

Universidad Complutense
Facultad de Ciencias Matemáticas - Madrid

SEMINARIO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA

(Coordinado por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas,
Departamento de Mecánica y Astronomía)

Publicación núm. 124

**APLICACION DEL METODO DE COLOCACION
A LA REDUCCION DE PLACAS FOTOGRAFICAS
DE ESTRELLAS**

por

M. J. SEVILLA y P. ROMERO



PUBLICADO EN TÉCNICA TOPOGRÁFICA, vol. X, núm. 45

MADRID
1982

**APLICACION DEL METODO DE COLOCACION A LA
REDUCCION DE PLACAS FOTOGRAFICAS DE ESTRELLAS**

Por M. J. SEVILLA y P. ROMERO
Cátedra de Astronomía y Geodesia
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense. Madrid

APLICACION DEL METODO DE COLOCACION A LA REDUCCION DE PLACAS FOTOGRAFICAS DE ESTRELLAS

Por M. J. SEVILLA y P. ROMERO
Cátedra de Astronomía y Geodesia
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense, Madrid

RESUMEN:

En este trabajo se aplica el método de colocación a la reducción de placas fotográficas de estrellas para la obtención de fórmulas definitivas que tengan en cuenta todo el aspecto estadístico del problema. Se analiza el método homográfico y se calculan las covarianzas a partir de las correspondientes funciones empíricas.

ABSTRACT:

In this paper the least-squares collocation method is applied to the reduction of the photographic plates of stars, and the definitive formulas for the model that consider all the stochastic processes are derived. The homographic method is analyzed and the covariance matrix is determined from the empiric correspondent functions.

1.- INTRODUCCION

Con la aplicación del método de colocación a la reducción de placas fotográficas de estrellas, se pretende mejorar la estimación de los parámetros de placa o coeficientes que aparecen en la relación matemática entre las coordenadas teóricas asignadas a las imágenes de las estrellas y sus correspondientes coordenadas medidas con un comparador.

En la estimación de estos parámetros de placa, efectuados con el método clásico de los mínimos cuadrados, los únicos errores aleatorios considerados son los errores de medida, lo cual no responde a un planteamiento estadístico completo del problema, quedan sin especificar como tales los errores debidos a la distorsión, al desplazamiento de la gelatina de la placa, a la no perpendicularidad de los ejes del comparador, a la refracción, residuos de correcciones etc. (KRAUSS, K. 1972) y (KRAUSS, K. and MILHAIL, E.M. 1.972).

En el método de los mínimos cuadrados generalizados se descomponen los residuales del método en dos partes aleatorias, el ruido pro

pio de las medidas y la señal propia del modelo teórico. Con esta forma de proceder, conocida por colocación y que nos va a permitir determinar la señal, en lugar de incluirla en los residuales de la solución obtenida por mínimos cuadrados, conseguiremos mejorar la estimación de los parámetros.

Empezaremos dando las fórmulas generales del método de colocación, para aplicarlas después a la transformación homográfica.

Pasaremos después a ver la obtención de la función de covarianza y las fórmulas definitivas de reducción.

2.- FORMULAS DE COLOCACION

El método de los mínimos cuadrados generalizados, también llamado método de colocación, es un método general que resuelve problemas de ajuste, predicción (interpolación y extrapolación) y filtrado.

Planteado un problema de ajuste dentro de un campo estadístico donde tenemos un conjunto de datos discretos, obtenidos por observación y que consideramos afectados en dos tipos de errores: por un lado variables estocásticas correladas que representan los llamados errores aleatorios o señal y por otro el ruido propio de las medidas, y supuesto un modelo lineal que nos describa el comportamiento del campo, podemos escribir las correspondientes ecuaciones de observación de la forma:

$$Ax - t = r + s = v \quad (2.1)$$

donde A es la matriz de los coeficientes de los parámetros, x el vector de los parámetros incognita, t el vector de las observaciones y (r,s) los vectores ruido y señal respectivamente en que hemos descompuesto los errores aleatorios v .

La aplicación del método de colocación nos lleva al sistema

$$Ax + B\bar{v} = t \quad (2.2)$$

siendo $\bar{v} = (\bar{s}, v)^T$ un vector de dos cajas donde \bar{s} es el vector que representa los valores que queremos interpolar y filtrar y $v = r + s$ la parte aleatoria de la observación; y B es una matriz de cajas de la forma $B = (0, I)$.

La solución (SEVILLA, M.J. 1979) viene dada por :

$$x = A^T Q_{tt}^{-1} A^{-1} A^T Q_{tt} t \quad (2.3)$$

para los parámetros,

$$s = Q_{st}^{-1} Q_{tt}^{-1} (t - Ax) \quad (2.4)$$

para la señal, y

$$\bar{v} = Q_{\bar{v}\bar{v}}^{-1} B^T Q_{tt}^{-1} (t - Ax) \quad (2.5)$$

para los valores más probables de los residuales.

Las medidas de la precisión correspondientes, en forma de matrices de varianza-covarianza, son :

$$\Sigma_{xx} = A^T Q_{tt}^{-1} A^{-1} \quad (2.6)$$

$$\Sigma_{\bar{s}\bar{s}} = Q_{\bar{s}\bar{s}} - Q_{\bar{s}t} Q_{tt}^{-1} Q_{t\bar{s}} + Q_{\bar{s}t} Q_{tt}^{-1} - A^T \Sigma_{xx} Q_{tt}^{-1} Q_{t\bar{s}} \quad (2.7)$$

$$\Sigma_{\bar{v}\bar{v}} = Q_{\bar{v}\bar{v}}^{-1} B^T (Q_{tt}^{-1} A \Sigma_{xx} A^T Q_{tt}^{-1}) B Q_{\bar{v}\bar{v}} \quad (2.8)$$

3.- APLICACION DE LA COLOCACION A LA TRANSFORMACION HOMOGRAFICA.

Consideremos un problema clásico de astrometría fotográfica; en el proceso de reducción de placas (EICHORN, H. 1974) vamos a suponer que la relación entre las coordenadas medidas (x_m, y_m) y las teóricas (x_t, y_t) es una homografía dada por las expresiones (SEVILLA, M.J., 1974).

$$X_t = \frac{(1+a)x_m + by_m + c}{Px_m + Qy_m + 1}$$

$$y_t = \frac{a'x_m + (1+b')y_m + c'}{Px_m + Qy_m + 1}$$

donde los parámetros desconocidos son ($a, b, c, a', b', c', P, Q$). Estas ecuaciones podemos escribirlas de la forma:

$$ax_m + by_m + c - Px_m x_t - Qy_m x_t + x_m - x_t = 0 \quad (3.2)$$

$$a'x_m + b'y_m + c' - Px_m y_t - Qy_m y_t + y_m - y_t = 0$$

Si suponemos que los datos están afectados de unos errores de medida y son estos $\delta x_m, \delta y_m, \delta x_t, \delta y_t$ para x_m, y_m, x_t, y_t respectivamente, las expresiones quedan en la forma:

$$\begin{aligned} & (x_m + \delta x_m) Q + (y_m + \delta y_m) b + c - (x_m + \delta x_m) (y_t + \delta y_t) P - \\ & - (y_m + \delta y_m) (x_t + \delta x_t) Q + (x_m + \delta x_m) - (x_t + \delta x_t) = 0 \\ & (x_m + \delta x_m) a' + (y_m + \delta y_m) b' + c' - (x_m + \delta x_m) (y_t + \delta y_t) P - \\ & - (y_m + \delta y_m) (y_t + \delta y_t) Q + (y_m + \delta y_m) - (y_t + \delta y_t) = 0 \end{aligned}$$

y si hacemos

$$r_x = \delta x_m a + \delta y_m b - (x_m \delta x_t + x_t \delta x_m) P - (y_m \delta x_t + x_t \delta y_m) Q + \delta x_m - \delta x_t$$

$$r_y = \delta x_m a' + \delta y_m b' - (x_m \delta y_t + y_t \delta x_m) P - (y_m \delta y_t + y_t \delta y_m) Q + \delta y_m - \delta y_t$$

resultan las ecuaciones

$$x_m a + y_m b + c - x_m x_t P - y_m x_t Q + (x_m - x_t) = -r_x$$

$$x_m a' + y_m b' + c' - x_m y_t P - y_m y_t Q + (y_m - y_t) = -r_y$$

Si tenemos m pares de puntos homólogos conocidos, resultan $2m$ ecuaciones de esta forma, que matricialmente se escriben

$$Ax - t = -r$$

donde

$$t = \left[x_{t_1} - x_{m_1}, y_{t_1} - y_{m_1}, x_{t_2} - x_{m_2}, y_{t_2} - y_{m_2}, \dots, y_{t_m} - y_{m_m} \right]^T$$

$$r = \left[r_{x_1}, r_{y_1}, r_{x_2}, \dots, r_{x_m}, r_{y_m} \right]^T$$

$$x = \left[a, b, c, a', b', c', P, Q \right]^T$$

$$A = \begin{pmatrix} x_{m_1} & y_{m_1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_{m_1} & x_{t_1} & -y_{m_1} & x_{t_1} \\ 0 & 0 & 0 & x_{m_1} & y_{m_1} & 1 & -x_{m_1} & y_{t_1} & -y_{m_1} & y_{t_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m_m} & y_{m_m} & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_{m_m} & y_{t_m} & -y_{m_m} & x_{t_m} \\ 0 & 0 & 0 & x_{m_m} & y_{m_m} & 1 & -x_{m_m} & y_{t_m} & -y_{m_m} & y_{t_m} \end{pmatrix}$$

que corresponde a un ajuste de observaciones indirectas, donde x son los parámetros, t las observaciones, $-r$ los residuales.

Tal como se ha construido el modelo matemático, los únicos errores aleatorios que se han considerado son los errores de medida, lo cual no corresponde a un planteamiento estadístico completo del problema.

Si consideramos la matriz de covarianza de r , la experiencia demuestra que los residuales serán mayores y fuertemente correlados para puntos próximos, así mismo mientras que r_x y r_y , están correlados cuando se refieren al mismo punto, resultan incorrelados para puntos distintos. Esto indica que la elección del modelo no es la más apropiada (KRAUSS K. 1972). Debemos tener en cuenta las distorsiones del modelo funcional. Por consiguiente añadiremos un término que represente tales distorsiones aleatorias, así llegaremos a la expresión (2-1).

$$Ax - t = s + r$$

que es precisamente el modelo básico de colocación.

Trabajando con este sistema, los parámetros $(a, b, c, a', b', c', P, Q)$ vienen dados según las fórmulas de colocación (2.3) por

$$x = \left[A^T Q_{tt} \right]^{-1} A^{-1} A^T Q_{tt}^{-1} t$$

y la señal por (2.4).

$$\bar{s} = Q_{st} Q_{tt}^{-1} [t - Ax]$$

Si sólo consideramos la distorsión residual en un punto P en x, o en y, ésta viene dada por

$$s_p = Q_{s_p t} Q_{tt}^{-1} [t - Ax]$$

El único problema es calcular las covarianzas Q_{tt} de las observaciones.

4. CALCULO DE LA FUNCION DE COVARIANZA

Nuestro problema por tanto será determinar la matriz de covarianza de las observaciones Q_{tt} . Suponiendo que no hay correlación entre la señal y el ruido podemos poner.

$$Q_{tt} = C_{ss} + C_{rr}$$

donde la matriz C_{ss} puede obtenerse por procedimientos empíricos o analíticos, según se utilicen o no observaciones previas.

Una forma de proceder para el cálculo de la función de covarianza puede ser darle la forma de una función exponencial definida positiva, determinando los parámetros con datos experimentales o imponiendo condiciones de contorno.

Sea s la señal, debida a la distorsión, que puede representarse por una función continua de las coordenadas x , e y , es decir

$$s_x = s_x(x, y)$$

$$s_y = s_y(x, y)$$

y tomemos una cualquiera de ellas, por ejemplo $s = s_x$, despreciando de momento s_y . Sea entonces s la señal en un punto P y s' en otro punto P', y formemos el producto ss' para todos los puntos-

$P_i P_i'$, $i = 1, \dots, N$, que se encuentran entre sí a una misma distancia d , entonces la función de covarianza para la distancia d , es la media de los productos ss' para tales pares de puntos, es decir

$$C(d) = M \{ss'\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i s_i'$$

y esta misma, considerada como función de "d", es la función covarianza para nuestro problema. Es necesario que los puntos estén uniformemente distribuidos en la región considerada, entonces con los valores disponibles puede formarse numericamente la función $C(d)$.

Una función analítica muy apropiada para estos casos, es la función exponencial definida positiva (MORITZ, 1972).

$$C(d) = C_0 e^{-a^2 d^2}$$

donde C_0 y a se obtienen con los datos experimentales.

Para determinar la constante C_0 , hagamos $d = 0$ entonces

$$C(0) = C_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i^2$$

es decir C_0 es la varianza de la señal.

Para determinar a , fijamos un valor $d=d_1 \neq 0$, entonces

$$C(d_1) = C_0 e^{-a^2 d_1^2}$$

y tomando logaritmos neperianos

$$a^2 d_1^2 = \ln \frac{C(d_1)}{C_0}$$

de donde

$$a^2 = \frac{1}{d_1^2} \ln \frac{C(d_1)}{C_0}$$

Una vez obtenida la función de covarianza, para cualquier par de puntos $P_i P_j$, tendremos :

$$C(d_{ij}) = C_{ij}$$

siendo d_{ij} la distancia entre P_i y P_j .

Vamos a ver ahora otra forma de obtener una expresión analítica para esta función de covarianza (RAMPAL, 1976) que no hace uso de hipótesis previas acerca de la forma de dicha función.

Consideremos en una placa fotográfica con 0 como centro fiducial una zona útil de dimensiones $2R \times 2R$ y sean OX y OY las direcciones de los ejes.

Sea s la señal debida a la distorsión en un punto P de coordenadas (x,y) y s' la señal en otro punto P' de coordenadas (x',y') , $x'=x+d \cos \alpha$, $y'=y+d \sin \alpha$ (fig. 1) tal que la distancia $PP'=d$.

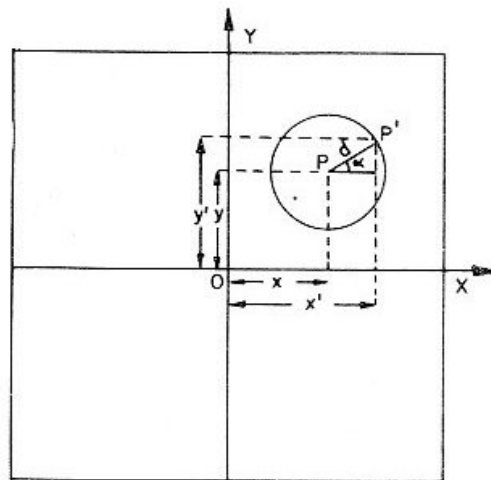


Fig 1

Para determinar la covarianza $C(d)$ necesitamos calcular la media de los productos ss' para todos los puntos de la placa separados entre sí una distancia d .

Con objeto de efectuar la media indicada, consideremos primero P fijo como centro de un círculo de radio d , y calculemos

$$M_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x,y) F(x'+d\cos\alpha, y'+d\sin\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x,y) F(x+d\cos\alpha, y+d\sin\alpha) d\alpha$$

donde F es una función de las coordenadas del punto, que nos describe el comportamiento de la señal.

Si ahora movemos P en la dirección del eje X, e integramos obtenemos

$$M_{ax} = \frac{1}{2(R-d)} \int_{d-R}^{R-d} M_a dx$$

Finalmente si volvemos a integrar en la variable y , resulta

$$M_{axy} = \frac{1}{2(R-d)} \int_{d-R}^{R-d} M_{ay} dy$$

con lo que habremos cubierto todo el campo completo.

En definitiva se obtiene:

$$C(d) = \frac{1}{8A(r-d)^2} \int_{d-R}^{R-d} \int_{d-R}^{R-d} \int_0^{2\pi} F(x,y)F(x+d \cos\alpha, y + \text{sen}\alpha) d\alpha dx dy$$

Para poder efectuar la integración práctica, necesitamos conocer una expresión matemática de la función F , y esto es lo que vamos a hacer en lo que sigue.

Sea P de coordenadas (x,y) la posición que debería tener en la placa un cierto punto, a una distancia r del origen, en condiciones ideales, y Q de coordenadas $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ la que dicho punto tiene realmente, y que a causa, entre otras, de la distorsión, es distinta de la de P ; entonces \overline{PQ} será la señal, cuyas componentes en las direcciones de los ejes designaremos por s_x, s_y (fig. 2).

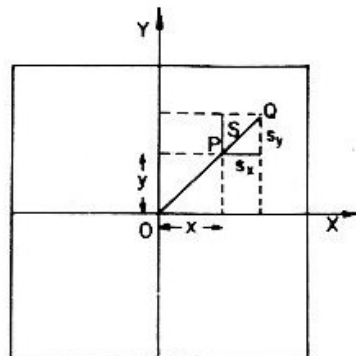


Fig 2

Si consideramos una de las componentes de la señal, por ejemplo s_x , cuyo valor comparado con r va a ser pequeño, vemos que al va-

riar los puntos vamos a poder considerarla como una función armónica, es decir verificando la ecuación de Laplace de 2º orden.

$$\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_x}{\partial y^2} = 0$$

cuya solución es

$$s_x = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n$$

Análogamente para S_y resulta:

$$s_y = \sum_{n=0}^{\infty} (a'_n \cos n\theta + b'_n \operatorname{sen} n\theta) r^n$$

donde $\cos\theta = x/r$ y $\operatorname{sen}\theta = y/r$ y a_n, b_n, a'_n, b'_n son constantes arbitrarias que deben determinarse por las condiciones del contorno.

Sustituyendo estas expresiones en la integral obtenemos x , e y respectivamente, $C(d)$.

$$C_x(d) = \frac{1}{8A(R-d)^2} \int_{d-R}^{R-d} \int_{d-R}^{R-d} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta' + b_n \operatorname{sen} n\theta') r'^n \quad d\alpha \, dx \, dy$$

e integrando término a término entre este desarrollo (tomando hasta $n=3$) se llega a una expresión de la forma

$$C_x(d) = a_0^2 + 1/3(a_1^2 + b_1^2) (R-d)^2 + 1/45(8a_2^2 + 10b_2^2) (R-d)^4 + \\ + 1/70(49a_3^2 + 48b_3^2) (R-d)^6 + 1/1575(944a_2^4 + 384b_2^4) (R-d)^8$$

y análogamente para la coordenada y :

$$C_y(d) = a_0'^2 + 1/3(a_1'^2 + b_1'^2) (R-d)^2 + 1/45(8a_2'^2 + 10b_2'^2) (R-d)^4 +$$

$$+1/70(49a_3'^2 + 48b_3'^2) (R-d)^6 + 1/1575(944a_2'^4 + 384b_2'^4) (R-d)^8$$

Nos queda ahora determinar los parámetros a_n, b_n, a_n', b_n' . En nuestro caso el procedimiento para obtener numericamente estos valores será:

- Reducir la placa por el método de mínimos cuadrados y obtener los residuales e_x, e_y .
- Tomar estos residuales para la determinación de los coeficientes a_n, b_n, a_n', b_n' mediante el conjunto de ecuaciones.

$$(e_x)_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n$$

$$(e_y)_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n' \cos n\theta + b_n' \operatorname{sen} n\theta) r^n$$

llamando $(x_i^2 + y_i^2)^{1/2} = r_i$ teniendo en cuenta que $\cos\theta = x_i/r_i$ y

$$\operatorname{sen}\theta = y_i/r_i$$

cada punto dará lugar a dos ecuaciones de observación de la forma:

$$1 a_0 + x_i a_1 + y_i b_1 + (x_i^2 - y_i^2) a_2 + 2x_i y_i b_2 + (4x_i^3 - 3x_i^3 - 3x_i r_i^2) a_3 +$$

$$3y_i r_i^2 - 4y_i^3) b_3 + 0 a_0' + 0 a_1' + 0 b_1' + 0 a_2' + 0 b_2' + 0 a_3' + 0 b_3' = (e_x)_i$$

$$0 a_0 + 0 a_1 + 0 b_1 + 0 a_2 + 0 b_2 + 0 b_3 + 1 a_0' + x_i a_1' + y_i b_1' + (x_i^2 - y_i^2) a_2'$$

$$+ 2x_i y_i b_2' + (4x_i^3 - 3x_i r_i^2) a_3' + (3y_i r_i^2 - 4y_i^3) b_3' = (e_y)_i$$

sistema que resolveremos por mínimos cuadrados, y de donde determinaremos los parámetros que aparecen en la función de covarianza.

Una vez obtenida la función de covarianza para cualquier par de puntos P_i, P_j tendremos:

$$\operatorname{cov} \{P_i, P_j\} = C(d_{ij}) = C_{ij}$$

siendo d_{ij} la distancia entre P_i y P_j .

Recordemos que en nuestro problema tenemos dos funciones señal, una para cada componente, es decir s_x y s_y de manera que en total tenemos cuatro funciones covarianza:

- Dos funciones autocovarianza: $C_{xx}(d) = M \{s_x s_x'\}$
 $C_{yy}(d) = M \{s_y s_y'\}$
- Y dos funciones covarianza cruzada : $C_{xy}(d) = M \{s_x s_y'\}$
 $C_{yx}(d) = M \{s_y s_x'\}$

Si suponemos isotropía completa, es decir que la función de covarianza depende de la distancia entre dos puntos, pero no de la dirección será:

$$C_{xx}(d) = C_{yy}(d) = C(d)$$

y las covarianzas cruzadas cero

$$C_{xy} = C_{yx} = 0$$

Calculemos ahora las covarianzas que aparecen en las fórmulas de estimación. Sabemos que

$$Q_{tt} = C_{ss} + C_{rr}$$

donde los elementos de la matriz C_{ss} , covarianza de la señal, vendrán dados por los valores de $C(d)$ es decir tendríamos:

$$C_{ss} = \begin{vmatrix} q_{x_1x_1} & q_{x_1y_1} & q_{x_1x_2} & q_{x_1y_2} & \dots & q_{x_1x_m} & q_{x_1y_m} \\ q_{y_1x_1} & q_{y_1y_1} & q_{y_1x_2} & q_{y_1y_2} & \dots & q_{y_1x_m} & q_{y_1y_m} \\ q_{x_2x_1} & q_{x_2y_1} & q_{x_2x_2} & q_{x_2y_2} & \dots & q_{x_2x_m} & q_{x_2y_m} \\ q_{y_2x_1} & q_{y_2y_1} & q_{y_2x_2} & q_{y_2y_2} & \dots & q_{y_2x_m} & q_{y_2y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{x_mx_1} & q_{x_my_1} & q_{x_mx_2} & q_{x_my_2} & \dots & q_{x_mx_m} & q_{x_my_m} \\ q_{y_mx_1} & q_{y_my_1} & q_{y_mx_2} & q_{y_my_2} & \dots & q_{y_my_m} & q_{y_my_m} \end{vmatrix}$$

siendo

$$q_{x_i x_i} = q_{y_i y_i} = C(0) = q_0$$

$$q_{x_i x_j} = q_{y_i y_j} = C(d_{ij}) = q_{ij}$$

$$q_{x_i y_i} = q_{y_i x_i} = 0$$

y así resulta

$$C_{SS} = \begin{vmatrix} q_0 & 0 & q_{12} & 0 & \dots & q_{1m} & 0 \\ 0 & q_0 & 0 & q_{12} & \dots & 0 & q_{1m} \\ q_{12} & 0 & q_0 & 0 & \dots & q_{2m} & 0 \\ 0 & q_{12} & 0 & q_0 & \dots & 0 & q_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1m} & 0 & q_{2m} & 0 & \dots & q_0 & 0 \\ 0 & q_{1m} & 0 & q_{2m} & \dots & 0 & q_0 \end{vmatrix}$$

y por otra parte la matriz C_{RR} , covarianza de los errores medida, tiene la forma:

$$C_{RR} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \gamma_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_m & \gamma_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_m & \beta_m \end{vmatrix}$$

siendo α_i , β_i las varianzas en el punto P_i en las direcciones x, e y respectivamente y γ_i las covarianzas entre x, e y. Estos valores pueden calcularse conociendo los errores $(v_{x_m}, v_{y_m}, v_{x_t}, v_{y_t})$ -- errores de medida y errores de cálculo (MORITZ, H. 1972).

5.- FORMULAS DEFINITIVAS DE LA TRANSFORMACION HOMOGRAFICA.

Obtenidos los valores de los parámetros $x=(a,b,c,a',b',c',P,Q)$ y los valores de la señal s_x , e s_y , tendremos

$$x_t = \frac{(1+a)x_m + by_m + c}{1 + Px_m + Qy_m} + s_x \quad (5-1)$$

$$y_t = \frac{a'x_m + (1+b')y_m + c'}{1 + Px_m + Qy_m} + s_y$$

de manera que al haber añadido las componentes de la señal (distorsiones aleatorias), (x_t, y_t) constituyen una observación completa. En tonces dados los vectores (x_{m_p}, y_{m_p}) de las coordenadas de un punto

en el plano, las coordenadas del punto homólogo, en el plano de las coordenadas teóricas vendrán dadas por la ecuación (5-11).

B I B L I O G R A F I A

- 1.-EICHHORN, H (1.974).- "Astronomy of star position". Frederic Ungor. Pub. C. New York.
- 2.-KRAUSS, K (1.972) .- "Film Deformation Correction with least squares Interpolation". Photogrammetric Engineering.
- 3.-KRAUSS, K and MIKHAIL, E.H. (1.972).- "Linear leest-Squares Interpolation". Twelf Congress of the International Society of Photogrammetry (Otawa).
- 4.-MORITZ, H. (1.972) .- "Advanced least squares Methods", Report n° 175. Dept. of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus (Ohio).
- 5.-RAMPAL, K. (1.976) .- "Least squares collocation in Photogrammetry" Photogrammetric Engineering (n°42 pp.5) .
- 6.-SEVILLA M.J. (1.974) - "Método autocorrector para el cálculo de direcciones de satélites geodésicos" URANIA - n°281.
- 7.-SEVILLA M.J. (1.979) - "Técnicas de colocación en geodesia dinámica". Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Tomo LXXIII, - cuaderno, 12.

FE DE ERRATAS

En portada: Líneas 4 y 5, dice: (Coordinado por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Departamento de Mecánica y Astronomía).

Debe decir: (Coordinado con el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Departamento de Mecánica y Astronomía).

Contraportada: Líneas 32 y 33, dice:

115.—M. A. MONTULL, M. J. SEVILLA y A. GONZÁLEZ-CAMACHO: Aplicación de la V.L.B.I. trella Polar. Programa de cálculo automático (1979).

Debe decir:

115.—M. A. MONTULL, M. J. SEVILLA y A. GONZÁLEZ-CAMACHO: Aplicación de la V.L.B.I. al estudio del movimiento del Polo (1981).

ISSN: 0211 - 8289

PUBLICACIONES DEL SEMINARIO DE ASTRONOMIA Y GEODESIA
DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE — MADRID

- 26.—J. M. TORROJA: Nueva órbita del Asteroide 1557 (1942 AD) (1954).
- 27.—R. CARRASCO y M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1290 "Albertine" (1954).
- 28.—J. PENSADO: Distribución de los periodos y excentricidades y relación periodo-excentricidad en las binarias visuales (1955).
- 29.—J. M. GONZÁLEZ-ABOÍN: Nueva órbita del Asteroide 1372 "Haremari" (1955).
- 30.—M. DE PASCUAL: Rectificación de la órbita del Asteroide 1547 (1929 CZ) (1955).
- 31.—J. M. TORROJA: Órbita del Asteroide 1554 "Yugoslavia" (1955).
- 32.—J. PENSADO: Nueva órbita del Asteroide 1401 "Lavonne" (1956).
- 33.—J. M. TORROJA: Nuevos métodos astronómicos en el estudio de la figura de la Tierra (1956).
- 34.—D. CALVO: Rectificación de la órbita del Asteroide 1466 "Mündleria" (1956).
- 35.—M. L. SIEGRIST: Rectificación de la órbita del Asteroide 1238 "Predappia" (1956).
- 36.—J. PENSADO: Distribución de las inclinaciones y de los polos de las órbitas de las estrellas dobles visuales (1956).
- 37.—J. M. TORROJA y V. BONGERA: Resultados de la observación del eclipse total de Sol de 30 de junio de 1954 en Sydkoster (Suecia) (1957).
- 38.—ST. WIERZBINSKI: Solution des équations normales par l'algorithme des cracoviens (1958).
- 39.—J. M. GONZÁLEZ-ABOÍN: Rectificación de la órbita del Asteroide 1192 "Prisma" (1958).
- 40.—M. LÓPEZ ARROYO: Sobre la distribución en longitud heliográfica de las manchas solares (1958).
- 41.—F. MÚGICA: Sobre la ecuación de Laplace (1958).
- 42.—F. MARTÍN ASÍN: Un estudio estadístico sobre las coordenadas de los vértices de la triangulación de primer orden española (1958).
- 43.—ST. WIERZBINSKI: Orbite améliorée de h 4530 = γ Cen = Cpd—48°, 4965 (1958).
- 44.—D. CALVO BARRENA: Rectificación de la órbita del Asteroide 1164 "Kobolda" (1958).
- 45.—M. LÓPEZ ARROYO: El ciclo largo de la actividad solar (1959).
- 46.—F. MÚGICA: Un nuevo método para la determinación de la latitud (1959).
- 47.—J. M. TORROJA: La observación del eclipse de 2 de octubre de 1959 desde El Aaiun (Sahara) (1960).
- 48.—J. M. TORROJA, P. JIMÉNEZ-LANDI y M. SOLÍS: Estudio de la polarización de la luz de la corona solar durante el eclipse total de Sol del día 2 de octubre de 1959 (1960).
- 49.—E. PAJARES: Sobre el mecanismo diferencial de un celóstato (1960).
- 50.—J. M. GONZÁLEZ-ABOÍN: Sobre la diferencia entre los radios vectores del elipsoide internacional y el esferoide de nivel (1960).
- 51.—J. M. TORROJA: Resultado de las observaciones del paso de Mercurio por delante del disco solar del 7 de noviembre de 1960 efectuadas en los observatorios españoles (1961).
- 52.—F. MÚGICA: Determinación de la latitud por el método de los verticales simétricos (1961).
- 53.—M. LÓPEZ ARROYO: La evolución del área de las manchas solares (1962).
- 54.—F. MÚGICA: Determinación simultánea e independiente de la latitud y longitud mediante verticales simétricos (1962).
- 55.—P. DÍEZ-PICAZO: Elementos de la órbita de la variable eclipsante V 499 Scorpionis (1964).
- 56.—J. M. TORROJA: Los Observatorios Astronómicos en la era espacial (1965).
- 57.—F. MARTÍN ASÍN: Nueva aportación al estudio de la red geodésica de primer orden española y su comparación con la red compensada del sistema europeo (1966).
- 58.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ: La Luz Zodiacal. Luz del espacio interplanetario (1966).
- 59.—J. M. GONZÁLEZ-ABOÍN: Variaciones de las coordenadas geodésicas de los vértices de una red, por cambio de elipsoide de referencia (1966).
- 60.—F. SÁNCHEZ MARTÍNEZ y R. DUMONT: Fotometría absoluta de la raya verde y del continuo atmosférico en el Observatorio Astronómico del Teide (Tenerife), de enero de 1964 a julio de 1965 (1967).
- 61.—M. REGO: Estudio del espectro de la estrella 31 Aql. en la región $\lambda\lambda$ 4000-6600 Å (1969).
- 62.—C. MACHÍN: Mareas terrestres (1969).
- 63.—J. M. TORROJA: La estación para la observación de satélites geodésicos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid (1969).

(Continúa en la tercera de cubierta)

- 64.—M. J. SEVILLA: Reducción automática de posiciones de estrellas (1970).
- 65.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid en 1969 (1970).
- 66.—M. J. SEVILLA: Los cálculos de estación en triangulación espacial (1970).
- 67.—MANUEL E. REGO: Determinación de las abundancias de los elementos en la atmósfera de la estrella de alta velocidad 31 Aql. (1970).
- 68.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Análisis cualitativo del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1971).
- 69.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1970 (1971).
- 70.—R. VIEIRA y R. ORTIZ: Descripción de un aparato para medida de coordenadas (1971).
- 71.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1971 (1972).
- 72.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Observación y estudio teórico del espectro de la estrella peculiar HD 18474 (1972).
- 73.—M. J. SEVILLA: Cálculo de las constantes de distorsión y parámetros del disco obturador para cámaras balísticas (1973).
- 74.—R. PARRA y M. J. SEVILLA: Cálculo de efemérides y previsiones de pasos de satélites geodésicos (1973).
- 75.—M. REGO y M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Resultado de las observaciones de α Peg efectuadas desde el satélite europeo TD1 (1973).
- 76.—E. SIMONNEAU: Problemas en la determinación de abundancias de elementos en las estrellas en condiciones de equilibrio termodinámico local y alejadas del equilibrio termodinámico local (1974).
- 77.—J. ARANDA: Construcción de modelos de estructura interna para estrellas en la secuencia principal inicial (1974).
- 78.—R. ORTIZ, M. SEVILLA y R. VIEIRA: Estudio de la calibración, técnica de medida y automatización de datos en un comparador para medidas de placas estelares (1974).
- 79.—M. J. SEVILLA: Método autocorrector para el cálculo de direcciones de satélites geodésicos y análisis de los errores en la restitución de un arco de órbita (1974).
- 80.—M. A. ACOSTA, R. ORTIZ y R. VIEIRA: Diseño y construcción de un fotómetro fotoeléctrico para la observación de ocultaciones de estrellas por la Luna (1974).
- 81.—T. J. VIVES, C. MORALES, J. GARCÍA-PELAYO y J. BARBERO: Fotometría fotográfica UBV del cúmulo galáctico King 19 (1974).
- 82.—R. ORTIZ y R. VIEIRA: Control automático en posición y tiempo de los sistemas de obturación de las cámaras de observación de satélites geodésicos (1974).
- 83.—J. M. TORROJA: Memoria de las actividades del Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad Complutense de Madrid en 1972 y 1973 (1974).
- 84.—M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA y M. REGO: α CrB en el ultravioleta lejano (1975).
- 85.—J. M. TORROJA, R. VIEIRA, R. ORTIZ y M. J. SEVILLA: Estudio de mareas terrestres en España (1975).
- 86.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Levantamiento gravimétrico de Lanzarote (1975).
- 87.—P. KUNDANMAL SUKHWANI: Modelos teóricos de curvas de luz. Su aplicación al sistema β Lyrae (1975).
- 88.—M. J. SEVILLA: Coordenadas astronómicas y geodésicas. Desviación relativa de la vertical (1975).
- 89.—C. TEJEDOR: Fotometría fotoeléctrica R. G. U. del cúmulo galáctico IC 2581 (1976).
- 90.—M. J. SEVILLA: Nuevos coeficientes para la reducción automática de posiciones de estrellas (1976).
- 91.—M. REGO: Técnicas observacionales en espectroscopía astrofísica (1976).
- 92.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud por distancias cenitales de la polar, método de Littrow (1976).
- 93.—T. J. VIVES: Determinación fotométrica del tipo espectral de la componente desconocida de una estrella binaria eclipsante (1976).
- 94.—M. REGO y M. J. FERNÁNDEZ-FIGUEROA: Contraste y determinación por métodos astrofísicos de fuerzas de oscilador (1977).
- 95.—M. J. SEVILLA y R. CHUECA: Determinación de acimutes por observación de la Polar. Método micrométrico (1977).
- 96.—JOSÉ M. GARCÍA-PELAYO: Fotometría R G U en un campo del anticentro galáctico, cerca del NGC 581 (1977).
- 97.—JOSÉ M. GARCÍA-PELAYO: Datos fotométricos de 2.445 estrellas estudiadas en la región de Casiopea, entre los cúmulos abiertos Trumpler 1 y NGC 581 (1977).

(Continúa en la segunda de cubierta)

- 98.—PREM K. SUKHWANI y RICARDO VIEIRA: Spectral Analysis of Earth Tides (1977).
- 99.—JOSÉ M. TORROJA y RICARDO VIEIRA: Earth Tides in Spain. Preliminary results (1977).
- 100.—PREM K. SUKHWANI y RICARDO VIEIRA: Three different methods for taking in account the gaps in spectral analysis of Earth Tides records (1978).
- 101.—R. VIEIRA: Mareas terrestres (1978).
- 102.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la longitud por el método de Mayer. Programas de cálculo automático (1979).
- 103.—M. J. SEVILLA y A. NÚÑEZ: Determinación de la latitud por el método de Sterneck. Programas de cálculo automático (1979).
- 104.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por el método de alturas iguales. Programas de cálculo automático (1979).
- 105.—P. K. SUKHWANI y A. GIMÉNEZ: Corrección de efectos atmosféricos para imágenes tomadas desde satélites Landsat (1979).
- 106.—M. J. SEVILLA: Inversión de matrices simétricas en el método de mínimos cuadrados (1979).
- 107.—A. GIMÉNEZ: Análisis de la curva de luz del sistema binario eclipsante S Velorum (1979).
- 108.—M. J. SEVILLA: Determinación del acimut de una referencia por observación de la estrella polar. Programa de cálculo automático (1979).
- 109.—M. J. SEVILLA: El sistema IAU (1976) de constantes astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas (primera parte) (1980).
- 110.—M. J. SEVILLA y R. PARRA: Determinación de la latitud por el método de Horrebow-Talcott. Programas de Cálculo Automático (1980).
- 111.—M. J. SEVILLA: Determinación de la latitud y la longitud por fotografías cenitales de estrellas (1980).
- 112.—R. VIEIRA y M. OREJANA: Comunicaciones presentadas en las XLI y XLII Jornadas del Grupo de Trabajo de Geodinámica del Consejo de Europa. Luxemburgo (1979-80).
- 113.—M. J. SEVILLA: Sobre un método de cálculo para la resolución de los problemas geodésicos directo e inverso (1981).
- 114.—R. VIEIRA, J. M. TORROJA, C. TORO, F. LAMBAS, M. OREJANA y P. K. SUKHWANI: Comunicaciones presentadas en el IX Symposium Internacional de Mareas Terrestres. Nueva York (1981).
- 115.—M. A. MONTULL, M. J. SEVILLA y A. GONZÁLEZ-CAMACHO: Aplicación de la V. L. B. I. trella Polar. Programa de cálculo automático (1979).
- 116.—A. GONZÁLEZ-CAMACHO y M. J. SEVILLA: Algunas relaciones entre diferentes ejes que se consideran en la rotación de la Tierra (1981).
- 117.—R. VIEIRA, F. LAMBAS y E. GIMÉNEZ: Modificaciones realizadas en un gravímetro LaCoste Romberg mod. G para su utilización en registro continuo de la gravedad (1981).
- 118.—R. VIEIRA: La microrred de mareas gravimétricas del Sistema Central (1981).
- 119.—J. M. TORROJA y R. VIEIRA: Informe sobre el desarrollo del programa de investigación sobre mareas terrestres en el último bienio (1981).
- 120.—F. LAMBAS y R. VIEIRA: Descripción, estudio de la precisión y aplicaciones geodésicas y geofísicas de los nuevos niveles de lectura electrónica (1981).
- 121.—M. J. SEVILLA: Programación del método de la cuerda (1981).
- 122.—J. M. TORROJA: Historia de la Ciencia Árabe. Los Sistemas Astronómicos (1981).
- 123.—M. J. SEVILLA y R. VIEIRA: Comunicaciones presentadas en la Sesión Científica de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, celebrada el día 13 de enero de 1982 (1982).