UN TEOREMA DE EXTENSION DE WHITNEY EN DIMENSION INFINITA Y CLASE P

por

JUAN MARGALEF ROIG y ENRIQUE OUTERELO DOMINGUEZ

RESUMEN

Se prueba que si f es una aplicación de clase p en un abierto de un cuadrante de un espacio de Banach real, entonces en cada punto del abierto, f admite una extensión de clase p a un entorno global de dicho punto.

Se utiliza este resultado para establecer un teorema de extensión de Whitney en un cuadrante de un espacio de Banach y un teorema de la función inversa en variedades con borde anguloso.

PRELIMINARES

Sea E un espacio de Banach real y $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ un sistema linealmente independiente de elementos de $\mathcal{L}(E, R)$. Entonces al conjunto

$$\{x \in E/\lambda_1(x) \geq 0, \ldots, \lambda_n(x) \geq 0\}$$

se le llama Λ-cuadrante de orden n de E y se le designa por E_Λ^+. Asimismo al subespacio vectorial cerrado de E, $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \lambda_i$, se le designará por E_Λ^0. Es bien conocido que

$$E = E_\Lambda^0 \oplus_T L\{x_1, \ldots, x_n\}$$

donde $\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$. Si x es un elemento de E_Λ^+, se llama índice de x, ind (x), al cardinal del conjunto $\{i/\lambda_i(x) = 0\}$. Si U es un abierto de E_Λ^+, al conjunto $\{x \in U/\text{ind}(x) \geqslant 1\}$ se le llama borde de U y se le designa por ∂ U y al conjunto $\{x \in U/\text{ind}(x) = 0\}$ se le llama interior de U y se le designa por int (U). El interior y el borde cumplen lo siguiente:

$$U - \partial U = \text{int}\, U; \quad U = (\partial U) \cup \text{int}\, U; \quad \partial U \cap \text{int}\, U = \phi;$$

int U es abierto en E; si

$$\Lambda = \phi, \ \partial U = \phi \quad \text{e} \quad \text{int}\, U = U; \quad \text{si} \quad \partial U \neq \phi, \ \Lambda \neq \phi \quad \text{e} \quad \text{int}\, U \neq \phi.$$

Proposición 1.—Sean E, F espacios de Banach reales,

$$\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

un sistema linealmente independiente de elementos de $\mathcal{L}$ (E, R), U un abierto de E^+_Λ, f una aplicación de U en F y x un elemento de U. Entonces si u, v son elementos de $\mathcal{L}$ (E, F) tales que

$$\lim_{y \to x} \| f(y) - f(x) - u(y - x) \| \, \| y - x \|^{-1} = 0$$

y

$$\lim_{y \to x} \| f(y) - f(x) - v(y - x) \| \, \| y - x \|^{-1} = 0,$$

se verifica que $u = v$.

Definición 2.—Sean E, F espacios de Banach reales,

$$\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

un sistema linealmente independiente de elementos de $\mathcal{L}$ (E, R), U un abierto de E^+_Λ, f una aplicación de U en F y x un elemento de U. Entonces si existe un elemento u de $\mathcal{L}$ (E, F) tal que

$$\lim_{y \to x} \| f(y) - f(x) - u(y - x) \| \, \| y - x \|^{-1} = 0,$$

se dice que f es diferenciable en x, se escribirá $u = \mathrm{D} f(x)$ y a $\mathrm{D} f(x)$ se le llamará diferencial de f en x.

Si f es diferenciable en cada punto de U, diremos que f es diferenciable en U.

Observamos lo siguiente:

1) Los conceptos definidos anteriormente no dependen de la norma admisible utilizada.

2) Si $\Lambda = \emptyset$, $E_\Lambda^+ = E$ y las nociones anteriores coinciden con las dadas en el cálculo diferencial ordinario en abiertos de espacios de Banach.

3) Si f es diferenciable en x, f es continua en x.

4) Si f es diferenciable en x y v ó $-v$ pertenece a E_Λ^+, entonces

$$D f(x)(v) = \lim_{t \to 0} (f(x + t v) - f(x)) \cdot t^{-1}.$$

5) Se tiene también la regla de la cadena

$$D(f \cdot g)(x) = D g(f(x)) \cdot D f(x)$$

6) Se cumple el teorema del valor medio: Si $[x, y]$ está contenido en U, $f|_{[x,y]}$ es continua en $[x, y]$ y f es diferenciable en cada punto de (x, y) y la diferencial está acotada por K en dicho intervalo, entonces

$$\| f(y) - f(x) \| \leq K \| y - x \|.$$

7) Se introduce por inducción, el concepto de aplicación p veces diferenciable en un punto x de U y el concepto de diferencial de orden p en x, $D^p f(x)$. Asimismo se cumple que $D^p f(x)$ es p-lineal simétrica y continua.

DEFINICIÓN 3.—Sean E, F espacios de Banach reales, $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ un sistema linealmente independiente de elementos de $\mathcal{L}(E, R)$, U un abierto de E_Λ^+ y f una aplicación de U en F.

a) Se dice que f es de clase 0 en U, si f es continua en U.

b) Se dice que f es de clase p ($p \in N$) en U, si f es p veces diferenciable en U y la aplicación $D^p f$ de U en $\mathcal{L}_s^p(E, F)$ es continua.

c) Se dice que f es de clase ∞ en U, si f es de clase p en U para todo p de N.

Naturalmente f es de clase p en U si y sólo si f es diferenciable en U y la aplicación $D f$ de U en $\mathcal{L}(E, F)$ es de clase $p - 1$.

Por otra parte la composición de aplicaciones de clase p es de clase p.

Otras definiciones alternativas de aplicación de clase p:

Sean E, F espacios de Banach reales, Λ un sistema finito y linealmente independiente de elementos de $\mathcal{L}$ (E, R), U un abierto de E_Λ^+, f una aplicación de U en F y p un elemento de $N \cup \{\infty\}$.

DEFINICIÓN 4.—Se dice que f es de clase p en U, si para todo elemento x de U existe V^x, entorno abierto de x en E y existe f_x, aplicación de V^x en F de clase p (en el sentido del cálculo diferencial ordinario) tal que f_x y f coinciden en $V^x \cap U$.

DEFINICIÓN 5.—Se dice que f es de clase p en U, si existe G abierto de E y existe $\bar{f}$ aplicación de clase p de G en F (en el sentido del cálculo diferencial ordinario) tal que $G \cap E_\Lambda^+ = U$ y $f, \bar{f}$ coinciden en U.

Observaciones:

A) Toda aplicación de clase p, según la definición 5), es de clase p según la definición 4).

B) Toda aplicación de clase p según la definición 4), es de clase p según la definición 3).

C) Si E admite particiones de la unidad de clase p, entonces la definición 4) implica la definición 5).

D) Si $E = R^n$, las definiciones 3), 4) y 5) son equivalentes.

Es consecuencia de que R^n admite particiones de la unidad de clase p y del teorema clásico de extensión de Whitney, cuyo enunciado es el siguiente:

«Sean A un cerrado de R^p; F un espacio de Banach real, f una aplicación de A en F, $r \in N \cup \{0\}$ y para todo $k \in \{0, ..., r\}$, f_k una aplicación de A en $\mathcal{L}_s^k(R^p, F)$, donde $f_0 = f$.

Para cada $k \in \{0, 1, ..., r\}$ se considera R_k: $A \times A \longrightarrow \mathcal{L}_s^k(R^p, F)$ definida por

$$R_k(x, y) = f_k(y) - \sum_{i=0}^{r-k} \frac{f_{k+i}(x)((y-x)^{(i)})}{i!}$$

Supongamos que para todo $k \in \{0, 1, ..., r\}$, todo $x_0 \in A$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in A$ con

$$\| x_1 - x_0 \| < \delta \quad \text{y} \quad \| x_2 - x_0 \| < \delta,$$

se verifica que

$$\| R_k(x_1, x_2) \| \leq \varepsilon \| x_1 - x_2 \|^{r-k}$$

Entonces existe $\overline{f}$: $R^p \rightarrow F$ de clase r tal que $\overline{f}|_A = f$ y para todo $k \in \{1, ..., r\}$, $(D^k \overline{f})|_A = f_k$».

E) Si f es una aplicación de U en V, donde U y V son abiertos de los cuadrantes E_M^+ y F_Λ^+ respectivamente, se dice que f es un difeomorfismo de clase p si f es biyectiva de U sobre V y f, f^{-1} son de clase p en el sentido de la definición 3).

Si f es un difeomorfismo de clase p, para todo x de U se cumple que $D f(x)$ es un homeomorfismo lineal de E sobre F. Además se cumple el teorema de invariancia del borde, es decir:

$$\text{ind}(x) = \text{ind} f(x)$$

para todo x de U; $\partial U \neq \varnothing$ si y sólo si $\partial V \neq \varnothing$; $\partial U \neq \phi$ implica que $\Lambda \neq \phi$ y $M \neq \Phi$;

$$f(\text{int}\, U) = \text{int}\, V; \quad f(\partial U) = \partial V \quad \text{y} \quad f|_{\text{int}\, U}$$

es un difeomorfismo de clase p de int U sobre int V. (Este teorema no es cierto para $p = 0$, aunque sí lo es para $p = 0$ y dimensión finita.)

Nos proponemos probar la equivalencia de las definiciones 3) y 4), en dimensión arbitraria y clase finita.

LEMA 6 (R. Seeley, [3]).—Existen dos sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n \in N \cup \{0\}}$ y $\{b_n\}_{n \in N \cup \{0\}}$ tales que:

1) $b_n < 0$ para todo $n \in N \cup \{0\}$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |b_n|^p < \infty$ para todo $p = 0, 1, 2, 3, ...$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (b_n)^p = 1$ para todo $p = 0, 1, 2, 3, ...$

4) $\text{Lim}\, \{b_n\}_{n \in N \cup \{0\}} = -\infty$.

LEMA 7.—Sean E un espacio de Banach real, λ un elemento no nulo de $\mathcal{L}(E, R)$, U un abierto del cuadrante E_λ^+, F un espacio de Banach real, f una aplicación de U en F y p un número natural.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es de clase p, según la definición 3.

b) Para todo x de U existe V^x, entorno abierto de x en E, y existe $\overline{f}$ aplicación de V^x en F de clase p (en el sentido del cálculo diferencial ordinario) tal que $\overline{f}|_{V^x \cap U} = f|_{V^x \cap U}$.

DEMOSTRACIÓN.—b) $\Longrightarrow$ a) Se verifica siempre.

a) $\Longrightarrow$ b).

Sea v un elemento de E tal que $\lambda(v) = 1$. Entonces

$$\theta : E \longrightarrow E^0{}_\lambda \, x \, L\{v\}$$

definida por

$$\theta(x) = (y_x, r_x v),$$

donde $y_x + r_x v = x$, es un homeomorfismo lineal.

Además β: $E_\lambda{}^0 \times L\{v\} \longrightarrow E_\lambda{}^0 \times R$ definida por

$$\beta(\nu, r v) = (y, r),$$

es también un homeomorfismo lineal y $\alpha = \beta\,\theta$ cumple que

$$\alpha(E^+{}_\lambda) = E^0{}_\lambda \, x \, (R^+ \cup \{0\}).$$

Sean $V = \alpha(U)$, abierto de $E_\lambda{}^0 \, x \, (R^+ \cup \{0\})$, y $g = f \cdot (\alpha^{-1}|_V)$, aplicación de clase p de V en F.

Sea $x \in U$ y $\alpha(x) = (x_0, r_x)$. Si $r_x \neq 0$, $\alpha(x)$ pertenece a int (V) y basta tomar

$$V^x = \alpha^{-1}(\mathrm{int}(V)) \quad y \quad \bar{f} = f \mid_{V^x}.$$

Supongamos que $r_x = 0$. En este caso

$$\alpha(x) \in (E^0{}_\lambda \, x \, \{0\}) \cap V$$

y existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$B_{\varepsilon_0}(x_0) \, x \, [0, \varepsilon_0) \subset V,$$

donde $B_{\varepsilon_0}(x_0)$ es bola de $E_\lambda{}^0$.

Sea γ el difeomorfismo de clase ∞ de R en $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ definido por

$$\gamma(t) = \frac{\varepsilon_0 \, t}{\sqrt{\varepsilon_0{}^2 + |t|^2}}.$$

Es claro que $\gamma([0, \rightarrow)) = [0, \varepsilon_0)$.

De esta manera, se tiene la aplicación de clase p, h, de

$$B_{\varepsilon_0}(x_0) \, x \, [0, \rightarrow)$$

en F definida por

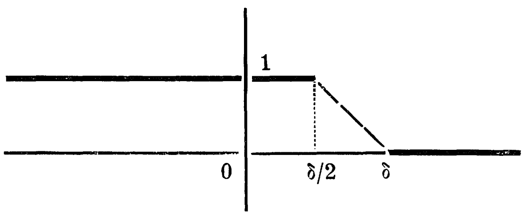
$$h = g \mid_{B_{\varepsilon_0}(x_0) \, x \, [0, \varepsilon_0)} \circ (1_{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \, x \, \gamma).$$

Puesto que h es de clase p, existe W^x, entorno abierto de x_0 en $B_{\varepsilon_0}(x_0)$, existe $\delta > 0$ con $\delta < \varepsilon_0$ y existe $K > 0$ tales que $\| h(y, t) \| < K$ para todo

$$(y, t) \in W^{x_0} x [0, \delta);$$

$D^i_y \, D^j_t \, h$ está acotada por K en $W^{x_0} x [0, \delta)$ para $i + j \leqslant p$ y $D^k h$ está acotado por K en $W^{x_0} x [0, \delta)$ para todo $k \leqslant p$.

Se considera la aplicación de clase ∞, Φ de R en R cuya gráfica es:



y se define $\bar{h}$ de $W^{x_0} x$ R en F de la siguiente forma:

$$\bar{h}(y, t) = \begin{cases} h(y, t) & \text{si} \quad 0 \leq t \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \Phi(b_n t) \, h(y, b_n t) & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

donde $\{a_n\}_{n \in N \cup \{0\}}$ y $\{b_n\}_{n \in N \cup \{0\}}$ son las sucesiones construidas en el lema anterior.

Como $\lim b_n = -\infty$, dado $t < 0$ existe $n_t \in N$ tal que para todo $n \geqslant n_t$ y todo $t' < t$, $b_n t' > \delta$, lo cual implica que la suma que interviene en la definición de $\bar{h}$ es finita y por tanto $\bar{h}$ es una aplicación. Además el mismo argumento anterior, prueba que $\bar{h}$ es de clase p en $W^{x_0} x (\leftarrow, 0)$. Es claro, de la definición de $\bar{h}$, que $\bar{h}$ es también de clase p en $W^{x_0} x (0, \rightarrow)$.

Veamos que en cada punto $(y, 0) \in W^{x_0} x R$, existe un entorno abierto de dicho punto en $W^{x_0} x R$, en el cual $\overline{h}$ es de clase p.

I) $\overline{h}$ es continua en cada punto $(y, 0) \in W^{x_0} x R$. En efecto:

Sea $y_0 \in W^{x_0}$ y $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente, existe $n_\varepsilon \in N$ tal que

$$\sum_{m=n_\varepsilon+1}^{\infty} |a_m| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot$$

Luego

$$\sum_{m=n_\varepsilon+1}^{\infty} |a_m| \, \Phi(b_m t) \, \| h(y, b_m t) \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $(y, t) \in W^{x_0} x (\leftarrow, 0)$.

Es claro que existe $n_1 \geqslant n_\varepsilon$ tal que

$$\sum_{m=n_1+1}^{\infty} |a_m| \cdot \| h(y_0, 0) \| \leq \frac{\varepsilon}{4} \cdot$$

Consideramos la función

$$\sum_{m=0}^{n_1} |a_m| \, \Phi(b_m t) \, \| h(y, b_m t) - h(y_0, 0) \|$$

para todo $(y, t) \in W^{x_0} x (\leftarrow, 0]$, que por ser continua en $(y_0, 0)$, implica la existencia de V^{y_0}, entorno abierto de y_0 en W^{x_0} y la existencia de $\eta > 0$ tales que $b_{n_1} t < \frac{\delta}{2}$ para $t \in (-\eta, 0)$ y

$$\sum_{m=0}^{n_1} |a_m| \, \Phi(b_m t) \, \| h(y, b_m t) - h(y_0, 0) \| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo (y, t) de $V^{y_0} x (-\eta, 0)$.

Así para todo

$$(y, t) \in V^{y_0} x (-\eta, 0), \left\| \sum_{m=0}^{n_1} a_m \, \Phi(b_m t) \, h(y, b_m t) - \right.$$

$$\left. - h(y_0. 0) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m = 1 \right).$$

Luego para todo

$$(y, t) \in V^{y_0} x (-\eta, 0), \; \| \bar{h}(y, t) - \bar{h}(y_0, 0) \| < \varepsilon.$$

Como $\bar{h}$ es continua en $W^{x_0} x (R^+ \cup \{0\})$ se tiene la continuidad de $\bar{h}$ en $(y_0, 0)$.

Luego h es continua en $W^{x_0} x$ R.

II) $\bar{h}$ es de clase p en $W^{x_0} x$ R.

En efecto: Podemos suponer que $W^{x_0} = B_{\varepsilon'}(x_0)$.

Es claro que

$$D_1 \bar{h}(x, t) = D_1 h(x, t)$$

para todo $(x, t) \in B_{\varepsilon'}(x_0) x$ R con $t > 0$.

Además para todo $(x, t) \in B_{\varepsilon'}(x_0) x$ R con $t < 0$, se tiene que

$$D_1 \bar{h}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi(b_n t) D_1 h(x, b_n t).$$

En esta ocasión $D_1 h$ juega el papel de la h y por tanto $D_1 \bar{h}$ es continua en $B_{\varepsilon'}(x_0) x$ R.

Para

$$y \in B_{\varepsilon'}(x_0), \; \lim_{t \to 0^+} = \frac{\bar{h}(y, t) - h(y, 0)}{t} = D_2 h(y, 0) \; (1).$$

Veamos que

$$\lim_{t \to 0^-} = \frac{\bar{h}(y, t) - h(y, 0)}{t} = D_2 h(y, 0) \; (1).$$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\bar{h}(y, t) - h(y, 0)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi(b_n t) h(y, b_n t) - h(y, 0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n \left[\frac{\Phi(b_n t) h(y, b_n t) - h(y, 0)}{b_n t} \right] = D_2 h(y, 0) \; (1).$$

En efecto: Sea $\varepsilon > 0$.

Existe $\pi_1 < \dfrac{\delta}{2}$ tal que

$$\left\| \frac{h(y,\tau) - h(y,0)}{\tau} - D_2 h(y,0)(1) \right\| < 1$$

para todo $\tau \in (0, \pi_1]$.

Existe $q \in N$ tal que

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} | a_n | \; | b_n | < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\max. \left\{ 1, \dfrac{k}{\delta} + k, \dfrac{2k}{\pi_1} + k \right\}} \cdot$$

Por otra parte

$$\left\| \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n\, b_n \left[\frac{\Phi(b_n t)\, h(y, b_n t) - h(y,0)}{b_n t} - D_2 h(y,0)(1) \right] \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{n=q+1}^{\infty} | a_n | \; | b_n | \cdot \left\| \frac{\Phi(b_n t)\, h(y, b_n t) - h(y,0)}{b_n t} - D_2 h(y,0)(1) \right\| \leq$$

$$\leq \max. \left\{ 1, \frac{k}{\delta} + k, \frac{2k}{\pi_1} + k \right\} \cdot \sum_{n=q+1}^{\infty} | a_n | \cdot | b_n | < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo} \quad t < 0.$$

Existe $\pi_2 < \pi_1$ tal que

$$\left\| \frac{h(y,\tau) - h(y,0)}{\tau} - D_2 h(y,0)(1) \right\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2 \max. \{ 1, | a_0 | \; | b_0 |, \ldots, | a_q | \; | b_q | \} \cdot (q+1)}$$

par todo $\tau \in (0, \pi_2)$.

Existe π_3 tal que para todo t de

$$(-\pi_3, 0),\; b_0 t, b_1 t, \ldots, b_q t \in (0, \pi_2).$$

Finalmente para todo $t \in (-\pi_3, 0)$,

$$\left\| \sum_{n=0}^{q} a_n\, b_n \left[\frac{\Phi(b_n t)\, h(y, b_n t) - h(y,0)}{b_n t} - D_2 h(y,0)(1) \right] \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

como queríamos demostrar.

Luego

$$\lim_{t\to 0} \frac{\overline{h}(y,t) - h(y,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overline{h}(y,t) - \overline{h}(y,0)}{t} =$$

$$= D_2 h(y,0)(1) = D_2 \overline{h}(y,0)(1),$$

de donde $D_2 h(y, 0) = D_2 \overline{h}(y, 0)$ para todo $y \in B_{\varepsilon'}(x_0)$. Naturalmente se tiene también que $D_2 h(y, t) = D_2 \overline{h}(y, t)$ para $y \in B_{\varepsilon'}(x_0)$ y $t > 0$.

Por último, para $(y, t) \in B_{\varepsilon'}(x_0)\, x\, R$ con $t < 0$ se tiene la fórmula:

$$D_2 \overline{h}(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n D\Phi(b_n t)\, h(y, b_n t) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \Phi(b_n t)\, D_2 h(y, b_n t).$$

Veamos que $D_2 \overline{h}(y, t)$ es continua en $B_{\varepsilon'}(x_0)\, x\, R$.

Sea $y_0 \in B_{\varepsilon'}(x_0)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $q \in N$ tal que

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{8} K^{-1} \cdot H^{-1}$$

donde H es una cota de $\| D\Phi(\tau) \|$ al variar τ en R y $H > 1$.

Por otra parte, existe $\delta_1 < \frac{\delta}{2}$ tal que para todo $t \in (-\delta_1, 0)$ y todo

$$y \in B_{\varepsilon'}(x_0), \quad t\, b_q < \frac{\delta}{2}$$

y

$$\sum_{n=0}^{q} |a_n| \cdot |b_n| \cdot \| D\Phi(b_n t) \| \cdot \| h(y, b_n t) \| = 0$$

Además

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \Phi(b_n t)\, D_2 h(y, b_n t) - D_2 \overline{h}(y_0, 0) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n b_n [\Phi(b_n t) D_2 h(y, b_n t) - D_2 \overline{h}(y_0, 0)] \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{n=0}^{q} a_n b_n [\Phi(b_n t) D_2 h(y, b_n t) - D_2 \overline{h}(y_0, 0)] \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{8} K^{-1} \cdot H^{-1} \cdot 2K + \left\| \sum_{n=0}^{q} a_n b_n [D_2 h(y, b_n t) - D_2 h(y_0, 0)] \right\|$$

para todo $y \in B_{\varepsilon'}(x_0)$ y todo $t \in (-\delta_1, 0)$.

Por la continuidad de $D_2 h$ en $B_{\varepsilon'}(x_0) \times [0, \rightarrow)$ existe V^{y_0} entorno abierto de y_0 en $B_{\varepsilon'}(x_0)$ y existe $\delta^* < \delta_1$ tales que para todo $y \in V^{y_0}$ y todo $t \in (-\delta^*, 0]$,

$$\left\| \sum_{n=0}^{q} a_n b_n [D_2 h(y, b_n t) - D_2 h(y_0, 0)] \right\| < \varepsilon/4.$$

Por tanto, para todo $(y, t) \in V^{y_0} \times (-\delta^*, 0)$,

$$\| D_2 \overline{h}(y, t) - D_2 \overline{h}(y_0, 0) \| < \varepsilon,$$

lo que prueba que $D_2 \overline{h}$ es continua en $(y_0, 0)$. Así $D_2 \overline{h}$ es continua en $B_{\varepsilon'}(x_0) \times R$, como queríamos probar.

Por último, $\overline{h}$ es de clase 1 en $B_{\varepsilon'}(x_0) \times R$ ya que $D_1 \overline{h}$ y $D_2 \overline{h}$ existen y son continuas en dicho dominio.

Derivando de nuevo $D_1 \overline{h}$ y $D_2 \overline{h}$ y razonando de forma análoga al caso anterior, se obtiene que $\overline{h}$ es de clase p en $W^{x_0} \times R$.

Sea $V^x = \alpha^{-1}(W^{x_0} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$ y $\overline{f}$ de V^x en F definida por

$$\overline{f}(y) = \overline{h}(1_{W^{x_0}} \times \gamma^{-1}) \alpha(y)$$

Es claro que V^x es un entorno abierto de x en E y que $\overline{f}$ es de clase p. Además $\overline{f}(y) = f(y)$ para todo $y \in V^x \cap U$.

Un razonamiento análogo al realizado en la demostración del lema anterior prueba el siguiente lema:

Lema 8.—Sean E un espacio de Banach real, $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ un sistema linealmente independiente de elementos de $\mathcal{L}(E, R)$, U un abierto del cuadrante E^+_Λ, F un espacio de Banach real, f una aplicación de U en F y p un número natural.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es de clase p, según la definición 3.

b) Para todo $x \in U$, existe V^x entorno abierto de x en

$$E^+_{\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\}}$$

y existe $\bar{f}$: $V^x \to F$ aplicación de clase p tal que $\bar{f}|_{V^x \cap U} = f|_{V^x \cap U}$.

Demostración.—b) $\Longrightarrow$ a) Es inmediato.

a) $\Longrightarrow$ b) Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$ elementos de E tales que $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$. Entonces

$$\theta : E \to E^0{}_\Lambda \times L\{v_1, \ldots, v_n\}$$

definida por

$$\theta(x) = (y_x, r_x^1 v_1 + \ldots + r_x^n v_n)$$

donde

$$y_x + r_x^1 v_1 + \ldots + r_x^n v_n = x$$

es un homeomorfismo lineal. Además

$$\beta : E^0{}_\Lambda \times L\{v_1, \ldots, v_n\} \to E^0{}_\Lambda \times R^n$$

definida por

$$\beta(y, r^1 v_1 + \ldots + r^n v_n) = (y, r^1, \ldots, r^n)$$

es también un homeomorfismo lineal y $\alpha = \beta\,\theta$ cumple que

$$\alpha(E^+_\Lambda) = E^0_\Lambda \times (R^{n+}_{\{p_1, \ldots, p_n\}}).$$

Sean $V = \alpha(U)$, abierto de

$$E^0_\Lambda \times (R^{n+}_{\{p_1, \ldots, p_n\}}), \quad y \quad g = f(\alpha^{-1}|_V),$$

aplicación de clase p de V en F.

Sea $x \in U$ y $\alpha(x) = (x_0, r_x^1, \dots, r_x^n)$.

Primer caso: $r_x^n \neq 0$. En este caso la resolución es inmediata teniendo en cuenta que

$$\alpha(E^+_{\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}}) = E^0_\Lambda \, x \, (R^{n-1})^+_{\{p_1, \dots, p_{n-1}\}} \, x \, R.$$

Segundo caso: $r_x^n = 0$. En este caso

$$\alpha(x) \in [E^0_\Lambda \, x \, (R^{n-1})^+_{\{p_1, \dots, p_{n-1}\}} \, x \, \{0\}] \cap V$$

y por tanto existe $\varepsilon_0 > 0$ y existe V^{x_0}, entorno abierto de x_0 en

$$E^0_\Lambda \, x \, (R^{n-1})^+_{\{p_1, \dots, p_{n-1}\}},$$

tales que $V^{x_0} \, x \, [0, \varepsilon_0) \subset V$.

Sea γ el difeomorfismo de clase ∞ de R en $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ definido por

$$\gamma(t) = \frac{\varepsilon_0 \, t}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + |t|^2}}$$

Es claro que $\gamma([0, \to)) = [0, \varepsilon_0)$.

Luego se tiene la aplicación de clase p, h, de $V^x \; x \, [0, \to)$ en F definida por

$$h = g|_{V^{x_0} x [0, \varepsilon_0)} \cdot (1_{V^{x_0}} \, x \, \gamma).$$

Puesto que h es de clase p, existe W^{x_0}, entorno abierto de x_0 en V^{a_0}, existe $\delta > 0$ con $\delta < \varepsilon_0$ y existe $K > 0$ tales que h, $D^i_y D^j_t h$ y $D^k h$ están acotados por K en $W^{x_0} \, x \, [0, \delta)$, donde $i + j \leqslant p$ y $k \leqslant p$.

Se considera la aplicación de clase ∞, Φ de R en R utilizada en la demostración del lema 7, y se define $\bar{h}$ de $W^{x_0} \, x$ R en F de la siguiente forma:

$$\bar{h}(y, t) = \begin{cases} h(y, t) & \text{si} \quad 0 \leq t \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \Phi(b_n t) \, h(y, b_n t) & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

donde $\{a_n\}_{n \in N \cup \{0\}}$ y $\{b_n\}_{n \in N \cup \{0\}}$ son las sucesiones del lema 6.

A partir de aquí se procede como en el lema 7.

TEOREMA 9.—Sean E un espacio de Banach real, $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ un sistema linealmente independiente de elementos de $\mathcal{L}$ (E, R), U un abierto del cuadrante E_Λ^+, F un espacio de Banach real, f una aplicación de U en F y p un número natural. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es de clase p, según la definición 3.

b) Para todo $x \in$ U, existe V^x entorno abierto de x en E y existe $\overline{f}$: $V^x \longrightarrow F$ aplicación de clase p (en el sentido del cálculo diferencial ordinario), tal que $\overline{f}|_{V^x \cap U} = f|_{V^x \cap U}$.

(Es decir, las definiciones 3 y 4 son equivalentes.)

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia de los dos lemas anteriores.

El teorema anterior es también cierto para clase ∞, si se impone la condición que en cada punto exista un entorno en el cual todas las derivadas (respecto a t e y) de la función estén acotadas por una misma constante.

TEOREMA 10.—Sean E un espacio de Banach real, Λ un sistema finito y linealmente independiente de elementos de $\mathcal{L}$ (E, R), F un espacio de Banach real, f una aplicación de E_Λ^+ en F, $r \in N \cup \{0\}$ y para todo $k \in \{0, \ldots, r\}$, f_k una aplicación de E_Λ^+ en $\mathcal{L}_s^k$ (E, F), donde $f_0 = f$.

Para cada $k \in \{0, \ldots, r\}$ se considera

$$R_k : E^+_\Lambda \, x \, E^+_\Lambda \rightarrow \mathcal{L}_s^k (E, F)$$

definida por

$$R_k(x, y) = f_k(y) - \sum_{i=0}^{r-k} \frac{f_{k+i}(x)\left((y-x)^i\right)}{i!}$$

Supongamos que para todo $k \in \{0, \ldots, r\}$, todo $x_0 \in E_\Lambda^+$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in E_\Lambda^+$ con

$$\| x_1 - x_0 \| < \delta \quad \text{y} \quad \| x_2 - x_0 \| < \delta,$$

se verifica que

$$\| R_k(x_1, x_2) \| \leq \varepsilon \, \| x_1 - x_2 \|^{r-k}.$$

Supongamos por último que E admite particiones de la unidad de clase r. Entonces, existe $\bar{f}$, aplicación de clase r de E en F tal que $\bar{f}|_{E_\Lambda^+} = f$ y para todo

$$k \in \{1, \ldots, r\}, \ (D^k \bar{f})|_{E_\Lambda^+} = f_k.$$

DEMOSTRACIÓN.—Teniendo en cuenta la definición 3 de aplicación de clase 1 y las hipótesis del enunciado, se tiene que f es de clase 1 en E_Λ^+. Por inducción se obtiene que f es de clase r. Por el teorema anterior se tiene una extensión local de f y por las particiones de la unidad se tiene la extensión global.

Por último, estableceremos el teorema de la función inversa en variedades con borde anguloso y dimensión arbitraria.

Observamos en primer lugar que utilizando los difeomorfismos de clase p entre abiertos de cuadrantes, como funciones de transición, se introducen las variedades diferenciables con borde anguloso, según el procedimiento usual, así como las aplicaciones de clase p.

El teorema de invariancia del borde permite definir el índice de un punto de una variedad ya que si dos cartas φ y ψ contienen al punto x, entonces ind $\varphi(x)$ = ind $\psi(x)$. A partir del concepto de índice se definen los bordes ∂^k X y B_k (X) de la siguiente forma:

$$\partial^k(X) = \{x \in X/\text{ind}(x) \geq k\}, \quad B_k(X) = \{x \in X/\text{ind}(x) = k\}.$$

Naturalmente, se tiene también el teorema de invariancia del borde, mediante difeomorfismos entre variedades, es decir: si f es un difeomorfismo de X sobre X', entonces ind (x) = ind $f(x)$;

$$f(\partial^k X) = \partial^k X' \quad \text{y} \quad f(B_k X) = B_k X'.$$

El teorema de la función inversa para variedades con borde, sigue del teorema de extensión de Whitney y del teorema de la función inversa para abiertos de espacios de Banach. De este último damos tan sólo el enunciado.

TEOREMA 11.—Sean E, F espacios de Banach reales, U un abierto de E, f una aplicación de clase p ($p \in N \cup \{\infty\}$) de U en F y $x \in U$.

Supongamos que D $f(x)$ es un homeomorfismo lineal de E sobre

F. Entonces existe V^x, entorno abierto de x en U, y existe $V^{f(x)}$, entorno abierto de $f(x)$ en F, tales que $f|_{V^x}$ es un difeomorfismo de clase p de V^x sobre $V^{f(x)}$.

LEMA 12.—Sea f una aplicación de clase p ($p \in N \cup \{\infty\}$) de un abierto U de un cuadrante E_M^+ en un abierto V de un cuadrante F_Λ^+. Supongamos que f es un difeomorfismo de clase 1. Entonces f es un difeomorfismo de clase p.

LEMA 13.—Sean E, F espacios de Banach reales, Λ un sistema finito y linealmente independiente de elementos de $\mathcal{L}(E, R)$, M un sistema finito y linealmente independiente de elementos de $\mathcal{L}(F, R)$, A un abierto de E, A′ un abierto convexo de F y g un homeomorfismo de A sobre A′ tales que:

$$g(\partial_\Lambda(A \cap E_\Lambda^+)) \subset \partial_M(A' \cap F_M^+) \quad y \quad g(\mathrm{Int}_\Lambda(A \cap E_\Lambda^+)) \cap \mathrm{Int}_M(F_M^+) \neq \phi$$

Entonces,

$$g((E - E_\Lambda^+) \cap A) \subset F - F_M^+.$$

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos en primer lugar que

$$\partial_M(A' \cap F_M^+) \neq \Phi.$$

La aplicación continua $g^{-1}|_{A'-\partial F_M^+}$, transforma $A' - \partial F_M^+$ dentro de $E - \partial E_\Lambda^+$.

Como A′ es convexo, se tiene que $\mathrm{Int}_M(A' \cap F_M^+)$ es una componente conexa, no vacía, de

$$A' - \partial F_M^+ \cdot (\mathrm{Int}_M(A' \cap F_M^+)$$

es abierto y cerrado en $A' - \partial F_M^+$).

Por tanto, teniendo en cuenta la segunda fórmula de la hipótesis se concluye que

$$g^{-1}(\mathrm{Int}_M(A' \cap F_M^+))$$

está contenido en $\mathrm{Int}(E_M^+)$.

Así

$$G = g((E - E_\Lambda^+) \cap A) \subset (F - F_M^+) \cup \partial F_M^+ \quad \text{y} \quad G \subset F - F_M^+$$

ya que G es abierto en F.

El caso en que

$$\partial_M (A' \cap F_M^+) = \Phi,$$

se comprueba directamente.

TEOREMA 14 (Función inversa en variedades con borde anguloso. Versión local).—Sean U un abierto de un cuadrante E_Λ^+, F_M^+ un cuadrante de un espacio de Banach real F, f una aplicación de clase p ($p \in N \cup \{0\}$) de U en F_M^+ tal que

$$f(\partial_\Lambda(U)) \subset \partial F_M^+,$$

y sea $x \in U$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $Df(x)$ es un homeomorfismo lineal de E sobre F.

b) Existe U_1, entorno abierto de x en U y existe U', entorno abierto de $f(x)$ en F_M^+, tales que $f|_{U_1}$ es un difeomorfismo de clase p de U_1 sobre U'.

DEMOSTRACIÓN.—b) $\Longrightarrow$ *a*).

Es consecuencia inmediata de la regla de la cadena.

a) $\Longrightarrow$ b)

Si $x \in \mathrm{Int}_\Lambda(U)$, se considera $g = f \mid \mathrm{Int}_\Lambda(U)$. Entonces por el toerema 11 existe V^x, entorno abierto de x en $\mathrm{Int}_\Lambda(U)$, y existe $V^{f(x)}$, entorno abierto de $f(x)$ en F tales que $g|_{V^x}$ es un difeomorfismo de clase p de V^x sobre $V^{f(x)}$.

Como $V^{f(x)} \subset F^+$, dicho entorno es abierto de F_M^+ y se tiene el resultado.

Supongamos ahora que $x \in \partial_\Lambda(U)$. Por hipótesis $f(x) \in \partial F_M^+$. Por otra parte, de T. 9 deducimos que existe V^x entorno abierto de x en E y existe $\bar{f}$: $V^x \longrightarrow F$ aplicación de clase p tal que $V^x \cap E_\Lambda^+ \subset U$ y $\bar{f}|_{V^x \cap U} = f|_{V^x \cap U}$. Además se cumple que $D\bar{f}(x) = Df(x)$. Así por T. 11, existe W^x entorno abierto de x en V^x y existe $W^{\bar{f}(x)}$, entorno abierto de $\bar{f}(x)$ en F tales que $\bar{f}|_{W^x}$ es un difeomorfismo de clase p de W^x sobre $W^{\bar{f}(x)}$, además se puede suponer que $W^{\bar{f}(x)}$ es convexo.

Entonces por el lema anterior, $\bar{f}|_{W^x \cap U}$ es un difeomorfismo de clase p de $W^x \cap U$ sobre $W^{\bar{f}(x)} \cap F_M^+$.

Obsérvese que aunque $\bar{f}$ hubiese sido tan sólo de clase 1, por el lema 12 $\bar{f}|_{W^x \cap U}$ sería también un difeomorfismo de clase p.

El teorema anterior sugiere la definición de difeomorfismo local en variedades.

Definición 15.—Sean X, X′ variedades diferenciables de clase p y f una aplicación de X en X′.

a) Se dice que f es un difeomorfismo local de clase p en $x_0 \in X$, si existe V^{x_0}, entorno abierto de x_0 en X, y existe $V^{f(x_0)}$, entorno abierto de $f(x_0)$ en X′ tal que $f|_{V^{x_0}}$ es un difeomorfismo de clase p de V^{x_0} sobre $V^{f(x_0)}$.

b) Se dice que f es un difeomorfismo local de clase p de X en X′, si es difeomorfismo local de clase p en todo x de X.

Obsérvese que todo difeomorfismo local de clase p es una aplicación de clase p.

Teorema 16 (Función inversa en variedades con borde).—Sean X y X′ variedades diferenciables de clase p, f una aplicación de clase p de X en X′ y $x_0 \in X$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $T_{x_0} f$ es un homeomorfismo lineal y existe V^{x_0}, entorno abierto de x_0 en X, tal que $f(V^{x_0} \cap \partial X) \subset \partial X'$.

b) f es un difeomorfismo local de clase p en x_0.

Demostración.—Es consecuencia de T. 14 y del teorema de invariancia del borde por difeomorfismos.

Veamos con un ejemplo que la condición $f(V^{x_0} \cap \partial X) \subset \partial X'$, es esencial en el teorema anterior.

Ejemplo 17.—Sea $X = X' = [0, \rightarrow)$ y f la aplicación de X en X′ definida por $f(x) = 2x + 3$.

Es claro que f es una aplicación de clase ∞ de X en X′ y $T_0 f$ es un homeomorfismo lineal. Sin embargo, f no es un difeomorfismo local de clase ∞ en 0.

BIBLIOGRAFÍA

[1] DIEUDONNE: *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, 1960

[2] LANG, S.: *Differential Manifolds*. Addison Wesley, 1972.

[3] SEELEY, R. T.: *Extension of C^∞ functions defined in a half space*. «Proc. Amer. Math. Soc.», V, 15, 1964, pág. 625-626.

[4] TOUGERON, J. C.: *Ideaux de Fonctions Differentiables*. Springer-Verlag, 1972.

[5] WHITNEY, H.: *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*. «Trans. Amer. Math. Soc.», 36, 63-89 (1934).

Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas del C.S.I.C.

Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense