen} \delta' \end{aligned}$$

3.7. Corrección por refracción.

El efecto de la refracción atmosférica introduce una desviación en las direcciones de los rayos de luz que atraviesan la atmósfera terrestre, a causa de la cual las estrellas no se encuentran en la dirección en que son observadas, sino en aquella resultante después de efectuar la oportuna corrección por refracción.

La corrección por refracción hemos de hacerla en coordenadas locales por depender fundamentalmente de la distancia cenital de la estrella. Así pues, hemos de transformar primeramente las coordenadas ecuatoriales en coordenadas horizontales.

Esto se consigue mediante dos giros:

I. Un giro alrededor de OW y de ángulo θ , siendo θ la hora sidérea local. La matriz correspondiente es:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II. Un giro alrededor de OU' de ángulo $90 - \varphi$, siendo φ la latitud del lugar. La matriz correspondiente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \end{bmatrix}$$

La matriz de la transformación será la matriz producto de éstas, esto es:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi & \cos \theta \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \\ \operatorname{sen} \theta \cos \varphi & -\cos \theta \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \end{bmatrix}$$

Entonces las coordenadas cartesianas horizontales vienen dadas por

$$\begin{aligned}x &= u \cos \theta + v \sin \theta \\y &= -u \sin \theta \sin \varphi + v \cos \theta \sin \varphi + w \cos \varphi \\z &= u \sin \theta \cos \varphi + v \cos \theta \cos \varphi + w \sin \varphi\end{aligned}$$

De las diversas teorías sobre la refracción se utiliza la fórmula que se da a continuación y cuya exposición teórica puede verse en (2).

La fórmula es

$$R = \alpha_0 (1 - \beta_0) \operatorname{tg} D_z - \alpha_0 \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \operatorname{tg}^3 D_z + 3 \alpha_0 \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}\right)^2 \operatorname{tg}^5 D_z - 3.5 \alpha_0 \left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}\right)^3 \operatorname{tg}^7 D_z + \dots$$

donde D_z es la distancia cenital, que se obtiene por

$$\operatorname{tg} D_z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

α_0 y β_0 son ciertos parámetros que dependen de las condiciones físicas, presión y temperatura, para el momento y lugar de observación.

Estos parámetros tienen las expresiones

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= [\alpha_0]_{760} \frac{P}{760} \frac{273}{273 + T} \\ \beta_0 &= [\beta_0]_{760} \frac{273 + T}{273}\end{aligned}$$

donde P es la presión normal obtenida de la observada por

$$P = p (1 - 0.00264 \cos 2\varphi - 0.000\,000\,196 H - 0.000163 T)$$

siendo p la presión observada, φ la latitud del lugar y H la altitud sobre el nivel del mar del lugar de observación. T es la temperatura observada.

$$\begin{aligned}[\alpha_0]_{760} &= 0.00029255 \\ [\beta_0]_{760} &= 0.001254\end{aligned}$$

Una vez obtenida la refracción que por hipótesis solamente influye en la variación de la distancia cenital y no en el acimut, vamos a obtener las coordenadas corregidas.

La nueva distancia cenital será

$$D'_z = D_z - R$$

y las nuevas coordenadas cartesianas horizontales son

$$u = \operatorname{sen} D'_z \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad v = \operatorname{sen} D'_z \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad w = \cos D'_z$$

Estas coordenadas se pasan definitivamente a ecuatoriales mediante los giros inversos a los anteriores, esto es, por la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi & \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \varphi & -\cos \theta \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \end{bmatrix}$$

y así obtenemos

$$\begin{aligned} x &= u \cos \theta - v \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + w \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ y &= u \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta \operatorname{sen} \varphi - w \cos \theta \cos \varphi \\ z &= v \cos \varphi + w \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

Nota. En realidad esta corrección de refracción se suele aplicar a las coordenadas observadas, ya que una vez hecha la observación es cuando se conocen la presión y la temperatura. Entonces habrá que tomar

$$D_z = D'_z + R$$

4. EL PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO.

Como puede verse sin más que observar el listado adjunto el programa es la simple traducción al lenguaje Fortran IV del método teórico anteriormente expuesto. Recibe el nombre de ARIES.

En una primera parte aparecen las instrucciones de lectura de los datos propios de estación de observación y los datos tomados de un anuario (2 tarjetas), con el siguiente significado de las variables.

NU: Número indicador de orden.

AN, MES, DIA: Año, mes y día para los que se desean obtener las coordenadas reducidas (día D).

TUH, TUM, TUS: Tiempo Universal en horas minutos y segundos con tres decimales del momento para el que se desean las coordenadas.

ALG, ALM, ALS: Longitud astronómica, en grados, minutos y segundos con decimales, positiva hacia el Oeste, del punto para el que se requieren las coordenadas.

AFG, AFM, AFS: Latitud astronómica de dicho punto en horas, minutos y segundos.

HN: Altitud normal en metros, de la estación.

PR, TEM: Presión y temperatura en el momento y lugar de observación. (Si no se desea corregir de refracción y aberración diurna, estos datos no interesan.)

FA: Número entero de días del año transcurridos hasta el día D a 0^h.

TSH, TSM, TSS: Hora sidérea a m.n.m. en Greenwich para el día D

ALO1, ALO2: Longitud aparente del Sol para el día D y el D + 1.

ABER: Aberración del Sol en longitud para el día D.

ANL1, ANL2: Términos de nutación en longitud de largo y corto período para el día D y el día D + 1, respectivamente.

ANO1, ANO2: Idem, en oblicuidad para el día D y D + 1.

Una vez leídos estos datos se calcula el número TR de años trópicos transcurridos desde 1950.0 hasta el momento requerido, y a continuación se preparan las matrices de rotación y las constantes para las correcciones. Esto se hace antes de leer estrellas puesto que generalmente serán los mismos valores para todas ellas y de esta forma se economiza tiempo de máquina.

Seguidamente se leen los datos de estrellas, sus coordenadas, movimiento propio, paralaje, número y magnitud. El programa está preparado para leer coordenadas ecuatoriales, que posteriormente se transforman en eclípticas, en tarjetas perforadas, pero fácilmente pueden cambiarse las instrucciones a fin de poder leer de una cinta magnética en la que habrá impreso un Catálogo de estrellas, lo cual economiza gran trabajo de perforación para el caso en que haya que trabajar con gran número de estrellas; por otra parte la lectura en cinta magnética posibilita la repetición total del programa, en una sola pasada por el computador, para varias reducciones independiente. Lo ideal sería leer de una cinta magnética donde hubiera impreso un catálogo de estrellas y donde dichas estrellas vinieran dadas en coordenadas cartesianas eclípticas (para este caso es preciso modificar y eliminar ciertas instrucciones). Este sería el camino más rápido y eficaz para reducir posiciones de estrellas a gran escala.

En el listado adjunto aparecen las siguiente variables:

NUM: Número de la estrella.

ARH, ARM, ARS: Ascensión recta en horas, minutos y segundos.

DG, DM, DS: Declinación en grados, minutos y segundos.

AMUA, AMUD: Componentes del movimiento propio en ascensión recta y declinación respectivamente.

PAR: Paralaje en segundos de arco.

TEH, TEM, TES: Optativamente, tiempo particular de reducción.

Si la reducción ha de hacerse para pocas estrellas, para un mismo día, pero a diferentes horas, el programa está preparado para que junto a los datos de cada estrella, en la misma tarjeta, pueda perforarse la hora (TEH, TEM, TES) para la que se desea hacer la reducción de la estrella. Si esta alternativa no interesa, sino que se desean reducir todas las estrellas para un mismo momento, entonces no deberá perforarse TEH, TEM, TES y el programa toma como tiempo común el TUH, TUM, TUS ya perforados al principio.

Una vez leídos los datos de estrella se realizan las sucesivas transformaciones y correcciones a las estrellas una a una.

Finalmente se imprimen los resultados para los cuales pueden disponerse los formatos según convenga.

El programa se complementa con la subrutina CARESF que tiene por objeto obtener las coordenadas esféricas a partir de las cartesianas.

Entre las muchas ventajas de este programa destacan la rigurosidad y generalidad de las fórmulas empleadas, de forma que constituye uno de los métodos más precisos, para la reducción de posiciones de estrellas.

Por otra parte, el orden lógico del programa permite, mediante una llamada a la subrutina CARESF situada en el lugar correspondiente, obtener las coordenadas de las estrellas en cualquiera de los sistemas intermedios utilizados en toda la gama posible entre coordenadas medias 1950.0 hasta coordenadas ecuatoriales aparentes para un lugar y un momento determinados, incluyendo las coordenadas horizontales corregidas de refracción y de utilidad en múltiples problemas.

El programa está preparado para trabajar en simple precisión, pero la ausencia de almacenaje de datos en memoria, hace posible el poder trabajar en doble precisión si así se quiere, incluso con computadoras pequeñas; para ello bastaría definir en doble precisión las variables fundamentales del programa. Por intervenir continuamente en la preparación de ángulos, las constantes DERA, RADE (factores para pasar de grados a radianes y viceversa) se han dado en doble precisión, así como la variable R que normaliza las coordenadas.

Y sin más preámbulos, he aquí a continuación en banderolas el programa ARIES que además de poder utilizarse directamente puede utilizarse como subrutina de un programa principal en el que la reducción de estrellas no sea más que una de sus partes.

```

C DETERMINACION DE COORDENADAS APARENTES DE ESTRELLAS A PARTIR DE SUS
C COORDENADAS MEDIAS 1950.0
C LONGITUDES POSITIVAS HACIA EL OESTE
  DOUBLE PRECISION DERA,R
  2 READ(5,100) NU,AN,MES,IDA,TUH,TUM,TUS,ALG,ALM,ALS,AFG,AFM,AFS,HN
  1,PR,TEM
  IF(NU.EQ.0) GO TO 3
  READ(5,101) FA,TSH,TSM,TSS,ALO1,ALO2,ABER,ANL1,ANL2,ANO1,ANO2
  DERA=0.017453292519
  TU=TUH+TUM/60.+TUS/3600.
  TS=TSH+TSM/60.+TSS/3600.
  ALP=ABS(ALG)
  AL=(ALP+ALM/60.+ALS/3600.)*DERA
  IF(ALG.LT.0.) AL=-AL
  AF=(AFG+AFM/60.+AFS/3600.)*DERA
  FD=TU/24.
  FAT=FA+FD
  ANJ=1900.+AN
  DJ=(4712.+ANJ)*365.25-13.
  IDJ=DJ
  FJ=IDJ
  P=AN/4.
  IP=P
  PP=IP
  IF((P-PP).EQ.0.) FJ=FJ-1.
  FS=(FJ-2415020.)/36525.
  DAT=365.24219879-0.00000614*FS
  CAT=280.-(279.6966777+36000.768925*FS+0.0003025*FS*FS-0.005693333)
  CAT=(CAT+360.*AN)/(0.9856076686+0.00000001657*FS)
  FAT=(FAT-CAT)/DAT
  AT=AN+FAT
  TR=AT-50.
  EP=23.4457879167*DERA
  SE=SIN(EP)
  CE=COS(EP)
  PHI=(174.407386111-(0.0024157638+0.0000000008*TR)*TR)*DERA
  SP=SIN(PHI)
  CP=COS(PHI)
  AK=(0.000130759-0.0000000009*TR)*TR*DERA
  SK=SIN(AK)
  CK=COS(AK)
  ANUTL=(ANL1+(ANL2-ANL1)*FD)*DERA
  PREC=(0.0139632014+(0.00000003087+0.000000000028*TR)*TR)
  1*TR*DERA
  PN=PHI+ANUTL+PREC
  SPN=SIN(PN)
  CPN=COS(PN)
  SOL=((ALO1+(ALO2-ALO1)*FD)-ABER)*DERA
  SS=SIN(SOL)
  CS=COS(SOL)
  CAB=0.00568611111*DERA
  ANUTOB=(ANO1+(ANO2-ANO1)*FD)*DERA/3600.
  OM=(23.445787917-(0.000130122222-0.0000000001666*TR)*TR)*DERA
  1+ANUTOB
  SO=SIN(OM)

```

1
7
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24

CENTRO DE CALCULO DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID


```

CO=COS(OM)
PRR=PR*(1.-0.00264*COS(2.*AF)-0.000000196*H-0.000163*TEM)
AA=0.00029255*(PRR/760.)*(273./(273.+TEM))
BB=0.001254*((273.+TEM)/273.)
A1=AA*(1.-BB)
RE=BB-AA*0.5
A2=AA*RE
A3=A2*RE
A4=A3*RE
1 READ(5,102) NUM, ARH, ARM, ARS, DG, DM, DS, AMUA, AMUD, PAR, AMG, TEH, TEM,
ITES
IF(NUM.EQ.0) GO TO 2
ALFA=(ARH+ARM/60.+ARS/3600.)*15.*DERA
DELTA=(DG+DM/60.+DS/3600.)*DERA
SA=SIN(ALFA)
CA=COS(ALFA)
SD=SIN(DELTA)
CD=COS(DELTA)
X=CA*CD
Y=SA*CD
Z=SD
WRITE(6,200)
CALL ESF(X,Y,Z,I1,M1,S1,I2,M2,S2)
WRITE(6,201) NUM, I1, M1, S1, I2, M2, S2, AMG
AMUA=AMUA*15.*DERA/3600.
AMUD=AMUD*DERA/3600.
VMU=-AMUA*SA*CD-AMUD*CA*SD
VMU=AMUA*CA*CD-AMUD*SA*SD
WMU=AMUD*CD
U=X
V=Y*CE+Z*SE
W=-Y*SE+Z*CE
XMU=VMU
YMU=VMU*CE+WMU*SE
ZMU=-VMU*SE+WMU*CE
UU=XMU*XMU+YMU*YMU+ZMU*ZMU
X=U+XMU*TR-0.5*UU*U*TR*TR
Y=V+YMU*TR-0.5*UU*V*TR*TR
Z=W+ZMU*TR-0.5*UU*W*TR*TR
U=X*(CPN*CP+SPN*SP*CK)+Y*(CPN*SP-SPN*CP*CK)-Z*SPN*SK
V=X*(SPN*CP-CPN*SP*CK)+Y*(SPN*SP+CPN*CP*CK)+Z*CPN*SK
W=X*SP*SK-Y*CP*SK+Z*CK
PAR=(PAR/3600.)*DERA
X=U+CAB*SS+PAR*CS
Y=V-CAB*CS+PAR*SS
Z=W
R=DSQRT(X*X+Y*Y+Z*Z)
X=X/R
Y=Y/R
Z=Z/R
U=X
V=Y*CO-Z*SO
W=Y*SO+Z*CO
WRITE(6,202)
CALL ESF(U,V,W,I1,M1,S1,I2,M2,S2)
WRITE(6,201) NUM, I1, M1, S1, I2, M2, S2, AMG

```

25
26
27
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42

CENTRO DE CALCULO DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID

```

ALF=ATAN2(V,U) 43
AB=SQRT(U*U+V*V) 44
DELT=ATAN2(W,AB) 45
TE=TEH+TEM/60.+TES/3600.
IF(TE.NE.0.) TU=TE
TSG=(TS+TU+TU/365.2422)*15.*DERA
TSL=TSG-AL
SH=SIN(TSL-ALF) 48
CH=COS(TSL-ALF) 49
SD=SIN(DELT) 50
CD=COS(DELT) 51
SF=SIN(AF) 52
CF=COS(AF) 53
DEL=0.320*CF*SH*SD
DAL=0.320*CF*CH/CD
DEC=DELT+DEL*DERA/3600.
AR=ALF+DAL*DERA/3600.
X=COS(AR)*COS(DEC) 54
Y=SIN(AR)*COS(DEC) 55
Z=SIN(DEC) 56
ST=SIN(TSL) 57
CT=COS(TSL) 58
U=X*CT+Y*ST 59
V=-X*ST*SF+Y*CT*SF+Z*CF 60
W=X*ST*CF-Y*CT*CF+Z*SF 61
R=DSQRT(U*U+V*V) 62
TDZ=R/W 63
T2=TDZ*TDZ
RR=TDZ*(A1+T2*(-A2+T2*(3.*A3-3.5*A4*T2)))
DZ=ATAN(TDZ)-RR
SDZ=SIN(DZ)
X=SDZ*U/R
Y=SDZ*V/R
Z=COS(DZ) 64
U=X*CT-Y*ST*SF+Z*ST*CF
V=X*ST+Y*CT*SF-Z*CT*CF
W=Y*CF+Z*SF
WRITE(6,203) 65
CALL ESF(U,V,W,I1,M1,S1,I2,M2,S2) 66
WRITE(6,201) NUM,I1,M1,S1,I2,M2,S2,AMG 67
GO TO 1
100 FORMAT(I3,F3.0,2I2,2F3.0,F6.3,F5.0,F3.0,F6.3,2F3.0,F6.3,F8.3,
1F6.2,F4.1)
101 FORMAT(F4.0,2F3.0,F6.3,2F9.5,3F8.5,2F6.3)
102 FORMAT(I5,2F3.0,F6.3,F4.0,F3.0,F5.2,3F7.4,F4.1,2F3.0,F6.3)
200 FORMAT(1H1,45X,38HCOORDENADAS ECUATORIALES MEDIAS 1950.0///)
201 FORMAT(1H0,30X,I5,10X,6HALFA =,2I3,F7.3,10X,7HDELTA =,2I3,F7.3,
110X,F5.1,/)
202 FORMAT(1H0,46X,34HCOORDENADAS ECUATORIALES APARENTES///)
203 FORMAT(1H0,45X,36HCOORDENADAS CORREGIDAS DE REFRACCION///)
3 STOP
END

```

\$IBFTC CARESF

CENTRO DE CALCULO DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID

H. Y. M. - METEOR. 7 121

```

SUBROUTINE ESF(U,V,W,I1,M1,S1,I2,M2,S2)
DOUBLE PRECISION RADE,R
RADE=57.29577951
R=DSQRT(U*U+V*V+W*W)
X=U/R
Y=V/R
Z=W/R
A=ATAN2(Y,X)
IF(A.LT.0.) A=A+6.2831852
A=A*RADE/15.
P=SQRT(X*X+Y*Y)
D=ATAN2(Z,P)
D=D*RADE
2 NH=A
AH=NH
AM=(A-AH)*60.
AM=ABS(AM)
NM=AM
RM=NM
AS=(AM-RM)*60.
IF(A.EQ.D) GO TO 1
I1=NH
M1=NM
S1=AS
A=D
GO TO 2
1 I2=NH
M2=NM
S2=AS
RETURN
END
    
```

2
3
6
7

22222 ALFA = 0 30 8.341 DELTA = 62 39 22.127 4.2

COORDENADAS ECUATORIALES APARENTES

22222 ALFA = 0 30 35.333 DELTA = 62 42 9.439 4.2

COORDENADAS CORREGIDAS DE REFRACCION

22222 ALFA = 0 30 23.094 DELTA = 62 43 4.038 4.2

44444 ALFA = 21 17 23.179 DELTA = 62 22 23.740 2.6

COORDENADAS ECUATORIALES APARENTES

44444 ALFA = 21 17 48.462 DELTA = 62 27 24.181 2.6

COORDENADAS CORREGIDAS DE REFRACCION

44444 ALFA = 21 17 43.887 DELTA = 62 27 34.647 2.6

55555	ALFA = 20 12 14.134	DELTA = 56 24 50.939	4.3
-------	---------------------	----------------------	-----

COORDENADAS ECUATORIALES APARENTES

55555	ALFA = 20 12 39.582	DELTA = 56 28 18.879	4.3
-------	---------------------	----------------------	-----

COORDENADAS CORREGIDAS DE REFRACCION

55555	ALFA = 20 12 36.419	DELTA = 56 28 23.926	4.3
-------	---------------------	----------------------	-----

\$IBSYS

El problema inverso, e.d., el paso de coordenadas aparentes a medias 1950.0 resulta inmediato y no hay más que invertir el orden lógico de trabajo teniendo en cuenta que el giro inverso viene dado por la matriz traspuesta y las correcciones se aplican en sentido contrario.

*Universidad de Madrid,
Facultad de Ciencias*

REFERENCIAS

- [1] *Connaissance des Temps*. Bureau des Longitudes. Paris.
- [2] DANJON, A.: *Astronomie Générale*. Gauthier Villars. Paris.
- [3] DUFOUR, M. M. et FONTAINE: Formules pratiques pour le calcul électronique des coordonnées des étoiles. *Bull. Ast.* T. XXIII, f. II, p. 117-126.
- [4] *Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*. London, 1961.

INDICE

INTRODUCCIÓN	1
1. NOTA SOBRE MATRICES DE ROTACIÓN	1
1.1. <i>El cambio de sistema de referencia en el espacio euclideo tridimensional</i>	1
1.2. <i>Giro de ejes</i>	4
1.3. <i>Inversión de ejes</i>	5
1.4. <i>Expresión de un cambio cualquiera de sistema de referencia como producto de las matrices definidas en 1.2 y 1.3</i>	5
1.5. <i>La transformación inversa</i>	7
1.6. <i>Coordenadas esféricas</i>	7
2. CÁLCULO DE AÑOS TRÓPICOS	8
2.1. <i>Definiciones</i>	8
2.2. <i>Duración del año trópico</i>	9
2.3. <i>Comienzos del año trópico</i>	10
2.4. <i>Ejemplos numéricos</i>	11
3. TEORÍA DEL MÉTODO	12
3.1. <i>Coordenadas eclípticas medias 1950.0</i>	12
3.2. <i>Corrección por movimiento propio</i>	14
3.3. <i>Corrección por precesión y nutación</i>	14
3.4. <i>Coordenadas eclípticas aparentes</i>	16
3.5. <i>Coordenadas ecuatoriales aparentes</i>	17
3.6. <i>Corrección por aberración diurna</i>	17
3.7. <i>Corrección por refracción</i>	18
4. EL PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO	20
REFERENCIAS	23

PUBLICACIONES DEL SEMINARIO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID

- 1.—Efe­mé­ri­des de 63 Asteroides para la oposición de 1950 (1949).
- 2.—E. PAJARES: Sobre el cálculo gráfico de valores medios (1949).
- 3.—J. PENSADO: Órbita del sistema visual σ^2 U Maj (1950).
- 4.—Efe­mé­ri­des de 79 Asteroides para la oposición de 1951 (1950).
- 5.—J. M. TORROJA: Corrección de la órbita del Asteroide 1395 «Aribeda» (1950).
- 6.—R. CARRASCO y J. M. TORROJA: Rectificación de la órbita del Asteroide 1371 «Resi» (1951).
- 7.—J. M. TORROJA y R. CARRASCO: Rectificación de la órbita del Asteroide 1560 (1942 XB) y efe­mé­ri­des para la oposición de 1951 (1951).
- 8.—M. L. SIEGRIST: Órbita provisional del sistema visual Σ 728-32 Orionis (1951).
- 9.—Efe­mé­ri­des de 79 Asteroides para la oposición de 1952 (1951).
- 10.—J. PENSADO: Órbita provisional de Σ 1883 (1951).
- 11.—M. L. SIEGRIST: Órbita provisional del sistema visual Σ 2052 (1952).
- 12.—Efe­mé­ri­des de 88 Asteroides para la oposición de 1953 (1952).
- 13.—J. PENSADO: Órbita de ADS 9380 = Σ 1879 (1952).
- 14.—F. ALCÁZAR: Aplicaciones del Radar a la Geodesia (1952).
- 15.—J. PENSADO: Órbita de ADS 11897 = Σ 2438 (1952).
- 16.—B. RODRÍGUEZ SALINAS: Sobre varias formas de proceder en la determinación de períodos de las mareas y predicción de las mismas en un cierto lugar (1952).
- 17.—R. CARRASCO y M. PASCUAL: Rectificación de la órbita del Asteroide 1528 «Conrada» (1953).
- 18.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Órbita de ADS 1709 = Σ 228 (1953).
- 19.—J. BALTÁ: Recientes progresos en Radioastronomía. Radiación solar hiperfrecuente (1953).
- 20.—J. M. TORROJA y A. VÉLEZ: Corrección de la órbita del Asteroide 1452 (1938 DZ₁) (1953).
- 21.—J. M. TORROJA: Cálculo con Cracovianos (1953).
- 22.—S. AREND: Los polinomios ortogonales y su aplicación en la representación matemática de fenómenos experimentales (1953).
- 23.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Determinación de los instantes de los contactos en el eclipse total de sol de 25 de febrero de 1952 en Cogo (Guinea Española) (1954).
- 24.—J. PENSADO: Órbita de la estrella doble Σ 2 (1954).
- 25.—J. M. TORROJA: Nueva órbita del Asteroide 1420 «Radcliffe» (1954).
- 26.—J. M. TORROJA: Nueva órbita del Asteroide 1557 (1942 AD) (1954).
- 27.—R. CARRASCO y M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1290 «Albertine» (1954).
- 28.—J. PENSADO: Distribución de los períodos y excentricidades y relación periodo excentricidad en las binarias visuales (1955).
- 29.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Nueva órbita del Asteroide 1372 «Haremari» (1955).
- 30.—M. DE PASCUAL: Rectificación de la órbita del Asteroide 1547 (1929 CZ) (1955).

(Continúa en la tercera de cubierta)

- 31.—J. M. TORROJA: Órbita del Asteroide 1554 «Yugoslavia» (1955).
- 32.—J. PENSADO: Nueva órbita del Asteroide 1401 «Lavonne» (1956).
- 33.—J. M. TORROJA: Nuevos métodos astronómicos en el estudio de la figura de la Tierra (1956).
- 34.—D. CALVO: Rectificación de la órbita del Asteroide 1466 «Mündleria» (1956).
- 35.—M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1238 «Predappia» (1956).
- 36.—J. PENSADO: Distribución de las inclinaciones y de los polos de las órbitas de las estrellas dobles visuales (1956).
- 37.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Resultados de la observación del eclipse total de sol de 30 de junio de 1954 en Sydkoster (Suecia) (1957).
- 38.—ST. WIERZBINSKI: Solution des équations normales par l'algorithme des cracoviens (1958).
- 39.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Rectificación de la órbita del Asteroide 1192 «Prisma» (1958).
- 40.—M. LÓPEZ ARROYO: Sobre la distribución en longitud heliográfica de las manchas solares (1958).
- 41.—F. MÚGICA: Sobre la ecuación de Laplace (1958).
- 42.—F. MARTÍN ASÍN: Un estudio estadístico sobre las coordenadas de los vértices de la triangulación de primer orden española (1958).
- 43.—ST. WIERZBINSKI: Orbite Améliorée de h 4539 = γ Cen = Cpd $-48^{\circ},4965$ (1958).
- 44.—D. CALVO BARRENA: Rectificación de la órbita del Asteroide 1164 «Kobolda» (1958).
- 45.—M. LÓPEZ ARROYO: El ciclo largo de la actividad solar (1959).
- 46.—F. MÚGICA: Un nuevo método para la determinación de la latitud (1959).
- 47.—J. M. TORROJA: La observación del eclipse de 2 de octubre de 1959 desde El Aaiun (Sahara) (1960).
- 48.—J. M. TORROJA, P. JIMÉNEZ-LANDI y M. SOLÍS: Estudio de la polarización de la luz de la corona solar durante el eclipse total de sol del día 2 de octubre de 1959 (1960).
- 49.—E. PAJARES: Sobre el mecanismo diferencial de un celóstato (1960).
- 50.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Sobre la diferencia entre los radios vectores del elipsoide internacional y el esferoide de nivel (1960).
- 51.—J. M. TORROJA: Resultado de las observaciones del paso de Mercurio por delante del disco solar del 7 de noviembre de 1960 efectuadas en los observatorios españoles (1961).
- 52.—F. MÚGICA: Determinación de la latitud por el método de los verticales simétricos (1961).
- 53.—M. LÓPEZ ARROYO: La evolución del área de las manchas solares (1962).
- 54.—F. MÚGICA: Determinación simultánea e independiente de la latitud y longitud mediante verticales simétricos (1962).
- 55.—P. DíEZ-PICAZO: Elementos de la órbita de la variable eclipsante V 499 Scorpionis (1964).
- 56.—J. M. TORROJA: Los Observatorios Astronómicos en la era espacial (1965).

(Continúa en la segunda de cubierta)

- 57.—F. MARTÍN ASÍN: Nueva aportación al estudio de la red geodésica de primer orden española y su comparación con la red compensada del sistema europeo (1966).
- 58.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ: La Luz Zodiacal. Luz del espacio interplanetario (1966).
- 59.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Variaciones de las coordenadas geodésicas de los vértices de una red, por cambio de elipsoide de referencia (1966).
- 60.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ y R. DUMONT: Fotometría absoluta de la raya verde y del continuo atmosférico en el Observatorio Astronómico del Teide (Tenerife), de enero de 1964 a julio de 1965 (1967).
- 61.—M. REGO FERNÁNDEZ: Estudio del espectro de la estrella 31 Aql. en la región $\lambda\lambda$ 4000-6600 Å (1969).
- 62.—C. MACHIN: Mareas terrestres (1969).
- 63.—J. M. TORROJA: La estación para la observación de satélites geodésicos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid (1969).