

Universidad Complutense  
Facultad de Ciencias Matemáticas - Madrid

SEMINARIO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA  
(Coordinado con el Consejo Superior de Investigaciones Científicas,  
Departamento de Mecánica y Astronomía)

Publicación núm. 115

APLICACION DE LA V.L.B.I. AL ESTUDIO  
DEL MOVIMIENTO DEL POLO

por

M. A. MONTULL, M. J. SEVILLA  
Y A. GONZALEZ-CAMACHO



PRESENTADO A LA IV ASAMBLEA NACIONAL DE GEODESIA Y GEOFÍSICA

M A D R I D  
1 9 8 1

## APLICACION DE LA V.L.B.I. AL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DEL POLO

M. A. MONTULL, M.J. SEVILLA y A. GONZALEZ-CAMACHO  
Cátedra de Astronomía y Geodesia  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Universidad Complutense. Madrid.

ABSTRACT: In this paper an analysis of some equations under different conditions of the V.L.B.I. problem is carried out. The more appropriate methods of adjustment are also studied.

RESUMEN: En este trabajo se realiza un análisis de algunas ecuaciones del problema V.L.B.I. bajo diferentes condiciones. También se estudia el método más apropiado de ajuste.

### 1. INTRODUCCION

Numerosos autores han estudiado las posibles aplicaciones de la técnica V.L.B.I. a la Geodesia. Sin embargo, algunos de ellos como, por ejemplo, Cannon (1) y Thomas (2), (3) y (4) se han centrado en aquellas aplicaciones más estrechamente relacionadas con la medida de bases, mientras que otros, como Walter (5) y (6), Carter (7) y Dermanis (8), por citar algunos, conscientes de que, debido a las características geofísicas y geodinámicas de la Tierra, se producen en ésta fenómenos que afectan a la longitud de la línea de base, junto con fenómenos que afectan a la orientación de la misma en el espacio, como, por ejemplo, el movimiento del polo y la variación de la velocidad de la Tierra, se han centrado en estudiar tales fenómenos. Puesto que el movimiento del polo aparece involucrado, va a ser posible estudiar este fenómeno a través de los resultados obtenidos por observación interferométrica de muy larga base, sin más que establecer la adecuada relación funcional (modelo matemático) entre los parámetros que lo definen, las componentes de la línea de base en el sistema terrestre, las coordenadas de las radio-fuentes y los observables que hayamos considerado.

### 2. OBSERVABLES

Los observables básicos V.L.B.I. son: el retraso  $\tau$  y su variación  $\dot{\tau}$ . En el caso ideal de contar con instrumentación perfecta y propagación en el vacío, el retraso y su variación se dirán geométricos y los designaremos por  $\tau_g$  y  $\dot{\tau}_g$  respectivamente.

El retraso geométrico  $\tau_g = t_j^b - t_j^a$  es el tiempo transcurrido entre los instantes de llegada de un mismo frente de ondas (que supondremos plano) a los extremos a y b de una línea de base  $\vec{B}_i(t)$ . Como consecuencia del movimiento de la línea de base, el retraso geométrico va a ser función del tiempo, por lo que tiene sentido hablar de la variación del retraso geométrico  $\dot{\tau}_g$  como de la derivada de  $\tau_g$  con respecto al tiempo.

Consideremos una red de estaciones V.L.B.I. (Fig. 1) constituida por  $n$  líneas de base

$$\vec{B}_i(t) = \{\Delta X_i(t), \Delta Y_i(t), \Delta Z_i(t)\}^T \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

desde cuyos extremos  $a$  y  $b$  se observa una misma radiofuente  $k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) en la dirección

$$\vec{S}_k = \{\cos\delta_k \cos\alpha_k, \cos\delta_k \text{sen}\alpha_k, \text{sen}\delta_k\}^T$$

en donde  $\alpha_k$  y  $\delta_k$  son la ascensión

recta y declinación de la radiofuente en cuestión tomadas de un catálogo de radiofuentes de suficiente precisión. Para cada línea de base y cada observación podemos plantear una ecuación del tipo: (Thomas (2))

$$(\tau_j)_{ijk} = \frac{\vec{B}_i(t_j^a) \cdot \vec{S}_k}{c} + (\tau_g)_{ijk} \frac{\vec{v}_b(t_j^a) \cdot \vec{S}_k}{c}$$

$\vec{v}_b(t_j^a)$  es la velocidad lineal con que se mueve la estación  $b$  de la línea de base  $B_i(t)$  en el instante  $t_j^a$  en que la señal llegó a la estación  $a$  de la misma línea de base y  $c$  es la velocidad de la luz.

El término

$$(\tau_g)_{ijk} \frac{\vec{v}_b(t_j^a) \cdot \vec{S}_k}{c}$$

es muy pequeño por lo que podemos despreciarlo y entonces, llamando

$$d_{ijk} = c (\tau_j)_{ijk}$$

a la distancia recorrida por la señal en el retraso (retraso en unidades de distancia) la ecuación (1) puede escribirse:

$$d_{ijk} = \vec{B}_i(t_j^a) \cdot \vec{S}_k \quad (2)$$

Por un razonamiento análogo se llega a la expresión siguiente de la variación del retraso en unidades de distancia

$$\dot{d}_{ijk} = \frac{dB_i(t_j^a)}{dt} \cdot \vec{S}_k \quad (3)$$

siempre que consideremos radiofuentes de movimientos propios - despreciables.

No conviene pasar por alto el hecho de que los tiempos de recepción de las señales se miden en relojes atómicos (que no consideramos parte de la instrumentación), y que los cálculos teóricos del retraso y de su variación han de efectuarse en un sistema casi inercial, por lo que será preciso transformar los tiempos

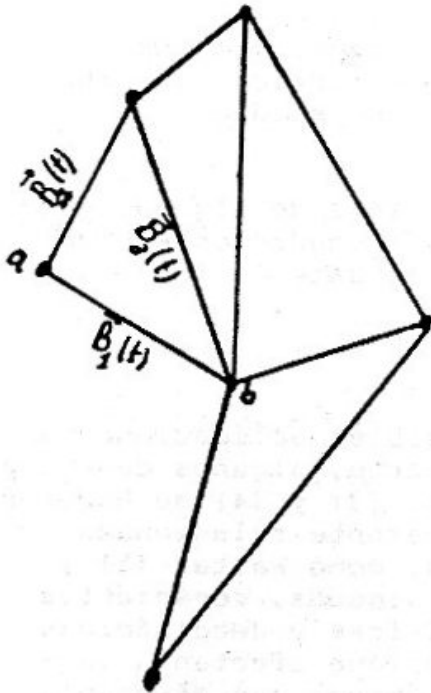


Fig. 1. Red de líneas de base V.L.B.I. en el instante  $t$ .

pos físicos en tiempos del sistema de coordenadas casi inercial que hayamos considerado.

Para utilizar las observaciones (VLBI) con fines astronómicos o geodésicos es necesario expresar las ecuaciones (2) y (3) en un mismo sistema de referencia. Es precisamente al intentar relacionar los sistemas de coordenadas en que vienen dadas las componentes  $\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i$  de las líneas de base (sistema terrestre fijo) y las coordenadas  $\alpha_k$  y  $\delta_k$  de las radiofuentes (sistema casi inercial de las radiofuentes), cuando aparecen un cierto número de matrices de rotación cuyos argumentos nos van a permitir estudiar los distintos fenómenos involucrados: movimiento del polo, variación de la velocidad de rotación de la Tierra, variación de la longitud de la línea de base, precesión y nutación.

Las ecuaciones (2) y (3) expresadas en un mismo sistema de referencia (casi inercial) resultan:

$$d_{ijk} = B_i^T R_1(-y_j) R_2(-x_j) R_3(\theta_j) N P S_k \quad (4)$$

$$\dot{d}_{ijk} = |\dot{\Omega}| R_1(-y_j) R_2(-x_j) P_3 R_3(\theta_j) N P S_k \quad (5)$$

en donde:

$$B_i^T = \{\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i\} = \{X_i^b - X_i^a, Y_i^b - Y_i^a, Z_i^b - Z_i^a\}$$

$\{X_i^h, Y_i^h, Z_i^h\}$  coordenadas cartesianas del extremo  $h = a, b$  de la línea de base  $i$  en el sistema terrestre fijo considerado  $R_s$ , ( $s = 1, 2, 3$ ), matrices elementales de rotación.

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(x_j, y_j)$  parámetros del movimiento del polo correspondientes al instante  $t_j^a$

$\theta_j = \theta_0 + \mu UT1_j = \theta_0 + \mu \{TAI - (TAI - UTC) - \chi\}_j$  Tiempo sidéreo aparente en  $t_j^a$

$\theta_0 =$  Tiempo sidéreo en Greenwich a  $0^h$  de T.U. en el día inicial de observación;

$\mu$  : factor de conversión de tiempo universal en sidéreo

TAI : tiempo atómico internacional;

UTC : tiempo universal coordinado;

UT1 : tiempo universal observado corregido por movimiento del polo;

$\chi$  : UTC - UT1 ;

P, N : tradicionales matrices de precesión y nutación que pueden encontrarse explicitadas en M. J. Sevilla (9);

$$S_k = \begin{pmatrix} \cos \delta_k & \cos \alpha_k \\ \cos \delta_k & \sin \alpha_k \\ & \sin \delta_k \end{pmatrix}$$

$\alpha_k, \delta_k$  : ascensión recta y declinación de la radiofuente  $k$  sacados de un determinado catálogo de radiofuentes;

$|\vec{\Omega}|$  : es el módulo de la velocidad de rotación de la Tierra.

Si suponemos transformadas las direcciones  $S_k$  en verdaderas de la época inicial de observación, las ecuaciones (4) y (5) - pueden escribirse, una vez efectuados los productos de matrices, de la siguiente manera:

$$d_{ijk} = \Delta X_i \{ \cos \delta_k \cos(\theta_j - \alpha_k) + x_j \operatorname{sen} \delta_k \} - \Delta Y_i \{ \cos \delta_k \operatorname{sen}(\theta_j - \alpha_k) + y_j \operatorname{sen} \delta_k \} + \Delta Z_i \{ \operatorname{sen} \delta_k - x_j \cos \delta_k \cos(\theta_j - \alpha_k) - y_j \cos \delta_k \cdot \operatorname{sen}(\theta_j - \alpha_k) \} + c \{ \Delta C_{0i} + \Delta C_{1i} (t_j^a - t_0) \} \quad (6)$$

$$\dot{d}_{ijk} = -|\vec{\Omega}| \cos \delta_k \{ \Delta X_i \operatorname{sen}(\theta_j - \alpha_k) + \Delta Y_i \cos(\theta_j - \alpha_k) \} + c \Delta C_{1i} \quad (7)$$

en donde  $\alpha_k, \delta_k$  son ahora la ascensión recta y la declinación de la radiofuente  $k$  verdaderas de la época inicial de observación.  $\Delta C_{0i}$  y  $\Delta C_{1i}$  son respectivamente, la asincronía de los relojes en el instante inicial y la variación de la asincronía que se incluyen en el modelo matemático con ánimo de hacerlo más real.

### 3. ESTUDIO DE LAS SENSIBILIDADES

Una vez linealizadas las ecuaciones (6) y (7) se obtienen - las ecuaciones de observación y entonces podrá estudiarse si - son estimables o no todos los parámetros que nos interesan, y, en caso afirmativo, si se trata de estimables centrados. Para efectuar este estudio basta considerar el sistema de ecuaciones de observación e investigar si existe alguna dependencia lineal entre los elementos de la matriz  $A$ , constituida por las derivadas parciales del observable con respecto a los parámetros. En caso de que existiese una tal dependencia lineal, querría decirse que la matriz  $A$  presenta una deficiencia de rango  $s$  y por lo tanto que  $s$  de los parámetros no son estimables.

Si el observable considerado es el retraso, las filas de la matriz  $A$  estarán constituidas por las derivadas parciales

$$A_{\Delta X_i} = \cos \delta_k \cos(\theta_j - \alpha_k)$$

$$A_{\Delta Y_i} = -\cos \delta_k \operatorname{sen}(\theta_j - \alpha_k)$$

$$A_{\Delta Z_i} = \operatorname{sen} \delta_k$$

$$A_{x_j} = \Delta X_i \operatorname{sen} \delta_k - \Delta Z_i \cos \delta_k \cos(\theta_j - \alpha_k)$$

$$A_{y_j} = -\Delta Y_i \operatorname{sen} \delta_k - \Delta Z_i \cos \delta_k \operatorname{sen}(\theta_j - \alpha_k)$$

$$A_{\chi_j} = -\mu \cos \delta_k \{ \Delta X_i \operatorname{sen}(\theta_j - \alpha_k) + \Delta Y_i \cos(\theta_j - \alpha_k) \}$$

$$A_{\alpha_k} = -A_{\chi_j} / \mu$$

$$A_{\delta_k} = \operatorname{sen} \delta_k \{ -\Delta X_i \cos(\theta_j - \alpha_k) + \Delta Y_i \operatorname{sen}(\theta_j - \alpha_k) \} - \Delta Z_i \cos \delta_k$$

$$A_{\Delta C_{0i}} = c$$

$$A_{\Delta C_{1i}} = c(t_j^a - t_0)$$



En estas expresiones se han despreciado los términos en  $x_j$ ,  $y_j$  y  $\chi_j$  (no se han considerado pues no se van a utilizar). Y  $t_0$  representa el instante inicial.

Es fácil comprobar las relaciones:

$$\begin{aligned} A_{x_j} &= \Delta X_i A_{\Delta Z_i} - Z_i A_{\Delta X_i} \\ A_{y_j} &= -\Delta Y_i A_{\Delta Z_i} + \Delta Z_i A_{\Delta Y_i} \\ A_{\chi_j} &= \mu (-\Delta Y_i A_{\Delta X_i} + \Delta X_i A_{\Delta Y_i}) \\ A_{\alpha_k} &= \Delta Y_i A_{\Delta X_i} - \Delta X_i A_{\Delta Y_i} = -A_{\chi_j} / \mu \end{aligned}$$

Si el observable considerado es la variación del retraso, las filas de la matriz de observación A estarán constituidas por las derivadas parciales siguientes en donde también se han despreciado los términos en  $x_j$ ,  $y_j$  y  $\chi_j$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\Delta X_i} &= -|\vec{\Omega}| \cos \delta_k \sin(\theta_j - \alpha_k) \\ \dot{A}_{\Delta Y_i} &= -|\vec{\Omega}| \cos \delta_k \cos(\theta_j - \alpha_k) \\ \dot{A}_{\Delta Z_i} &= 0 \\ \dot{A}_{x_j} &= |\vec{\Omega}| \Delta Z_i \cos \delta_k \sin(\theta_j - \alpha_k) \\ \dot{A}_{y_j} &= |\vec{\Omega}| \Delta Z_i \cos \delta_k \cos(\theta_j - \alpha_k) \\ \dot{A}_{\chi_j} &= |\vec{\Omega}| \mu \{ \Delta X_i \cos \delta_k \cos(\theta_j - \alpha_k) + \Delta Y_i \cos \delta_k \sin(\theta_j - \alpha_k) \} \\ \dot{A}_{\alpha_k} &= |\vec{\Omega}| \{ \Delta X_i \cos \delta_k \cos(\theta_j - \alpha_k) - \Delta Y_i \cos \delta_k \sin(\theta_j - \alpha_k) \} \\ \dot{A}_{\delta_k} &= |\vec{\Omega}| \{ \Delta X_i \sin \delta_k \sin(\theta_j - \alpha_k) + \Delta Y_i \sin \delta_k \cos(\theta_j - \alpha_k) \} \\ \dot{A}_{\Delta C_{oi}} &= 0 \\ \dot{A}_{\Delta C_{li}} &= c \end{aligned}$$

También es inmediato comprobar

$$\begin{aligned} \dot{A}_{x_j} &= -\dot{\Delta Z_i} \dot{A}_{\Delta X_i} \\ \dot{A}_{y_j} &= \dot{\Delta Z_i} \dot{A}_{\Delta Y_i} \\ \dot{A}_{\chi_j} &= \mu \{ \dot{\Delta X_i} \dot{A}_{\Delta Y_i} - \dot{\Delta Y_i} \dot{A}_{\Delta X_i} \} \\ \dot{A}_{\alpha_k} &= -\dot{A}_{\chi_j} / \mu \end{aligned}$$

Ante estas y aquellas relaciones podemos decir que no existe orientación absoluta de base con respecto al sistema inercial pues existe una dependencia lineal entre las componentes de la línea de base y los parámetros de orientación de la Tierra, y que la definición del origen de ascensiones rectas es ambigua y por tanto la dirección de referencia del sistema inercial, si bien este último problema lo soslayamos por no ser objeto de nuestro estudio. En resumen, podemos afirmar que las matrices de observación  $A$  y  $A^{-1}$  son deficientes de rango con lo que las correspondientes matrices normales resultan irregulares poniéndose entonces de manifiesto que no todos los parámetros son estimables.

Para resolver esta situación desfavorable, elegimos de entre las posibles, las dos siguientes alternativas estableciendo, implícitamente, una comparación entre ellas:

- 1°) Cambiar algunos de los parámetros no estimables por otros estrechamente relacionados con los primitivos que sí lo sean evitando, de este modo, introducir información externa.
- 2°) Mantener los mismos parámetros e introducir ciertas condiciones llamadas constreñimientos internos.

### 1° ESTUDIO A PRIORI DE LA ESTIMABILIDAD

Si se adopta la primera de las alternativas que acabamos de proponer, se dividirá el periodo total de observación en intervalos a lo largo de los cuales, los parámetros de orientación de la Tierra tomarán valores constantes  $x_\rho, y_\rho, \chi_\rho$  ( $\rho = 1, 2, \dots, n^{\text{a}}$  total de intervalos). Como orientación de referencia se toma la definida por  $x_1, y_1$  y  $\chi_1$ , valores medios del movimiento del polo y del UTC-UT1 en el primer intervalo, y en cada uno de los subintervalos siguientes se estiman los parámetros relativos.

$$\bar{x}_\rho = x_\rho - x_1$$

$$\bar{y}_\rho = y_\rho - y_1$$

$$\bar{\chi}_\rho = \chi_\rho - \chi_1$$

Los valores de  $x_1, y_1$  y  $\chi_1$  se toman de la circular D del B.I.H. o se adopta  $x_1 = y_1 = \chi_1 = 0$ . Por otro lado, considerando una ascensión recta verdadera fija  $\alpha_1$  cambiamos el parámetro no estimable  $\alpha_k$  ( $k > 1$ ) por el que si lo es  $\bar{\alpha}_k = \alpha_k - \alpha_1$ .

Con estos cambios lograremos, para el caso de observaciones del retraso, una matriz normal no singular, ahora bien, como al estimar  $x_1, y_1$  y  $\chi_1$  habremos cometido errores la estimación de los parámetros de la línea de base será sesgada por lo que conviene sustituirlos por otros parámetros  $u_i, v_i$  y  $w_i$  cuya estimación no resulte sesgada y que serán tanto más próximos a ..

$\Delta x_i, \Delta y_i$  y  $\Delta z_i$  respectivamente cuanto menores sean los errores  $dx_i, dy_i$  y  $dz_i$  cometidos al estimar la orientación de referencia.

Resumiendo, las observaciones del retraso son sensibles a los siguientes parámetros:

$u_i, v_i, w_i$  : componentes modificadas de la línea de base

$l_i$  : longitud de la línea de base (como consecuencia - de ser estimables ( $u_i, v_i, y w_i$ ))

$\bar{x}_p, \bar{y}_p$  : variaciones de las componentes de polo

$\bar{\chi}_p$  : variación del UTC-UTI

$\delta_k$  : declinaciones de las radiofuentes

$\alpha_k - \alpha_1$  : diferencias de ascensiones rectas

$C_{oi}, C_{li}$  : asincronía y deriva relativa de los relojes

En cuanto a las observaciones de la variación del retraso hay que decir que la simple consideración de la ecuación (7) nos lleva a afirmar la insensibilidad de estas observaciones a la componente  $Z_i$  de la línea de base y a la asincronía de los relojes

( $\dot{A}_{\Delta Z_i} = 0, \dot{A}_{\Delta C_{oi}} = 0$ ). Por otra parte como  $\frac{dB_i}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{B}_i$ , el origen

de declinaciones queda indefinido como demuestra Counselman. (10). Así pues, el análisis de la estimabilidad de los parámetros nos conduce a los mismos cambios que en el caso de observaciones del retraso mas un nuevo cambio: el parámetro  $\delta_k$  ( $k > 1$ ) debe sustituirse por la diferencia de declinaciones  $\delta_k = \delta_k - \delta_1$ , en donde  $\delta_1$  es una declinación verdadera fija.

Tras efectuar los debidos cambios de parámetros, las derivadas parciales que entran ahora a formar parte de la matriz de observación A son las siguientes:

$$A_{u_i} = -|\vec{\Omega}| \cos \delta_k \sin (\theta_{jP} - \alpha_k)$$

$$A_{v_i} = -|\vec{\Omega}| \cos \delta_k \cos (\theta_{jP} - \alpha_k)$$

$$A_{w_i} = |\vec{\Omega}| \cos \delta_k \{X_p \sin(\theta_{jP} - \alpha_k) - Y_i \cos(\theta_{jP} - \alpha_k)\} \text{ (despreciable)}$$

$$A_{\bar{\chi}_p} = |\vec{\Omega}| \cos \delta_k \{ \Delta X_i \cos(\theta_{jP} - \alpha_k) - \Delta Y_i \sin(\theta_{jP} - \alpha_k) - \Delta Z_i \{ X_p \cos(\theta_{jP} - \alpha_k) + Y_p \sin(\theta_{jP} - \alpha_k) \} \}$$

$$A_{\bar{x}_p} = |\vec{\Omega}| \cos \delta_k \Delta Z_i \sin(\theta_{jP} - \alpha_k)$$

$$A_{\bar{y}_p} = -|\vec{\Omega}| \cos \delta_k \Delta Z_i \cos(\theta_{jP} - \alpha_k)$$

$$A_{\delta_k} = |\vec{\Omega}| \sin \delta_k \{ \Delta X_i \sin(\theta_{jP} - \alpha_k) + \Delta Y_i \cos(\theta_{jP} - \alpha_k) - \Delta Z_i \{ X_p \sin(\theta_{jP} - \alpha_k) - Y_p \cos(\theta_{jP} - \alpha_k) \} \}$$



$$A_{li} = C$$

En vista de esto podemos añadir a lo que era evidente sin más que considerar la ecuación (7) lo siguiente:

- (i) Las observaciones de la variación del retraso son inservibles a las declinaciones de las radiofuentes próximas al ecuador.
- (ii) Observando las radiofuentes de declinaciones altas, la variación del retraso sólo es sensible a las declinaciones de las radiofuentes y a la variación de la asincronía de los relojes.
- (iii) La sensibilidad de las observaciones de la variación del retraso a los parámetros de orientación de la Tierra ...  $(x_0 - x_1) = \bar{x}_p$  y  $(y_0 - y_1) = \bar{y}_0$  aumenta a medida que crece la componente polar de la línea de base mientras que para el parámetro  $\chi_0$  puede desprejarse la influencia de la componente polar de la línea de base.

## 2º METODO DE LOS CONSTREÑIMIENTOS DE AJUSTE INTERNO

La segunda alternativa que se nos presenta para abordar el problema de la deficiencia de rango consiste en introducir un cierto tipo de condiciones que constituyen lo que conocemos con el nombre de conjunto minimal de constreñimientos, (Blaha, (11)).

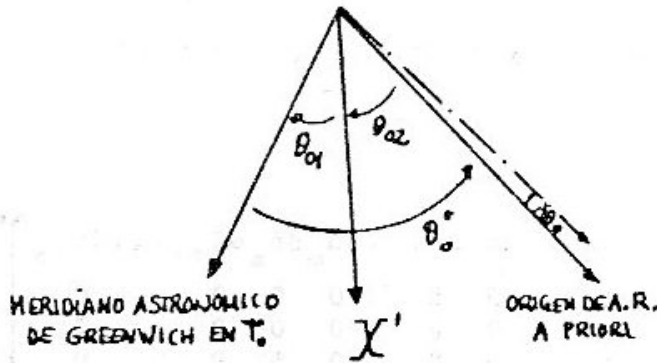
Este método nos proporciona además una manera original de evitar la ambigüedad en que está envuelta el origen de ascensiones rectas. Si introducimos un sistema de referencia terrestre móvil  $(0; X', Y', Z')$  definido por:

- Origen: arbitrario
- OZ': en la dirección del polo instantáneo
- OX': ortogonal a OZ' con dirección arbitraria
- OY': formando con los anteriores triedro directo

podemos descomponer  $\theta_j^a = \theta(t_j^a)$  de las ecuaciones (4) y (5) en adelante en  $\theta_j^a = \theta_{j1}^a + \theta_{j2}^a$  en donde  $\theta_{j2}^a$  se empezaría a contar a partir de una dirección que asignaríamos a priori al origen de ascensiones rectas al tener un conocimiento aproximado de  $\theta(t_0)$  hasta la dirección OX' (desconocida) en que empezaríamos a contar  $\theta_{j1}^a$  hasta el meridiano astronómico de Greenwich definido por el B.I.H. en el instante  $t_j^a$ . Por otro lado, según afirman Dermanis y Mueller (12):

$$\theta_j^a = \theta_0^a + \int_{t_0}^{t_j^a} \Omega dt \quad \theta_0^a = \theta_{01}^a + \theta_{02}^a$$

de manera que si en vez de estimar  $\theta_j^a$  estimamos  $\theta_0$  y  $\Omega$  el ajuste me proporcionará la corrección que hay que aplicar al valor - aproximado de  $\theta_0$  que habíamos considerado para definir el origen de ascensiones rectas, para obtener el valor correcto que me permitirá definir sin ambigüedades el origen de ascensiones rectas



Hechas estas observaciones, - nos conviene, al igual que en el caso anterior dividir el - periodo total de observación en subintervalos en el transcurso de los cuales los parámetros a estimar (correcciones que hay que aplicar a los valores aproximados de  $x_\rho, y_\rho, \dots, \Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i, \theta_0, d\Omega, d\alpha_k, d\delta_k, \Delta d_{oi}, \Delta c_{ii}; (i=1,2, \dots, n)$  y  $(k=1,2, \dots, m)$ ; ( $p$ : indica el intervalo) toman valores constantes. Para cada sub-

intervalo  $\rho$  podemos plantear un sistema de observación (lineal) del tipo

$$A_\rho X_\rho L_\rho = V_\rho$$

en donde  $A$  es la matriz de las derivadas parciales del observable considerado (retraso o variación del retraso) con respecto a cada uno de los parámetros a estimar;  $X_\rho$  es el vector columna de las incógnitas:  $dx_\rho, dy_\rho, d\theta_0, d\Omega, d\alpha_k, d\delta_k$  ( $k=1,2, \dots, m$ )  $d \Delta X_i, d \Delta Y_i, d \Delta Z_i$  ( $i=1,2, \dots, n$ )  $d \Delta C_{oi}, d \Delta c_{ii}$ ;  $L_\rho$  vector columna de las diferencias entre los valores observados y calculados de los observables,  $V_\rho$  vector columna de errores. Mientras  $A_\rho$  y  $L_\rho$  son conocidos  $X_\rho$  y  $V_\rho$  no lo son.

Al pasar al sistema de ecuaciones normales  $N_\rho X_\rho = U_\rho$  nos encontramos con la matriz  $N$  no es inversible por presentar una deficiencia de rango  $s = 6$  que corresponde a los seis grados de libertad en la definición del sistema terrestre móvil (3 para el origen y otras 3 para su orientación). Ahora bien si introducimos un conjunto minimal de constreñimientos  $C$  (Blaha, (11)) tal que verificamos que;

- (i)  $C X_\rho = 0$
- (ii)  $N_\rho C_\rho = 0$

que llamaremos matriz de constreñimientos de ajuste interno, el sistema

$$A_\rho X_\rho + L_\rho = 0$$

$$C_\rho X_\rho = 0$$

nos da la solución única mínimos cuadrados mínimo sesgo (traza = min) que es la que nos interesa.

El problema que queda es encontrar el conjunto de constreñimien

tos internos es decir, la matriz C. La forma de operar es encontrar seis soluciones independientes (puesto que seis es la deficiencia - de rango) del sistema de ecuaciones

$$A_{\rho}^j Y = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

para  $A_{\rho}^j$  la j-ésima fila de  $A_{\rho}$

En nuestro caso, tras muchas operaciones se llega a (Dermanis, (8)).

$$C^T = \begin{pmatrix} dx_{\rho} & dy_{\rho} & d\theta & d\Omega_{\rho} & dX_1 & dY_1 & dZ_1 & \dots & dX_N & dY_N & dZ_N & \dots & d\alpha_1 & d\delta_1 & \dots & d\alpha_m & d\delta_m & dC_{01} & \dots & dC_{1N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z^0 & Y^0 & & 0 & -Z_N^0 & Y_N^0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & Z^0 & 0 & -X^0 & & Z_N^0 & 0 & -X_N^0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -Y^0 & X^0 & 0 & & -Y_N^0 & X_N^0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

luego, por una parte se tiene  $\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{pmatrix} = 0$ , es decir, que si  $\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$

denotan las coordenadas ajustadas (en el sistema de coordenadas

definido por los constreñimientos anteriores) y  $\begin{pmatrix} X_i^0 \\ Y_i^0 \\ Z_i^0 \end{pmatrix}$  las coordena

das aproximadas de los puntos, los constreñimientos nos dicen que

$$\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} X_i^0 \\ Y_i^0 \\ Z_i^0 \end{pmatrix} \text{ por lo tanto que la posición media de}$$

las estaciones se conserva. Por otra parte se tiene:

$$\begin{pmatrix} dx_{\rho} \\ dy_{\rho} \\ -d\theta_0 \end{pmatrix} = - \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} X_i^0 \\ Y_i^0 \\ Z_i^0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx_i^0 \\ dy_i^0 \\ dz_i^0 \end{pmatrix} = - \sum_{i=1}^n (r_i^0 \wedge dr_i^0) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (dr_i^0 \Lambda r_i^0) = - \sum_{i=1}^n \vec{V}_i^0$$

luego  $\begin{pmatrix} dx_{\rho} \\ dy_{\rho} \\ -d\theta_{\rho} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \vec{V}_i^0 = 0$  es decir, la orientación media de -

la posición del conjunto de las N estaciones y de la corrección del movimiento del polo se conservan.

Analizando las expresiones analíticas de las filas de la matriz de observación A pueden deducirse las configuraciones línea de base-radiofuente mas indicadas para la estimación de los parámetros. De esta manera se obtienen:

- (i) Las observaciones de radiofuentes ecuatoriales desde líneas de base de componente polar  $\Delta Z$  nula son insensibles a los parámetros  $x_{\rho}$ ,  $y_{\rho}$  y  $\delta$ .
- (ii) Las observaciones de radiofuentes polares desde líneas de base de componentes polar  $\Delta Z$  nula son insensibles a los parámetros  $\theta_0$ ,  $\Omega$  y  $\alpha$ .
- (iii) Desde líneas de base de componentes ecuatoriales nulas ( $\Delta X = \Delta Y = 0$ ), las observaciones de radiofuentes polares no son sensibles a ninguno de los parámetros  $x_{\rho}$ ,  $y_{\rho}$ ,  $\theta_0$ ,  $\Omega$ ,  $\alpha$  y  $\delta$  pero las observaciones de radiofuentes ecuatoriales son sensibles a  $x_{\rho}$ ,  $y_{\rho}$  y  $\delta$ .
- (iv) Las observaciones de radiofuentes ecuatoriales son insensibles a las componentes polares de las líneas de base mientras que las radiofuentes ecuatoriales lo son a las componentes ecuatoriales.
- (v) Las observaciones de la variación del retraso son insensibles a la asincronía de los relojes.
- (vi) La sensibilidad con respecto a los parámetros de los relojes es independiente de la configuración línea de base-radiofuente.

Concretando en lo referente a la determinación del movimiento del polo y rotación de la Tierra podemos decir:

- (1) Las determinaciones del movimiento del polo mejoran a medida que aumenta la componente polar de la línea de base cuando se observan radiofuentes de bajas declinaciones  
 Caso óptimo :  $\Delta X = \Delta Y = 0$ ,  $\Delta Z = 90^\circ$   $\delta = 0$   
 $k$
- (2) Las determinaciones de la rotación de la Tierra mejorarán a medida que aumentan las componentes ecuatoria

les de la línea de base cuando se observan radiofuentes de bajas declinaciones

$$\text{Caso óptimo: } \Delta Z_i = 0^\circ \quad \delta_k = 0^\circ$$

- (3) Tiene una mayor influencia en los resultados la elección de la configuración de las líneas de base que la de las radiofuentes.

Si las radiofuentes empleadas son artificiales, las ecuaciones básicas para el retraso y su variación (ecuaciones (2) y (3)) deben modificarse debido a que la distancia de aquellas a la Tierra no podrán considerarse infinitas. En este caso la obtención de las derivadas parciales que nos permiten sacar conclusiones acerca de la sensibilidad es mucho más trabajosa.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) CANNON, W.H. : "The measurement of Earth Rotation on a deformable Earth". Radio Interferometry Techniques for Geodesy. NASA Conference Publication 2115, (1979).
- (2) THOMAS, J.B. : "An analysis of Long Baseline Radio Interferometry". Part I JPL Technical Report 32-1526, VII .. pp. 37 - 50, (1972).
- (3) THOMAS, J.B. : "An analysis of Long Baseline Radio Interferometry". Part. II JPL Technical Report 32 - 1526, VII, pp. 29 - 38, (1972).
- (4) THOMAS, J.B. : "An analysis of Long Baseline Radio Interferometry". Part. III JPL Technical Report 32 - 1526, XVI pp. 47, (1973).
- (5) WALTER, H.G. : "Astronomical applications of Long Baseline Interferometry" G.R.G.S. Bulletin n° (1973).
- (6) WALTER, H.G. : "Precision Estimation of Precession and Nutation from Radio Interferometric Observations". Astron. - Astrophys, 59, 433-440 (1977).
- (7) CARTER, W. E.: "Elementary Introduction to the Radio Interferometric Surveying". Survey Review, Vol. 26, pp. 199 (1981).
- (8) DERMANIS, A. : "Design of experiment for Earth Rotation and Baseline Parameter Determination from Very Long Baseline Interferometry". Reports of the Department of geodetic Science. Report n° 245. The Ohio State University. Columbus. (1977).
- (9) SEVILLA, M.J.: "Sistema IAU-1976 de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (I)". Boletín de Información n° 48. Servi-



cio Geográfico del Ejército. Madrid. (1980).

- (10) COUNSELMAN, C.C.: "Radio Astrometry". Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 14, Annual Reviews Inc., Palo Alto, California, 197-214 (1976).
- (11) BLAHA, G. : "Inner Adjustment Constraints with Emphasis on Range Observations". Reports of the Department of Geodetic Science, n° 148, The Ohio - State University: Columbus. (1971).
- (12) DERMANIS, A. and  
MUELLER, I.I. : "Earth Rotation and Network geometry optimization for Very Long Baseline Interferometers". Bulletin Géodésique n° 52, pp. 131-158. (1978)

... & & ...

PUBLICACIONES DEL SEMINARIO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA  
DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE — MADRID

- 20.—J. M. TORROJA: Nueva órbita del Asteroide 1557 (1942 AD) (1954).
- 27.—R. CARRASCO y M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1290 «Albertine» (1954).
- 28.—J. PENSADO: Distribución de los períodos y excentricidades y relación período-excentricidad en las binarias visuales (1955).
- 29.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Nueva órbita del Asteroide 1372 «Haremari» (1955).
- 30.—M. DE PASCUAL: Rectificación de la órbita del Asteroide 1547 (1929 CZ) (1955).
- 31.—J. M. TORROJA: Órbita del Asteroide 1554 «Yugoslavia» (1955).
- 32.—J. PENSADO: Nueva órbita del Asteroide 1401 «Lavonne» (1956).
- 33.—J. M. TORROJA: Nuevos métodos astronómicos en el estudio de la figura de la Tierra (1956).
- 34.—D. CALVO: Rectificación de la órbita del Asteroide 1466 «Mündleria» (1956).
- 35.—M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1238 «Predappia» (1956).
- 36.—J. PENSADO: Distribución de las inclinaciones y de los polos de las órbitas de las estrellas dobles visuales (1956).
- 37.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Resultados de la observación del eclipse total de Sol de 30 de junio de 1954 en Sydkoster (Suecia) (1957).
- 38.—ST. WIERZBINSKI: Solution des équations normales par l'algorithm des cracoviens (1958).
- 39.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Rectificación de la órbita del Asteroide 1192 «Prisma» (1958).
- 40.—M. LÓPEZ ARROYO: Sobre la distribución en longitud heliográfica de las manchas solares (1958).
- 41.—F. MÚGICA: Sobre la ecuación de Laplace (1958).
- 42.—F. MARTÍN ASÍN: Un estudio estadístico sobre las coordenadas de los vértices de la triangulación de primer orden española (1958).
- 43.—ST. WIERZBINSKI: Orbite améliorée de h 4530 =  $\gamma$  Cen = Cpd  $-48^\circ$ , 4965 (1958).
- 44.—D. CALVO BARRENA: Rectificación de la órbita del Asteroide 1164 «Kobolda» (1958).
- 45.—M. LÓPEZ ARROYO: El ciclo largo de la actividad solar (1959).
- 46.—F. MÚGICA: Un nuevo método para la determinación de la latitud (1959).
- 47.—J. M. TORROJA: La observación del eclipse de 2 de octubre de 1959 desde El Aaiun (Sahara) (1960).
- 48.—J. M. TORROJA, P. JIMÉNEZ-LANDI y M. SOLÍS: Estudio de la polarización de la luz de la corona solar durante el eclipse total de Sol del día 2 de octubre de 1959 (1960).
- 49.—E. PAJARES: Sobre el mecanismo diferencial de un celóstato (1960).
- 50.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Sobre la diferencia entre los radios vectores del elipsoide internacional y el esferoide de nivel (1960).
- 51.—J. M. TORROJA: Resultado de las observaciones del paso de Mercurio por delante del disco solar del 7 de noviembre de 1960 efectuadas en los observatorios españoles (1961).
- 52.—F. MÚGICA: Determinación de la latitud por el método de los verticales simétricos (1961).
- 53.—M. LÓPEZ ARROYO: La evolución del área de las manchas solares (1962).
- 54.—F. MÚGICA: Determinación simultánea e independiente de la latitud y longitud mediante verticales simétricos (1962).
- 55.—P. DÍEZ-PICAZO: Elementos de la órbita de la variable eclipsante V 499 Scorpionis (1964).
- 56.—J. M. TORROJA: Los Observatorios Astronómicos en la era espacial (1965).
- 57.—F. MARTÍN ASÍN: Nueva aportación al estudio de la red geodésica de primer orden española y su comparación con la red compensada del sistema europeo (1966).
- 58.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ: La Luz Zodiacal. Luz del espacio interplanetario (1966).
- 59.—J. M. GONZÁLEZ-ABOIN: Variaciones de las coordenadas geodésicas de los vértices de una red, por cambio de elipsoide de referencia (1966).
- 60.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ y R. DUMONT: Fotometría absoluta de la raya verde y del continuo atmosférico en el Observatorio Astronómico del Teide (Tenerife), de enero de 1964 a julio de 1965 (1967).
- 61.—M. REGO: Estudio del espectro de la estrella 31 Aql. en la región  $\lambda\lambda$  4000 6600 Å (1969).
- 62.—C. MACHÍN: Mareas terrestres (1969).

- 63.—J. M. TORROJA: La estación para la observación de satélites geodésicos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid (1969).
- 64.—M. J. SEVILLA: Reducción automática de posiciones de estrellas (1970).
- 65.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid en 1969 (1970).
- 66.—M. J. SEVILLA: Los cálculos de estación en triangulación espacial (1970).
- 67.—MANUEL E. REGO: Determinación de las abundancias de los elementos en la atmósfera de la estrella de alta velocidad 31 Aql. (1970).
- 68.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Análisis cualitativo del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1971).
- 69.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1970 (1971).
- 70.—R. VIEIRA y R. ORTIZ: Descripción de un aparato para medida de coordenadas (1971).
- 71.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1971 (1972).
- 72.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Observación y estudio teórico del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1972).
- 73.—M. J. SEVILLA: Cálculo de las constantes de distorsión y parámetros del disco obturador para cámaras balísticas (1973).
- 74.—R. PARRA y M. J. SEVILLA: Cálculo de efemérides y previsiones de pasos de satélites geodésicos (1973).
- 75.—M. REGO y M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Resultado de las observaciones de  $\alpha$  Peg efectuadas desde el satélite europeo TD1 (1973).
- 76.—E. SIMONNEAU: Problemas en la determinación de abundancias de elementos en las estrellas en condiciones de equilibrio termodinámico local y alejadas del equilibrio termodinámico local (1974).
- 77.—J. ARANDA: Construcción de modelos de estructura interna para estrellas en la secuencia principal inicial (1974).
- 78.—R. ORTIZ, M. SEVILLA y R. VIEIRA: Estudio de la calibración, técnica de medida y automatización de datos en un comparador para medidas de placas estelares (1974).
- 79.—M. J. SEVILLA: Método autocorrector para el cálculo de direcciones de satélites geodésicos y análisis de los errores en la restitución de un arco de órbita (1974).
- 80.—M. A. ACOSTA, R. ORTIZ y R. VIEIRA: Diseño y construcción de un fotómetro fotoeléctrico para la observación de ocultaciones de estrellas por la Luna (1974).
- 81.—T. J. VIVES, C. MORALES, J. GARCÍA-PELAYO y J. BARBERO: Fotometría fotográfica UBV del cúmulo galáctico King 19 (1974).
- 82.—R. ORTIZ y R. VIEIRA: Control automático en posición y tiempo de los sistemas de obturación de las cámaras de observación de satélites geodésicos (1974).
- 83.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1972 y 1973 (1974).
- 84.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA y M. REGO:  $\alpha$  CrB en el ultravioleta lejano (1975).
- 85.—J. M. TORROJA, R. VIEIRA, R. ORTIZ y M. J. SEVILLA: Estudio de mareas terrestres en España (1975).
- 86.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Levantamiento gravimétrico de Lanzarote (1975).
- 87.—P. KUNDANMAL SUKHWANI: Modelos teóricos de curvas de luz. Su aplicación al sistema  $\beta$  Lyrae (1975).
- 88.—M. J. SEVILLA: Coordenadas astronómicas y geodésicas. Desviación relativa de la vertical (1975).
- 89.—C. TEJEDOR: Fotometría fotoeléctrica R. G. U. del cúmulo galáctico IC 2581 (1976).
- 90.—M. J. SEVILLA: Nuevos coeficientes para la reducción automática de posiciones de estrellas (1976).
- 91.—M. REGO: Técnicas observacionales en espectroscopia astrofísica (1976).
- 92.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud por distancias cenitales de la polar, método de Littrow (1976).
- 93.—T. J. VIVES: Determinación fotométrica del tipo espectral de la componente desconocida de una estrella binaria eclipsante (1976).
- 94.—M. REGO y M. J. FERNÁNDEZ FIGUEROA: Contraste y determinación por métodos astrofísicos de fuerzas de oscilador (1977).
- 95.—M. J. SEVILLA y R. CHUECA: Determinación de acimutes por observación de la Polar. Método micrométrico (1977).
- 96.—JOSÉ M. GARCÍA-PELAYO: Fotometría R G U en un campo del anticentro galáctico, cerca del NGC 581 (1977).

- 97.—JOSÉ M. GARCÍA-PELAYO: Datos fotométricos de 2.445 estrellas estudiadas en la región de Casiopea, entre los cúmulos abiertos Trumpler 1 y NGC 581 (1977).
- 98.—PREM K. SUKHWANI y RICARDO VIEIRA: Spectral Analysis of Earth Tides (1977).
- 99.—JOSÉ M. TORROJA y RICARDO VIEIRA: Earth Tides in Spain. Preliminary results (1977).
- 100.—PREM K. SUKHWANI y RICARDO VIEIRA: Three different methods for taking in account the gaps in spectral analysis of Earth Tides records (1978).
- 101.—R. VIEIRA: Mareas terrestres (1978).
- 102.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la longitud por el método de Mayer. Programas de Cálculo Automático (1979).
- 103.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la latitud por el método de Sterneck. Programas de Cálculo Automático (1979).
- 104.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por el método de alturas iguales. Programas de Cálculo Automático (1979).
- 105.—P. K. SUKHWANI y A. GIMÉNEZ: Corrección de efectos atmosféricos para imágenes tomadas desde satélites Landsat (1979).
- 106.—M. J. SEVILLA: Inversión de matrices simétricas en el método de mínimos cuadrados (1979)
- 107.—A. GIMÉNEZ: Análisis de la curva de luz del sistema binario eclipsante S Velorum (1979).
- 108.—M. J. SEVILLA: Determinación del acimut de una referencia por observación de la estrella Polar. Programa de cálculo automático (1979).
- 109.—M. J. SEVILLA: El sistema IAU (1976) de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (primera parte) (1980).
- 110.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Determinación de la latitud por el método de Horrebow-Talcott. Programas de Cálculo Automático (1980).
- 111.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por fotografías cenitales de estrellas (1980).
- 112.—R. VIEIRA y M. OREJANA: Comunicaciones presentadas en las XLI y XLII Jornadas del Grupo de Trabajo de Geodinámica del Consejo de Europa. Luxemburgo (1979-80).
- 113.—M. J. SEVILLA: Sobre un método de cálculo para la resolución de los problemas geodésicos directo e inverso (1981).
- 114.—R. VIEIRA, J. M. TORROJA, C. TORO, F. LAMBAS, M. OREJANA y P. K. SUKHWANI: Comunicaciones presentadas en el IX Simposium Internacional de Mareas Terrestres. Nueva York (1981).